SHOUT
SHARE
IT

MEMORIE
DI MATEMATICA
E DI FISICA
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA
DELLE SCIENZE

TOMO IX.

MODENA
PRESSO LA SOCIETÀ TIPOGRAFICA.
MDCCCII.

NATURAL HISTORY.

ANNALI

DELLA SOCIETA' ITALIANA DELLE SCIENZE.

1. La *Società Italiana* comparve al mondo nell' anno dell' era volgare 1782 col I. tomo delle sue *Memorie* stampato in Verona. Il celebre matematico Anton-Mario Lorgna, nato a Cerea nel Veronese, ne fu il promotore di concerto co' primarj Scienziati dell' Italia. Questa istituzione ebbe per oggetto di unire in un solo Corpo accademico e di porre in azione, come fossero in una Città stessa, le forze scientifiche di tutta la nostra Penisola; impresa non più tentata. Le produzioni dovean consistere in Memorie di fisica e di matematica, ed in elogj di Socj defunti.

2. Nel tomo III, uscito a luce l' anno 1786, vidersi lo Statuto ed il catalogo de' quaranta Membri della Società, unitamente a due onorarj e a dodici stranieri. Dal concordato volere dei quaranta doveva nascere, e nacque, lo Statuto, siccome testifica la prefazione al I. tomo. Primo presidente, eletto dai Socj nel principio del 1787, fu il sopraddetto Lorgna; e primo Segretario, nominato da questo, l' abate Agostino Vivorio di Vicenza.

3. Cominciò l' anno 1788 colla elezione, a pluralità di voti secondo le leggi, dell' abate Alberto Fortis Vicentino per Socio attuale, in luogo di Ruggiero Giuseppe Boscovich Raguseo mancato di vita, il cui elogio si ha nel tomo IV. stampato in Verona l' anno stesso; e con quella di Condorcet e di Bailly, in vece dei trapassati stranieri Sheele e Muller.

4. Alla metà dell'anno 1791 sono stati aggregati per Socj attuali l' abate Carlo Amoretti d' Oneglia, l' abate Tommaso

Valperga Caluso Torinese, il Padre Giambatista da S. Martino di Luperi nella Marca Trivigiana Cappuccino, Paolo Mascagni di Siena, l'abate Lorenzo Mascheroni di Bergamo, Francesco Pezzi Genovese, Michele Rosa di Rimino, il Padre Francesco Soave di Lugano, Somasco e l'abate Giuseppe Toaldo di Marostica ne' colli Vicentini, a causa della traslazione di sette Individui nella classe degli emeriti, coerentemente all'articolo quinto dello Statuto, ed attesa la morte di Giordano Riccati Trivigiano, di cui leggesi in questo IX. tomo l'elogio, e di Gianfrancesco Cigna del Mondovì Professore di Notomia nell'Università di Torino ove cessato avea di vivere il dì 16 Luglio dell'anno antecedente, 58 dell' età sua. Furono pure ascritti Herschel, Lalande e Lavoisier al ruolo degli stranieri in sostituzione agli estinti Buffon, Camper e Franklin.

5. Nel 1793 fu confermato in presidente il Lorgna, e restarono inclusi fra i Socj attuali, il Padre Pietro Cossali Veronese, Teatino, il Padre Mariano Fontana di Casal-maggiore, Barnabita, Giannantonio Marino Protomedico di Savigliano, e l'abate Giuseppe Olivi di Chioggia, dappoichè altrettanti Socj entrarono nella schiera degli emeriti. Giuseppe Bancks ebbe luogo fra gli stranieri a cagione dell'accaduta morte di Born.

6. Similmente, nel 1796 furono annoverati fra i Socj attuali, Giovanni Maironi Daponte Bergamasco, ed Anton Maria Vassalli Torinese per occuparvi i luoghi lasciati vacui dai defunti Giovanni Arduino (vedine l'elogio nel tomo VIII. Modena 1799) e Giuseppe Olivi (vedine l'elogio nel tomo presente); e vennero ammessi tra gli stranieri Laplace, Saussure, Maskelyne e Senebier; essendo passati all'altra vita Bonnet, Condorcet, Bailly e Lavoisier.

7. Tolto ai vivi nel dì ventotto Giugno del mentovato anno 1796 il Lorgna, l'elogio del quale è nel tomo VIII., ed aperto colle solennità legali il testamento di Lui, vi si trovò il seguente articolo relativo alla Società nostra.

Arti-

Articolo V. del Testamento suddetto.

,, Passo ora a ragionare intorno alla Società Italiana. ,, Avendo io fondata questa Istituzione per l' incremento ,, delle Scienze in Italia del 1782, è ben naturale che sia ,, ella da me come cosa propria riguardata e procuri la ,, sua perpetua sussistenza, come può ottenersi nelle cose ,, umane. Per ciò fare è necessario un fondo che perpetuamente l'alimenti e ravvivi, e una direzione che vegli sopra ,, di essa. Quanto dunque primamente alla direzione, ho pensato di annetterla ed appoggiarla all' Accademia di Agricoltura, Arti, e Commercio di Verona, cui prego fervidamente di voler accogliere nel suo seno anche questa Instituzione, e di voler invigilare sopra la sua sussistenza ,, nel modo, che dirò quì appresso.

,, Due persone principalmente sono destinate dalle leggi ,, della Società a presiedere al suo governo e andamento: ,, il Presidente, e il Segretario Amministratore. Siccome il ,, Presidente può essere anche fuori di Verona, così la somma degli affari così scientifici, come economici risiede ,, principalmente nelle mani del Segretario. Gli affari scientifici non consistendo che in un carteggio accidentale co' ,, Membri della Società, tutto il più essenziale consiste negli affari economici, cioè nel fare le spedizioni de' Tomi ,, stampati a' diversi Libraj d' Italia, e fuor d' Italia, riscuotere il danaro, dirigere e pagare la stampa del Tomo, ,, che deve uscire di tre in tre anni. La legge veramente ,, dice di due in due anni, ma l' esperienza ha fatto conoscere che basta in tal periodo raccogliere le memorie spedite da' Socj; onde la stampa non può effettivamente aver ,, luogo che di tre in tre anni.

,, Stabilisco dunque primamente che il Segretario della ,, Società Italiana sia sempre persona secolare; e perchè ,, non nascano confusioni prego l' Accademia d' Agricoltura,

„ che voglia aggiungere al suo proprio Segretario, che è „ sempre secolare, il titolo, e le incumbenze pure di Segretario Amministratore della Società Italiana col congruo „ assegnamento di sessanta ducati di argento annui per suo „ onorario. E gli verranno inoltre pagate tutte le spese del „ carteggio, ch'egli dovrà soggettare al Sig. Presidente della „ Società Italiana se risiedesse in Verona, o al Presidente „ dell' Accademia Agraria in mancanza di quello, presentando le lettere ricevute di sei in sei mesi; di modo che „ l'assegnamento fattogli resti netto da ogni aggravio. Questo pertanto sarà il primo dispendio occorrente per la sussistenza della Società. Il secondo consiste nella stampa. „ Considerando il Tomo ragguagliatamente, egli è di fogli 80. „ Tutte le spese ordinarie e straordinarie per questa stampa, „ comprese le spedizioni, non hanno mai oltrepassato la „ somma di ducati d'argento quattrocento e venti ogni tre „ anni; il che richiede annualmente la somma di 140 ducati d'argento annui. Dunque aggiuntole l'assegnamento „ annuo di ducati 60 al Sig. Segretario, tutta la spesa che „ dirò certa dell' Accademia non può oltrepassare la somma „ annua di 200 duecento ducati d'argento.

„ Per supplire pertanto a questa spesa lascio all' Accademia Agraria un perpetuo annuo legato di 200: —, „ (*così nell' autografo*) i quali le saranno contribuiti dal „ mio erede universale fedelmente, e senza contrasto. Resta „ la spesa eventuale del carteggio e degli involti delle Memorie, spedizioni ec. da farsi dal Segretario. L'esperienza „ di tanti anni ha fatto conoscere che ciò non importa più „ di 20. ducati d'argento circa all'anno. Per supplire adunque anche a questa spesa, e a tutto ciò che potesse occorrere di eventuale, l'Accademia ha la rendita triennale „ de' Volumi che si stampano. La lunga esperienza ha fatto „ conoscere che s'incassano sempre per questo conto più di „ 300: — trecento ducati d'argento per ogni triennio, cioè „ più di cento 100 ducati d'argento all'anno. Sia perciò

„ tutto suo e di sua ragione questo rimborso. Inoltre lascio
„ alla detta Accademia tutti li fondi appartenenti alla So-
„ cietà, cioè li caratteri da stampa, che sono in mano del-
„ lo Stampatore Ramanzini, tutti li rami, e legni della
„ Stamperia, e di più tutte le copie dei volumi già stam-
„ pati [che in questo momento (*il Lorgna consegnò la sua*
„ *Cedola testamentaria al pubblico Notaro Veronese Luigi*
„ *Maboni, il dì* 19 *Marzo* 1795) sono ormai più di 1400],
„ che si trovassero invendute nella mia casa al tempo della
„ mia morte.

„ L' Accademia adempirà agli obblighi verso i quaran-
„ ta Socj, e verso le Accademie estere come sta esposto
„ nelle leggi della Società Italiana. Oltre a questi, sarà re-
„ galato un volume a tutti li componenti *pro tempore* la
„ Reggenza dell' Accademia, tutte le volte che sarà pubbli-
„ cato un Tomo.

„ Se mai per le umane vicende accadesse che passasse-
„ ro quattro anni, non tre soli, come ho stabilito, senza
„ che fosse pubblicato un Tomo della Società, oppure se
„ mai per le umane contrarietà accadesse che l' Accademia
„ Agraria di Verona non credesse di voler accettare quest'
„ onorevole incorporamento con la Società Italiana; nell' uno
„ e nell' altro caso, essendo io in necessità di considerare
„ estinta questa mia Instituzione, intendo che cessi da ogni
„ contribuzione la mia Commissaria per questo conto, e
„ rientri tutto, e tutti gli effetti, nella sua eredità universa-
„ le. E perchè conosca il Pubblico che da me non ha di-
„ penduto il lasciare un fondo convenevole per la perpetua
„ sussistenza della Società Italiana, prego il mio Commissa-
„ rio a far istampare questo Articolo V. del mio Testamento
„ in tutti li Giornali a universale cognizione.

8. Continuò non pertanto il Sacerdote Agostino Vivorio nel suo uffizio di Segretario della Società Italiana, in vigore dell' atto che segue.

Nella pubblica Accademia d' Agricoltura, Commercio ed Arti di Verona il dì 6 Luglio 1796, in voti 22.

„ Udito l' articolo V. del testamento dell' egregio Socio „ Cav. Anton-Mario Lorgna di chiara memoria, il quale dispose in via di legato a favore di questa Accademia l' annua somma di ducati dugento d' argento, per l' oggetto „ della perpetua sussistenza della Società Italiana, corpo „ scientifico, fondato e sostenuto finora dalla generosità del „ detto Socio, con onor singolare di Lui, di Verona, e „ dell' Italia, nè volendo l' Accademia mancar dal suo canto ad un fine sì nobile; vada parte:

„ Capo primo. Che venga accettato tutto ciò che in „ virtù del suddetto testamento appartiene a questa Accademia, con facoltà alla Reggenza, o al Segretario perpetuo, „ di rilasciare a nome di questo Corpo, per li tomi, caratteri, rami e legni, quelle ricevute che fossero necessarie, „ senza obbligo della loro specialità.

„ Il qual capitolo abballottato, ebbe voti favorevoli 22. „ contrarj nissuno.

„ Capo secondo. Che resti eccitato l' egregio Socio „ abate Agostino Vivorio, il quale occupa attualmente il „ posto di Segretario perpetuo della Società Italiana, a voler conservare nelle funzioni di Segretario amministratore „ della medesima quello stesso zelo e valore, che le ha dimostrato per tanti anni principiando dalla fondazione, acciocchè il glorioso prosperamento della nominata Società „ ridondi in onore eziandio di questo Corpo, al qual pure „ egli ha dato manifesti saggi di speciale affezione.

„ Il qual capitolo abballottato, è stato parimente approvato da tutti i voti.

„ Antonio Cagnoli Segretario perpetuo.

9. Quindi il Segretario Vivorio invitò i Socj a nominare un Presidente, in conformità dell' articolo decimo sesto

dello Statuto, e rimase così eletto il Socio attuale Antonio Cagnoli Veronese, che assunse la presidenza il giorno trenta novembre dell'anno 1796.

10. Diede questi cominciamento alla medesima col richiedere ai Socj, mediante sua circolare de' ventotto dicembre consecutivo, le correzioni, le abolizioni, le giunte allo Statuto che ciaschedun di loro giudicasse vantaggiose e convenevoli.

11. Al principio dell' anno seguente, la Compagnía co' suoi voti scelse a Socio, in cambio del Lorgna, il Padre Francescomaria Franceschinis Friulano, Barnabita.

12. Nel luglio dell'anno stesso 1797, il Generalissimo dell' Armata Franzese in Italia, Napoleone Bonaparte, donò franchi dieci mila ad aumento dei fondi della Società, siccome appare da questo documento

Au Quartier général de Montebello, le 18. Messidor an 5.^{e}

Bonaparte Général en Chef de l'Armée d'Italie

Au Citoyen Antoine Cagnoli Astronome à Véronne.

J'ai donné ordre, Citoyen, au Citoyen Haller de vous faire rembourser la somme de quatre mille francs, pour vous indemniser des pertes que vous avez faites pendant les malheureux événemens de Véronne.

Je lui ai ordonné également de prendre des mesures pour vous faire donner dix mille francs pour augmenter le fonde de la Société Italienne de Véronne, légué par le celebre Lorgna, à laquelle nous sommes redevables de plusieurs Mémoires utiles sur les sciences exactes.

Vous ne devez avoir aucune espèce d'inquietude pour la Société Italienne, & je vous prie de me faire connoitre tout ce qu'il y aurait moyen de faire pour ameliorer son organisation & la rendre plus utile aux progrès des connoissances humaines.

Croyez, je vous prie, au desir que j'ai de faire quelque chose qui soit avantageux à votre Société.

Bonaparte.

13. Sotto il ventun' agosto dell' anno suddetto, il Presidente inviò ai Socj la proposizione d' uno Statuto da se rinnovellato giusta i suggerimenti ottenuti dai Socj, in conseguenza della sopraccitata sua lettera ventotto dicembre.

14. Dintorno a tre mesi dopo, emanò dal predetto Gen. Bonaparte il decreto seguente

Au Quartier Général de Milan le 16. Brumaire An. VI. de la Republique une & indivisible.
Bonaparte Général en Chef de l'Armée d' Italie.

Art. 1.

La Société Italienne qui jusqu'ici a residé à Véronne sera transferée à Milan.

Art. 2.

Le Cit. Cagnoli sera adjoint à l'Observatoire de Brera avec les mêmes appointemens & les mêmes fonctions que le Cit. Oriani.

Art. 3.

Tous les Régistres, Instrumens, effets &c. appartenans à la ditte Société seront au plus tard dans six jours transportés à Milan.

Art. 4.

Le Directoire Executif, le Général de Division Brune & le Cit. Cagnoli sont chargés de l'exécution du présent ordre.

Bonaparte.

15. Circa tale decreto si legge nel libro *Atti della Società Italiana* scritto quanto appresso.

,, Adì 13. Novembre 1797.

,, Ricevuta per mezzo del General Brune copia del de-
,, creto precedente, il Cit. Cagnoli Presidente della Società
,, espose (in lettera diretta allo stesso Brune sotto li 10.
,, Novembre) alcune difficoltà relative al traslocamento, or-
,, dinato sopra, della Società Italiana. Queste difficoltà perco-
,, tevano principalmente: l'esser la medesima legata alla So-
,, cietà Agraria di Verona: il pericolo di perdere il legato
,, Lorgna: il non essersi ancora ricevuti li 10 mila franchi
,, donati dal Gen. Bonaparte; e la renitenza che potrebbe
,, avere il Segretario Vivorio a trasferirsi in Milano. A tutti
,, questi articoli intese il Generalissimo Bonaparte di metter
,, rimedio col seguente decreto

Au Quartier Général de Milan le 23. Brumaire (13. Novembre 1797) An. 6. de la Republique une & indivisible.

Bonaparte Général en Chef de l'Armée d'Italie.

Art. 1.

Les Instrumens astronomiques du Cit. Cagnoli seront achetés par la République Cisalpine, & réunis aux autres Instrumens de l'Observatoire de Brera.

Art. 2.

Le Cit. Haller administrateur des Finances de l'Armée d'Italie fera solder les quatre mille francs au Cit. Cagnoli & les dix mille francs pour la Société Italienne que j'ai accordés il y a deux mois.

Art. 3.

Les fonds de la Societé Italienne & de la Societé Patriotique de Milan seront reunis & ne formeront qu'une seule masse.

Art. 4.

Le Citoyen Vivorio Sécrétaire actuel de la Societé Italienne conservera sa place & ses appointemens, & sera nommé à une place de Professeur d'un des Ecoles centrales de Milan.

Art. 5.

Le Général Brune & le Cit. Cagnoli prendront des mesures avec la Société d'Agriculture pour rompre tous les interêts qu'elles ont ensemble.

Art. 6.

Le Cit. Cagnoli est autorisé à venir à un accomodement avec les Heritiers de feu Lorgna pour les indemnités qui pourroient leur revenir sur les fonds de la Societé.

Art. 7.

Le Directoire Exécutif de la République Cisalpine, le Général Divisionnaire Brune, & le Cit. Cagnoli sont expressément chargés de faire exécuter le plus promptement possible les Articles ci-dessus.

Bonaparte.

„ Il Cittadino Presidente Cagnoli, *seguita a narrarsi nel* „ *libro Atti in data del diciassette novembre* 1797, presentò „ all' Accademia Agraria di Verona copia del precedente de„ creto del Generalissimo Bonaparte, onde l'Accademia fece „ il seguente Atto.

„ Dagli Atti dell' Accad. di Agricoltura, Commercio ed „ Arti di Verona, convocata li 18. Novembre 1797. v. s.

„ Lette dal Citt. Socio Antonio Cagnoli le ordinazioni „ del Generalissimo Bonaparte relative alla Società Italiana „ e alla Persona del suo Presidente, cioè dell' anzidetto Ca„ gnoli Segretario di questa Accademia, essa, benchè viva„ mente sentisse la partenza d'un Individuo così benemerito „ ed onorevole, rispettò con sommessa ubbidienza le dispo„ sizioni del predetto Generale in capo, contenute nel se„ guente articolo V. della sua lettera.

Le Général Brune, & le Cit. Cagnoli prendront des mesures avec la Société d'Agriculture pour rompre tous les intérêts qu'elles ont ensemble.

„ Presa con pienezza di voti. Per copia conforme.

„ Del Bene Segretario.

16. Da altra annotazione esistente nel libro *Atti*, sotto il due dicembre 1797, si raccoglie che l' abate Agostino Vivorio, trattenuto nella propria Patria da convenienze assai ragionevoli, si scusò dall' accettare le onorevoli condizioni offertegli per recarsi a Milano in qualità di Segretario della Società.

17. Prosegue intanto il libro *Atti* sovente citato, così:

„ Adì 5. Ventoso An. VI. (23. Febbrajo 1798.)

„ A rogito del Cittadino Antonio Maderna Notaro di „ Milano, in data del giorno ora indicato, il Cittadino Pre„sidente Antonio Cagnoli investì a favore della Società Ita„liana presso l' Amministrazione Centrale de' Beni Nazionali „ in Milano, come rappresentante il fondo di pubblica Istru„zione, lire 12573. 10, di Milano coll' annuo interesse del „ cinque per cento all' anno ed alla rata, da pagarsi dal „ detto fondo di pubblica Istruzione alla Società Italiana. „ Da detto rogito risulta che le dette lire 12573. 10, di „ Milano sono li 10 mila franchi stati accordati dal Gen. „ Bonaparte alla Società Italiana, detratta solo dai 10 mila „ franchi una tenue somma per spese incontrate dal Citt. „ Presidente Cagnoli nel cambio di monete, volumi delle „ Memorie della Società acquistati ec. Il tutto come da con„to inserito nel rogito Maderna in fine di esso al numero 3.

18. In appresso il Corpo Legislativo della Repubblica Cisalpina promulgò questa Legge.

„ Atto legislativo del giorno 24. Messidoro Anno VI. „ Repubblicano (12. *Luglio* 1798.)

„ Il Consiglio de' Seniori ha riconosciuto l' urgenza del„la Risoluzione seguente:

„ Il Gran Consiglio nella seduta del giorno 24. Messi„doro Anno VI. Repubblicano:

„ Considerando che il Decreto 23. Brumale (13. *No„vembre* 1797.) del Generale in Capo Bonaparte non ha

,, avuto ancora esecuzione : dichiarata l' urgenza sul motivo ,, di affrettare la stampa delle Memorie di detta Società, alla quale, come benemerita dell' umanità, la Repubblica ,, Cisalpina dà volontieri incoraggimento e soccorso, risolve

,, Il Direttorio esecutivo è autorizzato a mettere alla ,, disposizione della Società Italiana un fondo nazionale del ,, reddito annuo di lire nove mila circa, a condizione però, ,, e fino a tanto che la medesima Società avrà la sua sede ,, centrale nel Territorio della Repubblica Cisalpina.

,, La presente Risoluzione sarà stampata.

,, Ramondini Presidente.

,, G. Conti, B. Ambrosioni Segretarj.

,, Seduta del giorno 24 Messidoro suddetto.

,, Il Consiglio dei Seniori approva.

,, Conti Presidente. Turchi, Cologna Segretarj.

,, Il Direttorio Esecutivo ordina, che il premesso Atto ,, Legislativo sia munito del sigillo della Repubblica, pubblicato ed eseguito.

,, Li 25. Messidoro Anno VI. Repubblicano.

,, Savoldi Presidente.

,, Pagani Segretario Generale.

19. Alla qual legge fu dato esecuzione nel modo che segue

,, Milano 3. Termidoro Anno VI. Repubblicano

,, (21. *Luglio* 1798.)

,, Il Ministero di Finanza Generale all' Amministrazione ,, Centrale del Dipartimento del Panaro. Modena.

,, Colla Legge 24. Messidoro è stata assegnata in tanti ,, fondi nazionali l' annua rendita di lire novemila circa alla ,, Società Italiana, a condizione però, e sino a tanto che la ,, medesima Società avrà la sua sede centrale nel Territorio ,, della Repubblica Cisalpina. In conseguenza di detta Legge ,, il Direttorio Esecutivo crede che questo fondo nazionale ,, possa essere assegnato sui fondi esistenti nel Dipartimento ,, del Panaro, attesa la circostanza d' essersi ivi fissata la

„ residenza del Cittadino Cagnoli Presidente della detta So-
„ cietà. Vi partecipo quindi la mente del Direttorio, all' effet-
„ to che vi concertiate coll' Agente Dipartimentale prevenu-
„ to di conformità, per l' assegnazione dell' accennato reddi-
„ to sui Beni Nazionali del Panaro, nel modo e con quelle
„ cautele che troverete opportune, onde assicurare alla So-
„ cietà la percezione dell' indicata annua somma, parteci-
„ pandomi in seguito il risultato per le occorrenti annota-
„ zioni.

„ Salute, e Fratellanza

„ Pel Ministro di Finanza Generale

„ Radaelli.

„ Brambilla Segretario.

20. Trasportata adunque in Modena la sede centrale della Società, il dì dieci settembre dell' anno anzidetto, è registrata negli *Atti* la scelta fatta dal Presidente Cagnoli del Socio emerito abate Giambattista Venturi Reggiano, Professore in Modena, in Segretario di quella.

21. Sul finire dello stesso mese, il Presidente avvisò con circolare i Socj avere il proposto Statuto acquistata la validità di legge mediante il favore di ventinove suffragj. Esso vedesi in fronte al tomo VIII. delle Memorie della Società.

22. Colla precitata circolare il Presidente esibì alla sanzione dei Socj due articoli da aggiugnersi al mentovato Statuto, l' uno risguardante lo stabilimento di due premj per le Memorie più utili d' ogni tomo, l' altro una compensazione alle spese che incontrano i Socj pel carteggio. Tali articoli furono approvati, e sono il vigesimo secondo ed il vigesimo terzo nello Statuto che segue a pag. cvii.

23. Due mesi dipoi, l' abate Vincenzo Chiminello di Padova ed Antonio Giobert di Torino riempierono i posti vacanti per la morte dei due Socj attuali Giuseppe Toaldo, del quale s' incontra l' elogio nel tomo VIII, e Michele Girar-

rardi, il cui elogio si troverà appresso, nato in Limone Terra del Benaco.

24. Nel gennajo del 1800, mentre Modena e Verona obbedivano a Cesare, il Presidente dell'Accademia Agraria di Verona, Alessandro Carlotti, scrisse privatamente al Presidente nostro Antonio Cagnoli per concertare i mezzi onde colà rimettere la sede della Società. Cessato da varj mesi in Modena l'effetto della legge cisalpina riportata di sopra, dotante la Società; e ricusando gli Eredi Lorgna il continuato pagamento del suo legato, senza il ritorno della sede in Verona: rispose il Cagnoli che avrebbelo accordato, qualora esso Presidente Carlotti gliene facesse domanda formale in nome della sua Accademia, e si astenesse da qualunque menzione del testamento Lorgna, il qual già non è obbligatorio per la residenza della Società, quando essa creda suo meglio tenerla altrove, rinunziando al legato. Stimò il Cagnoli dover esigere tale silenzio sul testamento, per non sottomettere la Società ai precetti contenuti nel medesimo, cioè, che il Segretario dell' Accademia agraria sia sempre il Segretario della Società e che questi sia sempre persona secolare: precetti contrarj allo Statuto nostro, secondo il quale la nomina e la rimozione del Segretario stanno affidate all' arbitrio del Presidente della Società. Nei termini richiesti dal Cagnoli corse in febbrajo la lettera del Carlotti, che finisce domandando l' elezione di un Segretario in Verona. Incontanente il Cagnoli nominò Segretario della Società Italiana l' egregio Benedetto Delbene Veronese, senza però mentovare in tale atto, nè il posto che quegli copriva di Segretario in sua Patria dell' Accademia agraria, nè il testamento Lorgna. In siffatta guisa, nel giorno ventitre febbrajo dell' anno mille ottocento, passò a Verona la sede centrale della Società.

25. Scorso circa un anno, entrarono col solito metodo nel numero dei Socj attuali, Giovanni Fabbroni Fiorentino, Giuseppe Maria Giovene canonico arciprete di Molfetta, e Paolo Ruffini di Reggio in Lombardia, surrogati a Carlo Barlet-

letti delle Scuole Pie di Rocca Grimalda nel Monferrato, morto in Pavia il dì 25 febbrajo 1800, in età d' anni 65, all' abate Lazaro Spallanzani Scandianese e a Giambatista da San Martino, l' elogio de' quali due ultimi è nel tomo presente.

26. Ritornò il governo della Repubblica Cisalpina, e con esso la sede centrale in Modena della Società, in virtù del seguente decreto.

Milano li 14. Germile Anno IX. (4 Aprile 1801.)

Il Ministro dell' Interno al Cittadino Antonio Cagnoli Presidente della Società Italiana.

„ Troppo è congiunta la gloria della Repubblica Cisalpina a quella della Società Italiana, chiamata già nel suo seno per Decreto dell' immortal Bonaparte, per non rivolgere le cure sollecite del Governo a renderle l' incoraggiamento e i soccorsi che le furono compartiti dall' Atto Legislativo del 24 Messidoro Anno 6.

„ Era ufficio appunto del vostro zelo, Cittadino Presidente, il rappresentare, come avete fatto, colla vostra relazione de' 10 corrente l' accaduta soppressione degli effetti di quell' Atto nell' interregno Tedesco, ed è ora del Comitato Governativo il rimettere la Società nel godimento della sua dotazione.

„ Saranno date pertanto dal Ministro di Finanza le occorrenti disposizioni, acciocchè nuovamente possa ella percepire, come in addietro, l' assegno fattole di lire nove mila annue su' fondi esistenti nel Dipartimento del Panaro altra volta destinati a questo oggetto.

„ Questa risoluzione debb' esservi grata, Cittadino Presidente, ancorchè non sia ella conforme alla domanda e alle riflessioni vostre per ottenere l' assegno de' fondi equivalenti nel Territorio Cisalpino di Verona, e lo stabilimento in Verona stessa della sede centrale della Società. Il

„ Governo non ha creduto opportuno di fare in proposito
„ veruna innovazione, ed è poi soddisfatto che sussista an-
„ che sempre la circostanza della residenza vostra, Cittadi-
„ no Presidente, in Modena, circostanza che divenne un
„ motivo per Voi tanto onorevole di fissar pure in Modena
„ la residenza della Società cui presiedete ben degno.

„ Nè già ponno essere valutabili le difficoltà, che te-
„ mete per parte degli Eredi Lorgna circa il pagamento del Le-
„ gato di 200 Ducati lasciatole dal famoso suo Fondatore: an-
„ corchè la Società non risieda in Verona, come essi brame-
„ rebbero, non è da credere che vorranno movere contrasti
„ per quest'oggetto, resi già inefficaci altra volta: in tal caso
„ spetterà poi al Governo il provvedere che non sia defrau-
„ data ingiustamente la Società di questo sussidio, qualora
„ ne darete parte di qualche opposizione che incontraste.

„ Proseguite adunque, Cittadino Presidente, ad illustra-
„ re co' vostri Colleghi il nome Italiano, mercè la non in-
„ terrotta pubblicazione delle vostre dotte fatiche, ed a me-
„ ritarvi sempre più la soddisfazione e l'encomio di quel Ge-
„ nio Protettore, che fra lo strepito delle vittorie volle ani-
„ mati, con benefizj, gli studj di pace, e distinse sopra
„ tutte la vostra illustre Società con tant' onore della Cisal-
„ pina.

Pancaldi.

Rossi Ispettor generale della Pubblica Istruzione.

27. Nel dì primo maggio 1801 il Presidente Cagnoli nominò Segretario della Società il Padre Pompilio Pozzetti delle Scuole Pie, Mirandolese, Bibliotecario nazionale in Modena, ad istanza del quale, appoggiata sulla qualità sua di Regolare, conferì all' altro Bibliotecario Antonio Lombardi Modenese, il carico di Vicesegretario Amministratore per esercitare segnatamente le economiche funzioni.

28. Tosto il Presidente mise in corso con enciclica ai Socj l' eseguimento degli articoli vigesimo secondo e vigesimo terzo quì motivati al numero 22.

29. Indi a due mesi successe l' aggregazione in Socio attuale del Padre Giuseppe Racagni di Voghera, Barnabita, essendo passato di questa vita l' abate Lorenzo Mascheroni: poi quella a Socio onorario di Benedetto Delbene.

30. In sequela, colla pluralità de' voti, fu risoluto che la Società Italiana si denomini *Società Italiana delle Scienze*.

31. È stata nel giorno nove di settembre 1801 riconosciuta, a tenore dell' articolo vigesimo secondo dello Statuto, la maggiorità relativa de' suffragj a favore della Memoria matematica del Socio attuale Pietro Paoli Livornese, intorno l' *integrazione delle equazioni a differenze parziali finite ed infinitesime*; ed a favore della Memoria di Fisica del Socio emerito Giambatista abate Venturi intitolata *Indagine fisica sui colori*, ambe impresse nell' VIII. tomo, ed è stato impartito a ciascuno dei due nominati Soggetti l' assegnato premio del valore di zecchini sessanta.

32. Correndo il giorno decimo nono di ottobre dell' anno medesimo, si è pur mandato ad effetto il regolamento espresso nell' articolo ventesimo terzo dello Statuto; e la stabilita compensazione per la spesa delle lettere toccò in sorte ai Socj Giannantonio Marino, Simone Stratico Padovano, Gianverardo Zeviani Veronese, Padre Pietro Cossali, e Giovanni Fabbroni.

33. Giunse, il diciotto novembre 1801, al Presidente nostro lettera del Ministro agli affari interni della Repubblica Cisalpina affinchè dalla Società venissero eletti due Socii Cisalpini, i quali dovesser portarsi, nel giorno undici del dicembre immediatamente prossimo, alla Consulta straordinaria, pur Cisalpina, da tenersi nella Città di Lione, in adempimento di legge perciò promulgata. Il Presidente riflettendo non esservi tempo a chiedere, secondo lo stile della Società, ai Membri diffusi per tutta l' Italia le nomine degli Eligendi, riputò unico spediente quello d' invitare a se, come fece, li Socj dimoranti in Modena, Paolo Ruffini e Padre Pompilio Pozzetti; e tutti e tre si credettero in obbligo di suppli-

plire eglino stessi per gli assenti. Nominarono adunque concordemente a tal uopo li Socj attuali, Padre Ermenegildo Pini Milanese, Barnabita, e Giovanni Maironi Daponte. Nè questi mancarono di recarsi alla loro destinazione. Tutto restò approvato dal Ministro dell'Interno colla seguente lettera.

Milano li 8. Frimale Anno X. (29 Novembre 1801.)

Il Ministro dell' Interno al Cittadino Antonio Cagnoli Presidente della Società Italiana delle Scienze in Modena.

„ Dal processo verbale risguardante la nomina fatta per
„ la Società dei Deputati alla Consulta Straordinaria di Lio-
„ ne, che m' inoltraste con vostra lettera 27 Brumale (18
„ *Novembre*), resta abbastanza giustificata la misura da voi
„ adottata di unire per la nomina stessa soltanto i Socj re-
„ sidenti in Modena.

„ Non posso quindi che approvare il vostro operato in
„ tale circostanza, e la nomina risultata dall' unione dei me-
„ desimi Socj, comunicandovene perciò a piena vostra sod-
„ disfazione la corrispondente notizia.

Pancaldi.

Appiani.

34. Nel dì ventidue febbrajo del corrente anno 1802 la Compagnía perdette in Milano il Socio onorario Luigi Caccianemici Palcani, Professore attuale di Fisica nell' Università di Bologna, emerito di Geografia e di Nautica, e Segretario perpetuo dell'Istituto di essa Città, nella quale era nato nel giorno 16 Giugno 1748. Di lui, giovine tuttora d' anni 20, così ebbe a scrivere Francescomaria Zanotti nella prefazione alla sua Arte poetica. *Vedete in filosofia e in matematica il nostro Sig. Luigi Palcani, il quale, così giovinetto, com'è, è già*

già un eccellente maestro, e ciò che è raro eziandio ne' gran maestri, congiunge a quelle due profondissime scienze una singolare eleganza, così che appena uscito alla luce della pubblica università, ha rapito gli animi di tutti gli ascoltanti, e conseguiti i sommi onori prima di chiederli. E poco dopo, *io non son certamente*, segue a dir quel grand' Uomo, *nè un Manfredi, nè un Palcani, nè oserei paragonarmi con ingegni tanto singolari*. Quanto fosse il Palcani meritevole di tale encomio lo attestano le poche, ma eccellenti, sue produzioni, sì latine che italiane, più volte in brevissimo tempo ristampate. Diede Egli alla Società nostra due elogi, ed una memoria inserita nella parte I. del tomo antecedente.

35. A proposta del Presidente, è stato, nel marzo di quest' anno medesimo, sancito l'articolo vigesimo quarto dello Statuto, concernente l' esposizion di programmi con premio al concorso pubblico.

36. Il Presidente stesso, col potere attribuitogli dall' articolo sesto dello Statuto, deliberò, sotto il ventuno del susseguente aprile, di aggiungere alla classe dei Socj onorarj l' abate Agostino Vivorio, che ha per anni undici sostenuto con esimia diligenza e riguardevole utilità le incombenze di Segretario Amministratore della nostra Società.

37. Appena approvato dai Socj l' anzidetto articolo vigesimo quarto dello Statuto, si è data mano alla sua esecuzione. Il Presidente ha stabilito che si espongano al concorso due problemi ad un tratto, l' uno di Matematica, l' altro di Fisica. Pende ora la scelta da 15 argomenti proposti da varj Socj, e trasmessi a tutti dal Segretario con sua circolare 15 Maggio anno corrente 1802.

CATALOGO

DE' MEMBRI DELLA SOCIETÀ ITALIANA

DELLE SCIENZE.

Presidente

ANTONIO CAGNOLI Professore di Matematica sublime nella Scuola Militare. *Modena*.

Socj attuali

AMORETTI (Abate Carlo) Bibliotecario nell' Ambrosiana. *Milano*.

BONATI (Teodoro) Professore d' Idrostatica nell' Università. *Ferrara*.

CALDANI (Leopoldo Marcantonio) Professore Primario di Medicina teorica e di Notomía nell' Università. *Padova*.

CALUSO (abate Tommaso Valperga) Professore di Lingue orientali, di Critica e di Cronologia nell' Ateneo Nazionale. *Torino*.

CANTERZANI (Sebastiano) Presidente dell' Istituto delle Scienze. *Bologna*.

CESARIS (abate Angelo) Astronomo nell' Osservatorio di Brera. *Milano*.

CHIMINELLO (abate Vincenzo) Professore di Astronomía ec. nell' Università. *Padova*.

COSSALI (P. Pietro) C. R. Professore di Astronomía, di Meteorologia e d' Idraulica nell' Università. *Parma*.

DELANGES (Paolo) della Commissione Idraulica. *Milano*.

FABBRONI (Giovanni) Sottodirettore, e Soprantendente all' amministrazione del Reale Gabinetto Fisico. *Firenze*.

FERRONI (Pietro) Matematico Regio, e Professore di Matematica nell' Università di Pisa. *Firenze*.

FONTANA (Cav. Felice) Direttore del Reale Gabinetto Fisico. *Firenze*.

FONTANA (P. Mariano) Barnabita Professore di Matematica nell' Università. *Pavia*.

FORTIS (abate Alberto) Prefetto della Biblioteca Nazionale. *Bologna*.

FOSSOMBRONI (Cav. Vittorio) Consigliere di Stato. *Firenze*.

FRANCESCHINIS (Conte abate Francescomaria).

GIOBERT (Antonio) Professore di Economia rurale d' Arti e Manifatture nell' Ateneo Nazionale. *Torino*.

GIOVENE (Giuseppe Maria) Canonico Arciprete. *Molfetta*.

MAIRONI DAPONTE (Giovanni) Professore di Storia Naturale nelle Scuole Dipartimentali. *Bergamo*.

MALACARNE (Vincenzo) Professore Primario di Chirurgia teorica e pratica nell' Università. *Padova*.

MALFATTI (Gianfrancesco) Professore emerito dell' Università. *Ferrara*.

MARINO (Giannantonio) Soprantendente alla Medicina, alla Chirurgia ed alla Farmacía dello Spedale Nazionale. *Savigliano*.

MASCAGNI (Paolo) Professore di Notomia nell' Università. *Pisa*.

MOROZZO (Conte Càrlo Lodovico). *Roma*.

MOSCATI (Pietro) Consultore di Stato, e Membro della Commissione degli Studj della Repubblica Italiana. *Milano*.

PAOLI (Pietro) Professore delle Matematiche sublimi nell' Università. *Pisa*.

PEZZI (Francesco) Professore di Matematica nell' Università. *Genova*.

PINI (P. Ermenegildo) Barnabita, Professore di Storia Naturale, e Delegato alle Miniere. *Milano*.

RACAGNI (P. Giuseppe Maria) Barnabita, Professore di Fisica nel Ginnasio Nazionale di Brera. *Milano*.

ROSA (Michele) Professore emerito nell' Università di Modena. *Rimini*.

ROSSI (Pietro) Professore di Storia Naturale nell' Università. *Pisa*.

RUFFINI (Paolo) Professore di Geometria e di Analisi nell' Università. *Modena*.

SALIMBENI (Leonardo). *Bologna*.

SLOP (Giuseppe de Cadenberg) Professore di Astronomia nell' Università. *Pisa*.

SOAVE (P. Francesco) Cherico Regolare Somasco. *Milano*.

STRATICO (Simone) della Commissione Idraulica. *Milano*.

VASSALLI-EANDI (Antonmaria), Professore di Fisica sperimentale nell' Ateneo. *Torino*.

VOLTA (Alessandro) Professore di Fisica sperimentale nell' Università. *Pavia*.

ZEVIANI (Gianverardo) Protomedico di Sanità. *Verona*.

Socj Emeriti

COTUNIO (Domenico) Professore di Notomia nell' Università. *Napoli*.

FONTANA (Gregorio) Professore di Matematica superiore nell' Università di Pavia, e Membro del Corpo legislativo della Repubblica Italiana. *Milano*.

LAGRANGE (Lodovico). *Parigi*.

LANDRIANI (Cav. Marsilio). *Vienna*.

ORIANI (abate Barnaba) Astronomo nell' Osservatorio di Brera. *Milano*.

SALUZZO (Giuseppe Angelo). *Torino*.

SALADINI (abate Girolamo) Professore di Matematica sublime nell' Università. *Bologna*.

SCARPA (Antonio) Professore di Notomia e di Chirurgia pratica nell' Università. *Pavia*.

VAIRO (Giuseppe) Professore di Chimica nell' Università. *Napoli*.

VENTURI (Giambatista) Professore di Fisica generale nell' Università di Pavia, e Ministro della Repubblica Italiana presso l' Elvetica. *Berna*.

Socj Onorarj

DELBENE (Benedetto) Segretario perpetuo dell' Accademia di Agricoltura, Commercio ed Arti. *Verona*.

FABRONI (Monsig. Angelo) Priore nell' inclito Ordine di S. Stefano di Toscana e Provveditore dell' Università. *Pisa*.

PINDEMONTE (Cav. Ippolito). *Venezia*.

VIVORIO (abate Agostino). *Vicenza*.

Socj stranieri.

ACHARD. *Berlino.*
BANCKS. *Londra.*
HERSCHEL. *Londra.*
LALANDE. *Parigi.*
LAPLACE. *Parigi.*
MASKELYNE. *Londra.*
NARVOYZ. *Vilna.*
PALLAS. *Pietroburgo.*
PRIESTLEY. *Londra.*
SENEBIER. *Ginevra.*

Segretario.

POZZETTI (P. Pompilio) delle Scuole Pie, Bibliotecario Nazionale e Professore Straordinario di Storia nell' Università. *Modena.*

Vice-Segretario Amministratore.

LOMBARDI (Antonio) Bibliotecario Nazionale ed Ingegnere. *Modena.*

Pagina	Linea	Errori	Correzioni
(XI)	penult.	*un*	*une*
VIII	6	ad	ed
XX	29	cadevere	cadavere
C	15	abbenchè	benchè
10	Col. 1 12	embrocazzoni	embrocazioni
18	29	libre	libbre
23	6	vogliano	vogliono
148	13	chause	chaux
163	6	stat 2	stata
238	15	$\text{Cos.}\frac{\pi}{2} = -:$	$\text{Cos.}\frac{\pi}{2} = -1.$
255	2	$(2e+1)^r (2e+1)^r.$	$(2e+1)^r.$
263	6	IX e XIV	XII e XVI
271	3	$(1 \pm \text{Tang.}\frac{N}{m}\pi)^m$	$(1 \pm \text{Tang.}\frac{N}{m}\pi\sqrt{-1})$
——	9	lo stesso	
299	Nota (*a*) 9	nel	il
302	Col. 1. 1.	$\frac{m(m-1)}{2}$	$\frac{+m(m-1)}{2}$
312	lin. ultima della Nota	$\left(\begin{matrix} dy \\ dx \end{matrix}\right)$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)$
323	Colon. 1. 9	$48'$	$48''$
338	Colon. 1. 2	sciagrafiaf	sciagrafia
357	7.	$T.\varphi^2$	$T.\varphi$
359	20	$(t^2 - t^2)$	$t'^2 - t^2)$
360	12	Sieur	Seur
368	17	$-\overline{BX}^2$	$-bX^2$
444	7	può	non può se
——	8	mentre sia determinabile	non in conseguenza di
448	11	numieso	numero
450	16	e viceversa $x^{(\lambda)}$	$x^{(\lambda)}$ e viceversa

Pagina	Linea	Errori	Correzioni.
453	1	$\frac{x^{iv}-x'''}{x'''}$	$\frac{x^{iv}-x'''}{x'}$
455	7	cambi	non cambi
460	7	$= 0$	$= K$
461	16	$f(x')(x'')(x^{v}) = K$ $f(x')(x'')(x^{v}) = K$	$f(x')(x'')(x^{v})$
		petendo	potendo
483	3	nell' antepcnultimo	nel penultimo
493	6	$x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta^{\sigma})}$	$x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^{\sigma}}$
501	2	valore	risultato
——	4	ec. sempre razionalmente. Ora	ec. Ora
506		la lettera K va apposta alle formole ultime.	
528	24, 25, 26	razionale	algebraica
534	9	U	v
542	14	$y^{((8y-4)+yK-2)}$	$y^{((8y-4K+y+2)}$
547	15	$\zeta^{(4K+1)}$	$\zeta^{(4K-1)}$
553	14		manca la lettera M
556	7.	a^4	A^4
558	5	si cerca siccome cognitissima	si cerca cognitissima come è possibile
572	27.	A a π	A a π
——	——	1 a $\sqrt{2}$	1 a $\sqrt{2}$
609	ultima	riusciuto	riuscito.
610	12	menocche	meno che

ELOGIO

DI MICHELE GIRARDI

SCRITTO

DA LUIGI BRAMIERI

PIACENTINO

Ricevuto li 17. *Maggio* 1801.

Colà, dove l' autunno colla primavera senza quasi intervallo contermina, dove le piante della doppia pompa s' ammantano a un tempo de' frutti e de' fiori, dove il suolo verdeggia ognora e spentaneo presenta un continuo ridente aspetto, che le delizie ~~pur~~ esse disgrada immaginate per incanto dalla fantasia de' romanzatori, colà gli influssi di clima tanto benigno e felice anche l' umano ingegno favorir deggiono di più fina e vivace temperatura. E certo si pare, che quello di Michele Girardi, nato nel giorno 30. di Novembre del 1731. in Limone, Terra dell' amenissimo e dalla natura prediletto Benaco, ne risentisse la benefica virtude altamente. Della adolescenza di coloro, che poi si resero distinti al mondo ed illustri soglionsi narrare prodigi, tal rara volta al vero conformi, creati più spesso o esagerati almeno dall' entusiasmo degli encomiatori estatici sempre e pieni di maraviglia. Noi trasvolando sulla prima giovinezza del Girardi, che allevata nel Collegio di Brescia diretto dall' ora estinta Ignaziana Società dar dovette di lui ben lieti presagi, corriamo a mirarlo Alunno della Università di Padova, intento a coltivare la facoltà medica ne' rami tutti quanti, ch' essa abbraccia del grand' albero delle scienze, amantissimo mo dell' immortal Morgagni discepolo teneramente riamato, e già degno però di lode comune a pochi. Que' Scrittori, i quali nella commendazione d' un valentuomo ridur sogliono con rettorico artifizio, e spesso forzatamente, a certi sommi capi, a certi punti principalissimi il valore e il merito dell' encomiato, l' elogio moral-letterario di Michele Girardi a ciò stringer potriano per non difficil maniera, che oggetto ei fu precipuo della stima e benevolenza costanti di quel Principe degli Anatomici, e ch'ei per dottrina, riconoscenza, e culto fedelissimo anche alle ceneri dell' insigne maestro di meritare cotanto amore solo in morendo cessò. Noi di eloquenza e d' arte troppo digiuni di lui tesseremo le giuste lodi sulla semplice e spontanea orditura, che la serie ne fornisce degli avvenimenti nel chiaro ed operoso suo vivere.

Assai per tempo cominciò il Girardi a provocare la fama. In quella età, che suole d' ordinario intrattenersi nel meditare le opere altrui, sentissi egli il nobile ardimento, e la forza di produrre latinamente scritto l' opuscolo *dell' Uva Orsina* (1). In esso non trattasi per vero dire, che di comprovare colle sperienze e le osservazioni il consiglio dal Wan-Swieten dato al de Haen, nomi degni del cedro, di prescegliere il sugo dell' uva d' Orso a vincere la tormentosa e ostinata resistenza de' calcoli. Ma quanto di studio d'attenzion di fatica costar gli dovesse il tentare e seguire industriosamente i non pochi e non brevi sperimenti, ond' è il suo lavor corredato, ora unico il licore orsino, ora all' acqua di calce e ad altre sostanze misto adoperando, sperimenti contestati dal Ch. allora Professore di medicina pratica Giacopo Scovolo, solo nol veggion coloro, i quali ignorano, quanto di esattezza importi, di saggia pazienza, e di analitico criterio l' arte dello sperimentare, ampia, difficilissima, varia ognora ne' modi suoi a misura delle sempre nuove e inaspettate emergenze. Comecchè potesse codest' opera sembrare meno perfetta in se stessa, del che a tutt' altri si aspetta il giudicare, considerata però come il saggio del ben educato intelletto d' un giovine di pochi lustri certo dovette non lieve riputazione acquistargli.

---

(1) De uva Ursina, etc. Patavii, Typis Conzatti, 1764. in 8.°

Maggiore e molesta insieme celebrità procacciògli una *Lettera sul ritorno del vajuolo dopo l' innesto*, che in luce mandò al suo Morgagni indirizzata (2). Non poteva egli, seguace sì fido e sì tenero di tanto precettore, della inoculazione non sentire disfavorevolmente con lui, il quale, sebbene al celebre Tronchin, che di patrocinarla ardentemente pregato lo avea, per cotal modo facesse risposta da non parerle avverso totalmente, pure alla urbanità ed alla gentilezza più allora conceder si vide, che non all' intimo suo sentimento. Ciò stesso notò francamente, e sen fece scudo il Girardi, che da lui non fu mai, nè trattenuto dal pubblicarla, com' è da presumere, che per la molta autorità potuto avrebbe facilmente, nè smentito poscia giammai: onde non andrebbe troppo lungi dal vero chi sospettasse, essere stato ciò dal discepolo con intelligenza, e fors' anche per insinuazione del maestro, a tutta in faccia la medica repubblica asserito. Con tale e tanto animatore ben s' intende, com' egli dal caso avvenuto alla unica figlia del Fisico Francesco Berzi (cui di fasce uscita appena aveva il genitore inoculata nell' Aprile del 1758., e cui rivisitò poscia il vajuolo non senza minaccia ott' anni appresso nel mese medesimo) cogliesse il destro con alacrità di scrivere contro quell' innesto, intorno al quale sino a codesti ultim' anni, scopritori fortunatissimi e ben augurati del veramente innocuo *vaccino*, sembrò agli imparziali, che onta non si facesse alla ragione nè favorevole sostenendo nè contraria sentenza. Ma non è già lo

---

(2) Senza data veruna, in 8.°, pubblicata verosimilmente nel Maggio, o in quel torno, del 1766.

lo stesso degli animi da affetto d' opinione preoccupati, e quindi contro lui prontamente si mossero tre oppugnatori. Anonimo il primo pubblicò una lettera in Franzese, uno forse de' seguaci di Tronchin, se non egli stesso. Scopertamente, e in più nobil maniera però, l' altro, che fu il valoroso Valentino Marchetti di Pordenone, mandò fuori una stampa di forma anch' essa epistolare. In dubbio da entrambi si rivocarono la sussistenza e le circostanze del fatto, onde appoggiava suoi ragionamenti il Girardi. Arti segrete da ignote mani alla palese controversia si mescolarono nel tempo stesso; e a sparger di caligine oscuratrice il vero fogli mendaci contraddicenti si feron precorrere alle astutamente ritardate testimonianze del Pantaleoni e del Corradini Medici, e delle Religiose educatrici e custodi della fanciulla. All'apparir nondimeno di que' monumenti ammutoliron poi quanti, nè pochi erano, alla medica quistione la cabala aveano e il turpe raggiro frammisto. Più lento calò in arena, ma più accigliato e fiero, il Dott. Giovanni Bicetti de' Buttinoni da Treviglio, Scrittore per verità molto commendevole, da Esculapio e dalle Muse favoreggiato del pari. Tennesi egli dalla *Lettera* del Girardi come sfidato, egli che avendo l' anno innanzi fatte pubbliche in Milano le sue osservazioni sopra alcuni innesti di vajuolo, quella credette ad impugnarle diretta. Altero giustamente della immarcessibil corona di fiori poetici onde il sommo Parini per esse cinto lo avea, e quindi più irritato della censura, scelse a ministre della sua vendetta le Novelle Letterarie di Firenze: ma parve sventuratamente anzichè alla difesa de' proprj scritti abbandonarsi a troppo vivace impeto di sdegno perturbatore. Vergogna, e danno delle Scienze e delle Lettere, che l' ira e le ingiurie frammischiarsi veggan sovente all' amor della gloria, alla ricerca del vero, e disonorare quelle stesse contese, onde sperar poteano i per se pacifici Studj incremento.

Quanto di tranquillità perdè forse il Girardi in questa vicenda, altrettanto vi guadagnò certamente di estimazione e di rinomanza: che contro gli imbelli non degnan sorgere i forti; ed egli di tanti colpi bersaglio nella gagliarda tempra di sue armi fidando mestier non credette di rintuzzar neppure gli assalitori. A lui però delle sostenute molestie compenso di gran lunga sovra ogn'altro eminente fu la affezion del Morgagni, che come tenera così giusta crescer doveva col crescere de' merti suoi. L' amore e i suffragi di cotant' uomo, nel quale il dottissimo Zanotti non dubitò di raffigurare, e coll' aureo suo stile delineò la forma del Filosofo perfettissimo, avrian potuto consolarlo della non curanza e dell' obblio dell' universo, se in balia fosse di questo il resistere a sì alto giudizio, e stretto non venisse anzi a prezzar sommamente l' oggetto di sì autorevole commendazione. La morte seguita sul finire del 1768. del Ch. Conte Giambattista Covoli Adjutor sostituto alla Cattedra Anatomica di Padova adito aperse al Girardi di raccogliere un premio de' Studj suoi, di riconoscere qual grado ei tenea nella pubblica considerazione, e di sentir più vivi gli effetti della benevolenza, onde lo circondava l' immortal suo maestro, il quale su di lui determinò agevolmente il voto de' ben veggenti Riformatori, e nel libero seggio a se vicino e caro il ripose.

Chi degno riputavasi di supplire ad un Morgagni, di parlare in sua vece ad una moltitudine d' ingegnosi giovani, censori sempre difficili e severi, avvezzi ad udir profuso inesauribil tesoro di Medica e Anatomica non solo, ma onnigena Dottrina, ora ingentilita dai fiori della erudizion più recondita, ora avvalorata dalla più robusta eloquenza, chi tal riputavasi, e a tanto era prescelto, ben degno doveasi giudicare di moderar una cattedra ei solo. Il grido infatti del valor suo non tardò guari a procurargli codesto maggior onore, se pure del seder primo e solo maggior gloria non era l' essere al Morgagni secondo; e non tardò a procurarglielo in una allor rinascente Università intenta con politico e per ogni parte saggio avvedimento a richiamar sovra se stessa gli sguardi altrove rivolti della colta Italia, ed a ravvivare coll' opera d' uomini insigni le ottime discipline poco men che neglette e giacenti. A Parma allor rifiorente sotto gli auspicj d' un Genio fecondo, promotor generoso del bello dell' utile del grande d' ogni maniera, chiamati erano con pingue emolumento que' chiari ingegni, che a' nazionali congiunti le Scienze e le Lettere vi ristorarono sì felicemente. Poco appresso Vanini, Soave, Dodici, Pagnini, Cassina, in sul finire del 1769. vi si recò pure invitato il Girardi, e luce accrebbe a quella sceltissima corona, cui presiedevano fra più altri Riformatori, Schiattini, Rocci, Manara, e Paciaudi poscia, e Rezzonico. Bella, e veramente palladia corona! Per volger di tempo e di vicende mai non le vennero meno i valorosi, così nel Parmense nido, come sott' altro cielo cresciuti, soli bastando fra stranieri ad illustrarla con vario intervallo sopravvenuti Contini, Bina, Gherli, Capretta, Millot, Amoretti, de' Rossi, Giordani, e Cossali. Ascese allora il Girardi la cattedra di Medicina teorica; ma per corto spazio potè quivi esercitarsi, che l' aspettava un più nobile e proprio destino.

Se gli opuscoli per lo innanzi da lui pubblicati a quella cattedra il ferono opportuno estimare, la fama però non taceva del lungo attento studio, delle continue indagatrici sperienze, onde sul corpo umano colla scorta del Principe degli Anatomici erasi egli a dovizia della più arcana sottil dottrina fornito. Men raro incontrasi nella colta società il patologo osservatore, il cauto clinico, che non lo sperto notomista, perocchè di lungo tratto passò quel tempo, in cui bastar giudicavasi, cogli scritti del Mondino alla mano mostrare agli alunni quanto scoperse, o meglio conobbe quell' esimio splendor di Bologna, loro togliendo intanto la speranza e l' ardire a nuovi avanzamenti. L' arte salutare del cangiamento felice ringraziò la propizia sua sorte; ma dopo il Vesalio, il Falloppia, l' Eustachio, il Valsalva, l' Albino, il Redi, il Malpighi, e tanti altri fra noi di tal fatta investigatori acutissimi chi sollevandosi dal volgo degli incisori impugna con successo il coltello esploratore, ben può dirsi da Minerva protetto, e da Apollo. La Parmense Università della ventura profittar seppe sollecita, che nel Girardi presentavale un eccellente anatomico.

Della umanità quegli è più benemerito, che più sagrifica al vantaggio di essa. Fra i coltivatori però de' pacifici studj non vediam quale al Notomista contender possa la palma. Della utilità e presidio immenso, ch' ei le procaccia, altri più conscio ragioni. Noi non sapremmo essergli grati abbastanza anche per ciò solo, che alle naturali sensazioni dell' uomo civilizzato asprissima violenza far deve indispensabilmente, chi alla Notomia le sue vigilie ed i sudori consacra. Opera non può essere di pochi mesi superar la compassione, comune sopra noi medesimi rivolgimento, scuotere il ribrezzo, che ne risveglia pur vivacissimo la sola contemplazion de' sepolcri, vincere quell' orror sacro dalla infanzia ispiratone colla Religione verso gli estinti, e la vista affrontar de' cadaveri, e trattarli senza che il misto di tanti affetti, e lugubri immagini, e tristezza grave sorprendano la facilmente commossa e sbigottita fantasia. Ben tremar deve la destra, il cor palpitare, e ondeggiar l' animo fra terrore e pietade a colui, che sperando trar dalle aperte viscere esplorate qualche utile verità, osa la prima fiata in umano benchè esanime petto vibrare il ferro. Qual farassi egli allora, che il coltello ritiri e la mano tinta di sangue, e questo senta le vesti e il volto di fosco e gelido sprizzo bruttargli! E quando scossi per la forza del colpo i muscoli e i nervi ad ogni urto sì irritabili e pronti render sembrano a quel freddo busto la vita, lor rispondendo i moti delle schiuse palpebre e delle livide gote, in cui troppo facile e viva si dipinge del dolor la sembianza! Sospeso, confuso, rimarrà di se quasi ignaro; abbrividato fuggirà il truce spettacolo, che alla trepida mente della più immane crudeltà presenta la immagine; nè sopra torneravvi prima di avere con alto sforzo gli atterriti spiriti ricomposti. Se famigliarizzarsi può l' uomo con oggetti sì tetri, se l' abitudine vale ad affievolirne, e a pur nulla renderne la dapprima sì gagliarda impressione, non fia però chi neghi, codesta specie d' insensibilità solo per gradi lentissimi, ed a gran prezzo acquistarsi. Il bello amor del sapere, il nobil desío di giovare con quanta energia punger non denno ad animare un core, che a tanto costo i loro impulsi seconda? Fra i pochi, che della umanità meritar voglian cotanto, si fu il Girardi. Temperato egli dalla natura colla più gentile e fina dilicatezza potuto non avea nè adulto mai tutto vincere, e da se allontanare quel molesto ribrezzo, che sembra dell' arte indivisibil compagno: eppure dall' istante, in cui sedette Anatomico nella Parmense Università, parve da ogni altro studio, da ogni altra cura separarsi interamente, per quella sol vivere, per quella sola aver mano, occhi, mente. Con quanta precisione, dignità, e copia diffondesse dalla cattedra i non volgari suoi lumi, è più difficile a dirsi, che a lui non era il dispiegare e render agevoli e piane le più astruse dottrine. E testimonio ne fanno splendidissimo gli insigni discepoli nazionali e stranieri, che di sua scola usciron maestri; fra' quali ricordar non si può senza sospiro e lamento l' esimio (3) Gasparrotti, che di suo alunno divenuto successor suo meritissimo, sì rapido, e veramente immaturo discese a divider con esso l' inesorato silenzio della tomba. Quanto poi fosse il Girardi negli antichi e moderni di sua scienza discoprimenti versato, quanto di mano, e d' occhio industre e sicuro andasse a promoverne i ben augurati progressi, daranno argomento le non tenui opere, che di lui verrem rammentando.

Ma pria quell' avvenimento ne arresta, in cui reso a lui conosciamo l' onor più grande, che il merito sperare, la no-

---

(3) Delle lodi di Pietro Gasparrotti ha tessuta una bella Orazione latina il Ch. Tommasini Professore di Fisiologia nella R. Università di Parma, e la pubblicò nel Settembre 1800. in occasione della laurea Medica di Giuseppe Ferrari.

nobile ambizion sua bramar mai potesse , e in cui per disgustosa sperienza provò il suo cuore, come alla somma gioja il dolor sommo confina. Erasi egli nell' autunno del 1771. a cagion di visitare il suo Morgagni a Padova recato ; e ben il rivedere quel dolce venerando aspetto , l' udirne ancora la dotta voce , oracolo implorato ammirato seguito dalle più remote nazioni , esser premio poteva pur d' aspri disagi, e d' assai più lungo cammino. L' egregio Vecchio , degno che la natura a prò degli uomini sue leggi violasse oltre Nestorea età serbandolo , sentì a venir meno del faticato corpo le forze , e da men tenaci nodi avvinta già segretamente lanciavasi la sua grand' anima verso quel centro beato , a cui sempre mirò , meta e mercede ineffabile della virtù . Quello , che ancor gli restava d' affetto mortale , era a' suoi scritti rivolto , a que' scritti , intorno a' quali tanto spese di vigilie e di meditazione , e ch' egli in meritevoli e fide mani bramava riporre . A lui non mancava in vero diletta e saggia prole, di quel retaggio forse più che d' ogn' altro sollecita , tra la qual si distinse con fama di valor nelle lettere l' ora non più tra i vivi Antonio Morgagni delizia del Parnaso , che dolcemente sorpreso l' udia senza il prestigio fallace , e insiem moltiplice presidio del canto eleganti versi sopra qualunque leggiadro soggetto estemporaneo e prontissimo declamare . A lui non mancavan discepoli , non mancavano amici ingegnosissimi , che chiari si resero , e splendono tuttavia nelle facoltà medesime da quelli aurei scritti trattate . Egli però quel tesoro preziosissimo d' immensa dottrina , quattordici volumi ben compilati di osservazioni , in gran parte sulla Notomia, sui più insigni Scrittori di essa , e sugli illustratori specialmente delle tavole Eustachiane, e in parte di mediche consultazioni e di storiche notizie gli atti risguardanti del Padovano Liceo opere tutte inedite , in più pregiato e caro luogo non seppe, che presso il suo Girardi collocare ; e all' inestimabile dono la promessa aggiunse di altre carte importanti, che in breve proponevasi di ordinare .

Così Socrate anch' esso tra i molti discepoli, che faceangli corona, prima di portare al labbro la non meritata cicuta girando il tranquillo sguardo penetratore sul più saggio e più diletto il rattenne, e a dargli invidiato pegno d'alta fiducia alla sua generosa tutela i proprii figli commise. Con qual senso però d'affettuosa riconoscenza da lui si congedasse il così distinto alunno, come altero di tanto acquisto e lieto della speranza di aumentarlo a Parma facesse ritorno, esprimer potealo egli solo, che di eloquenza non povero pur sovente con noi si dolse del mancargli parole alla mescolanza e vivace tumulto degli affetti, onde allor fu agitato, rispondenti. Oh che stato sarebbe del tenero e grato animo suo se prevedute avesse le imminenti sciagure! Segnata degli ultimi di Novembre dell' anno medesimo giunse ancora una lettera del Morgagni a rallegrarlo colla sicurezza, che d'altri quattro volumi già ordinati e raccolti presto sarebbe arricchito. Ohimè! Le estreme linee eran quelle a lui vergate dalla incomparabil destra e sì cara. Di suo gelo funereo la rapprese ben tosto colei, che cieca al pari della fortuna al valor non perdona, colpisce, e passa. Gli animi a gentilezza formati, che sanno con che tenace dolcezza leghi e distringa il doppio nodo d'amicizia e di gratitudine, soli comprender ponno tutta la acerbità del rammarico, onde percosso il Girardi rapita sentissi la metà miglior di se stesso, e rimaner gli parve benchè cinto dalla benevolenza di molti, deserto e solo. Lo smarrirsi poi, per arte fosse o per caso, di quel resto di scritti immortali, che a sì buon diritto appartenergli dovea, che nè per uffizj d'onesti amici, nè per diligente indagine ed insistenza, nè infine per oro non potè rivendicare giammai, concorse ad accrescergli il peso di tanta giattura, e oppresso a lungo il ritenne dal cupo sentimento della propria infelicità, dinanzi al quale la rosa d'Aprile discolora, del Sol la luce s'infosca, e molesta diviene ogni idea di piacere.

Poichè la ragione e il tempo alfine esercitarono il benefico loro impero, e disnebbiato l'animo gli si scosse dal letargo non insoave della tristezza, tutte le forze ei rivolse della robusta sua mente a mostrarsi sempre più degno de' ricevuti onori, ed a guadagnarsi ancor più chiara nel ceto letterario considerazione, riconoscendo in tal guisa di piacer meglio, che con vane lagrime e con inerte mestizia a quel beato spirito del suo Morgagni. Ritornò pertanto all' insigne ed arduo lavoro, che fra mani avea da più anni, alla *Illustrazione delle Tavole di Gian Domenico Santorini*, la compiè nella lingua universale dei dotti, e la mandò in luce, opera prestando i torchj della famosa Parmense Tipografia (4). Erano state quelle tavole dal rinomato Autor loro formate coll' intendimento non meno di confermare alcune sentenze, le quali ne' scritti suoi pria pubblicati tutta non ottennero la desiderata approvazione, che di portare ad altri più corretta esattezza, nuove scoperte aggiugnendovi e nuove osservazioni; ond' è, che tutta quasi, o certo la più arcana storia contengono, e la disquisizione più fina del corpo umano. La celebre matita del Piazzetta delineate, e il dilicato bulino incise aveale di Fiorenza Marcella. La morte, che tronca spesso i più utili ed onorati disegni, arrestò il Santorini sul cominciar della necessaria e a lui facile spiegazione, e quelle giacer fè lungamente ignorate. Dalla ingiusta oscurità s' accingeva a sottrarle il già memorato Conte Covoli con forze uguali a sì bella intrapresa; ma concepito n' ebbe appena il pensiero, che lanciato immaturo ei pur nel sepolcro lasciar dovette al suo Successore Girardi anche il vantaggio di ripigliare ed a felice fine condurre sì alto divisamento. Se la illustrazione delle tavole Eustachiane tanto valse di gloria al Lancisi, all' Albino, e a molti altri, quanto più non ne meritarono al loro Illustratore quelle del Santorini cotanto diligente e minuto nel separare e distinguere le parti più esigue all' occhio sfuggenti, che però chieder

---

(4) Nel 1775.

der sembrano a spiegarle una quasi divinazione, e non contendono in fatti al lavoro sovr' esse sudato il marchio e il pregio di originalità? Il confronto continuo d' analoghi sperimenti, la osservazione più meditata delle opere già divolgate, non che de' metodi Santoriniani, ed il consiglio con rara generosità invocato de' più sperti Notomisti portarono quest' opera a tanta perfezione, che autorità e fama potranno venirle meno allor solo, quando la misera Italia ritorni alla barbarie delle Vandaliche età. Ma il farne sentir tutto il pregio è cosa troppo più che da noi, e l' altissimo conto in che tutti la tengono i dotti, ne assolve dal pericolo di farne più distesamente parola. Solo pur coloro, che sdegnano, e ben giustamente, il sapere dalle virtù morali discompagnato, non taceranno come il Girardi nimico di bassa usurpazione tutti notò con religiosa fede i frammenti del Santorini e del Covoli, che opportuni al suo oggetto propizia ventura aveagli posti sott' occhio, e come veruna sfuggirgli occasion non permise di dare ambito e libero sfogo al sempre tenero e riconoscente animo suo verso il Morgagni, col vendicarne le sentenze ed i ritrovamenti: nel che fare il suo stile si rialza, si anima, si sublima, il calore e l' entusiasmo se ne trasfonde ne' leggitori, e fa vivamente conoscere lo scrittor penetrato e pieno del suo soggetto. Dietro le tavole del Santorini due ne mandò formate dal Covoli stesso, e due proprie, (delle quali ultime avremo fra poco a risovvenirci); e diè così pure a vedere, quanto generoso fosse il suo cuore, scevro da bassa invidia e da vile temenza di rimanersi dal merito d' un giovine condiscepolo oscurato; per la qual cosa a lui la storia della Anatomia concede il vanto d' essere stato il primo a prendersi con disinteressato zelo la cura d' involare all' obblio, illustrare, e render pubbliche le fatiche di un contemporaneo.

Accade non rare volte, che dopo una grandiosa produzione volontario a se stessi impongan silenzio i valentuomini, o perchè sentano lo stanco ingegno di non dissimili parti ricusar la fatica, e timore li affreni di riuscire alla acquistata fama inferiori, o perchè godano riposar sù que' lauri, che ad onorato letto di pace lor profuse la gloria. Il genio operoso istancabile del Girardi a sempre nuovi tentativi anelando chetar non seppe giammai. In mezzo alle cure della cattedra rese più gravi dalla assistenza, cui prèstar doveva alla formazione del gabinetto anatomico per suo saggio eccitamento cominciato, in mezzo ai doveri, che gli imponevano i nuovi onori in lui cumulati di Professore di storia naturale, e di Prefetto del Museo di naturali rarità, in mezzo alle private istruzioni, ond' era agli ingegnosi prediletti alunni cortese e largo, in mezzo agli spasimi, che in ancor fresca età lo assalirono tregua concedendogli non frequente, di quella pertinace malattia, che all' uomo appigliatasi mani e piedi ne inceppa, ferma di accompagnarlo sino al feretro, e insidiosa pugnando tace ne' spiegati furori, schernisce il medico vergognoso impossente, è incredibile a dirsi, quant' egli meditò, quant' egli a pieno eseguimento condusse. Possentissimo stimolo a spinger l' ali del rapido intelletto a' voli novelli, e mercede insieme dell' affrontar nuove fatiche il vanto gli fu di sentirsi ascritto a questa Società Italiana. Già quello godea d' essere addetto alla Accademia dell' Istituto di Bologna; nè guari tardarono a chiamarlo al lor seno la Reale di Madrid, e la Cesareo-Leopoldina de' Curiosi della natura; e tali fregi, che appagar ben poteano la meno moderata ambizione, furono al cuor suo generoso altrettanti sproni a belle intraprese; ma quando la Nazion nostra, per sì nobile ed autorevol modo rappresentata dall' accademico collegamento di primarj Scienziati d' ogni sua provincia, il distinse cotanto da fissare in lui lo sguardo per collocarlo tra quelli, ond' ella trae lustro maggiore, e dirgli parve col sorriso animatore della fiducia, quanto aspettava, quanto si prometteva da lui, l' ardore di risponder coll' opera a sì glorioso invito tutto divampando lo invase.

Primo frutto, di ch' egli con sì bell'ardore gli atti arricchì della Italiana Società, il *Saggio si fù di osservazioni anatomiche intorno agli organi della respirazion degli uccelli* indirizzato all' egregio Vincenzo Malacarne. Poco ben poco era quello, che in sì ampio e difficil soggetto avea tentato il celeberrimo Giovanni Hunter, più quasi per aizzare il desiderio, che per appagare la sempre utile curiosità degli investigatori. Assai più nella scabrosa ricerca innoltrò il Girardi, espertissimo anche nella Notomia comparata, di codesti organi indagando la differenza tra gli altri animali e gli uccelli, e la varietà pure, che incontrasi così tra le diverse, come in una sola talvolta e medesima specie di questi. Ma tacciati a buon dritto saremmo di temeraria superfluità, se con pochi osassimo imperfetti cenni additar ciò, di che meglio per se medesimi posson chiarirsi i posseditori di queste Memorie (5), nelle quali lo stesso Malacarne si è poi compiaciuto di venir colle acute sue indagini confermando codesto lavor del Girardi. Basterà parimente indicare l' altro *Saggio* di lui inseritovi *di osservazioni anatomiche*, *intorno agli organi elettrici della Torpedine* diretto al Ch. Walter in Berlino Professore di Notomia (6). E di egualmente rapida indicazione saremo contenti circa le *Osservazioni e Riflessioni sulla tonaca vaginal del testicolo*, che vi s' incontrano intitolate all' esimio Felice Fontana (7). Se ad intrattenercene alquanto più non ne stringesse la controversia, ch' indi ne nacque, e a cui par veramente, ch' egli stesso il Girardi si compiacesse di prestar occasione.

Fin da quando mandate aveva egli in luce le tavole del Santorini, nella illustrazione della XVI. trattando dell' or or riferito argomento, credette dover discostarsi dalla opinione del lodatissimo Hunter; e la propria sentenza propose poscia direttamente nella seconda delle accennate due tavole ivi da lui aggiunte, appoggiandola a sperimenti istituiti sui feti, ne' ne' quali più manifestamente si scorge la discussa origine di quella membrana. Era egli così persuaso della giustezza di sue osservazioni, cotanto era pieno della lusinghevolissima idea d' aver messa in chiaro la verità, unico spesso e sublime sempre guiderdone delle meditazioni dei dotti, che sostener non seppe senza fremito d' impazienza il dissenso dal Ch. Brugnoni palesato nelle Memorie della Accademia delle Scienze di Torino per gli anni 1784. e 1785: e insieme ad ingiuria recossi il silenzio del celebre Caldani, il quale nella terza edizione italiana delle sue Istituzioni Fisiologiche nè un cenno di lui facendo commendato avea nel proposito il Palletta. Dunque la gelosia, quel verme rodente, che porta co'suoi morsi la misera ragion degli amanti a facile sconvolgimento, quel mostro moltiforme, che non si scompagna giammai dalla ambizion dominatrice delle corti, osa pur anco sull' orme del bel desìo di gloria i passi movere tacito insidioso, e il suo veleno diffondere tra i seguaci pur essi di Pallade? Oh letteraria Repubblica! Non sia però chi creda da geloso senso il Girardi animato così, che non anzi riconoscer si debbano da nobile ed onorato impulso per gran parte eccitati i lamenti da lui perciò espressi in codesta sua dissertazione. Già il Palletta, di molta in vero commendazione degnissimo, che avea nel soggetto medesimo un Opuscol suo pubblicato, e i trovati del Parmense Anatomico ignorando, l'onore a lui per essi dovuto arrogavasi, poichè fu certo di essere in que' discoprimenti prevenuto, agli uffizj era sceso di generosa escusazione, la ingenua promessa aggiugnendovi di purgarsi tosto, che il destro gliene venisse, della apparente usurpazione. Ma l' amore pel suo Morgagni, a cui lungo volger di tempo ne' dramma non aveva scemata, l' ardente desiderio di serbarne religiosamente illese le dottrine, e rispettate le scoperte, gravemente increscer faceagli altresì, che il valorosissimo Caldani riprodotte avesse contro il medesimo alquante sue note già nell' illustrare la XV. tavola Santoriniana confutate. Era questo il sentimento, che il cuor gli agitava, e moveva l'ultrice però risentita sua penna: e non crediam fermamente, che il Padovano Professore d'animo egualmente grande che di sapere, comecchè d' alcuna molestia gli fossero codeste rinnovate querele e censure, avrà nondimeno la forza ammirata di quel tenerissimo riconoscente affetto, che ben si ravvisa ispirator precipuo del Girardi. Così pertanto mirava questi a vibrar in uno più colpi, benchè la intitolazione dell' opuscolo un solo scopo sembri ferire. Ed ecco di poche faville accesa gran fiamma. Un Alunno della Accademia di Padova, il Dottor Pier-Antonio Bondioli, si fece ben tosto a rintuzzarlo con una *Lettera* indirizzata al Ch. Francesco Aglietti della Accademia medesima corrispondente *sulle vaginali del testicolo, e sull' epoca di alcune scoperte anatomiche*, in cui, discepol valente e fido, niuna senza schermo non lasciò delle offese al suo Maestro tentate. Ma siccome nò al Caldani, così nè al Girardi mancavano gli ingegnosi allievi, che per lui discendessero in campo. A render vane l' arti di quello schermitore avanzossi Enrico Callovd (ahi giovine sventurato, cui troppo presto si oppose la morte nel ben impreso cammin del sapere!) con altra *Lettera* diretta al dotto, ed or celebrato Professor Clinico di Parma Pietro Rubini; e tanto in essa mostrò di valore, che non potè il Bondioli esimersi dal replicargli con un libricciuolo intitolato *sul numero delle vaginali del testicolo esame anatomico relativo alle dottrine del Girardi sullo stesso argomento*. Che se di quella *Lettera* parve altrimenti al pseudonimo Fabio Massimo Ursino, il quale dal capricciosamente immaginato paese di Novantuno fè uscire in luce contro di essa un fogliuzzo, della costui disapprovazione non altro diremo se non, che augurargli la sorte di rimaner sempre incognito si compiacque per fino un altro avversario del Girardi. Desso è Giovanni Tumiati Professore e Lettore straordinario di Anatomia nella Università di Ferrara, il quale delle sue *Ricerche intorno alle tonache de' testicoli* la sedicesima ed ultima consecrò ad esaminare la riferita controversia, ed a rifiutare colle ragioni accennate dal Bondioli, e con altre sue proprie la già tanto oppugnata sentenza. Ma più il Girardi nè per interposta persona non si mosse a sostenerla. Forsecchè il voto di molti valentuomini lo affidava della vittoria? E stranieri e nazionali, co' splendidi nomi de' quali ben potremmo coronar questo racconto, concorsero ad assicurarnelo. Ma . . . . Oh Verità! Perchè ti stai sì difficile e ritrosa alle investigazioni? Ohimè che per caldo e lungo disputare rado è chi ti raggiunga, e di te si bei! Nè si può ben dire fra concitati disputatori, che spesso nell' ardor del contendere obbliano la proposta meta, quale della sospirata palma si fregi, o colui, ch' ultimo parla, o colui, che primo si tace. Nè io vorrei, o santa Verità, così mi accende la tua purissima bellezza, così mi sei sacra, che con simulato amor di te combattendo i mortali, tanto poi concedessero all' ira e all' orgoglio da sdegnar per fino di essere scopertamente tuoi zelatori. Deh accogli l' ingenua mia prece, il velo squarcia che ti nasconde, mostrati qual sei cosa tutta divina, e di te gli umani cori infiammati cessino al fine le troppo frequenti profanazioni!

---

(5) Tom. II. Parte. II. (6) Tom. III. (7) Tom. IV.

A codeste Dissertazioni, che gli atti adornano della Italiana Società, e l' occhio esperto ed acuto, la mano maestra, l' impero in somma appalesano del Girardi nella provincia Anatomica, degnissima di andar compagna si è quella *della origine del Nervo Intercostale* intitolata. È da gran tempo, che il testè memorato Felice Fontana intesi aveva i nobilissimi studj suoi al pieno conoscimento di quella arcana parte della umana struttura; e certo il seguirne tutti i rigirevoli avvolgimenti maravigliosi contribuir potrebbe non poco alla spiegazione di più ardui fenomeni. Il Girardi con tale opuscolo latinamente dettato, e perciò solo, che servir dovesse di proemio al ricominciamento di sue Lezioni, anticipar volle agli amatori il piacere di alcune scoperte in tale soggetto da quell' illustre amico comunicategli, e le venne via via co' proprii sperimenti confermando. Il Chiarissimo Anatomico di Firenze, lieto insieme e grato della considerazione, onde onorato lo aveva sì dotto, e non invido rivale, fatto volle di pubblica ragione il bel lavoro in Firenze (8). Inclita gara d' uffizj, che dubbio lascia, quale dei due sia più generoso? Ammirevol gareggiamento, troppo, raro a nascere, e solo, che sia degno d' animi letterati! Ampia mercede fu poi della comun loro generosità il veder quella Dissertazione pressocchè traslatata in franzese con un accurato e pinguissimo estratto, che il celebre Rozier non fu lento a darne nel suo famigerato giornal di Fisica (9).

Altre opere avremmo dovuto assai prima del Girardi ricordare, le sue latine *Orazioni*, delle quali parecchie furono impresse, molte rimangono inedite, alcune augurali degli studj, le più encomiastiche di que' valorosi, che all' onore ei promoveva del filosofico e medico alloro. Ma in questa, ch' altri dirà forse pienissima luce delle belle lettere, fra tanti vantati coltivatori della flessanime eloquenza, oserem noi porlo in ischiera cogli Oratori? Ben però confidiam di potere senza oltraggio del vero asserire, che se la naturale attitudine ed inclinazione stata in lui fosse da giovenil cultura meglio assecondata, se sollecito pur, com' era, della sostanza e midollo delle cose alquanto più avesse insieme acconsentito alla vaghezza degli adornamenti, riuscito sarebbe agevolmente a pochi secondo, quantunque la medicina sovra tutte forse le Scienze altera vada di più eleganti ed animati Scrittori. Infatti nella lingua del Lazio, in cui per la indole di sua letteraria educazione versò più lungamente, il suo stile non lascia desiderare nè precisione nè robustezza nè venustà al genere trattato giudiziosamente accomodate. Di quell' una fra le sue Orazioni, cui *delle cose Anatomiche* intitolò, e fè correre in luce di copiose note con cinque tavole arricchita (10), più contento egli parve, e seguillo il pubbliblico voto: che il cogliere ad un tempo e frutti e fiori gli è quello, di che si appaga anche la più avida aspettazione. In codeste note raffermò egli di sue sperienze i trovati del Falloppia e dell' Albino sul modo del rinascere i denti; trattò la quistione suscitatasi pel preteso Ermafrodito, e veramente singolar fenomeno, Michele - Anna Droüart di Parigi, in cui prevalere il femminil sesso dimostra contro il Morande, e le cagioni accenna dell' abbaglio preso da quell' illustre Franzese; riferì con proprio sperimento, ond' ebbe ad argomentare come fosse avvenuto, che il celeberrimo Haller in proposito de' vasi lattiferi delle mammelle tenuta avesse quella sentenza gia da esso Girardi e dal Conte Covoli dietro le tavole Santoriniane rifiutata; e in fine sopra le virtù dell' uva orsina tornò a recare suoi nuovi tentativi dall' esito favoriti: con che da lui dato allora si vide alla ragion medica l'estremo addio.

---

(8) Nel 1791.

(9) Nel mese di Settembre del 1792.

(10) Nel 1781. dalla R. Stamperia di Parma.

Le meditanti vigilie, le moltiplici fatiche, i spessi ed acuti dolori della podagra aveano sul Girardi così aggravato il lor peso, che gli ultimi anni di sua vita furono un tessuto poco men che continuo di travagli e di infermità. Con queste ben lottava l' energico e ancor gagliardo suo spirito, e profittava prontissimo d' ogni men tormentoso intervallo. Sorto era nell' animo del grande Spallanzani quel suo sospetto d' un nuovo senso in alcune specie di Pipistrelli, i quali sebbene accecati eseguivano puntualmente col volo tutti que' riflessivi movimenti, che da loro si fanno quando sono veggenti, e che eseguir non si possono da altri volanti Animali, se non se colla scorta dell' occhio: e l' Anatomico di Parma da lui invitato a secondare la curiosa ricerca, col suo perito e diligente coltello riconobbe in que' volatori una intenzione e squisitezza di udito maggiore che negli altri animali anche più perfetti; lo che spose in una ben ordita *Dissertazione*. Ad altra, e forse più utile disquisizione attese egli pure, e ne resta monumento nelle sue *Osservazioni risguardanti le uova delle Pollanche, e gli organi inservienti alla generazione* *ne' Galli e nelle Galline;* ove si procura il disinganno di que' tanti, che coll' usitato mutilar d'esse Pollanche impedir ne credono la fecondazione, e ottenerne la ambita dagli ingordi palati maggior pinguedine e più saporosa dilicatezza. Ma codesti lavori, non per anche fatti di comun diritto colle stampe, sebbene portino la chiara impronta delle produzioni maturate da una mente tranquilla, non erano in fine, che industri e coraggiosi sforzi d' un instancabile amor di sapere e di gloria dagli ostacoli invan combattuto, erano sforzi che forse la gravissima giattura affrettarono della Scienza Anatomica e della Parmense Università.

Michele Girardi chiuse gli utili ed onorati suoi giorni nel decimosettimo di Giugno del 1797. fra i doveri di Religione, che sempre ebbe in cuore purissima, con sincero zelo adempiuti, e fra diverse liberalità compartite alla più tenera e distinta amicizia; non ultimi fregi, onde a buon dritto si corona il suo elogio. Ora dappoi che il benedetto suo spirito spiegato ebbe il volo per ricongiugnersi a quello del suo Morgagni, diremo noi colla frase ad onor degli estinti sì spesso usurpata, ch' egli lasciò in terra di se desiderio? Pochi ma candidi voti di qualche anima gentile e rara bastano veramente a giustificare la per lo più iperbolica espressione; e certo il Girardi e per valore d' ingegno e per morali virtù codesti candidi voti si meritò grandemente. Ma gli uomini sono eglino poi giusti, come dovrebbono, al merito retributori? L' amorevol sorriso, gli applausi della moltitudine, onde taluno è vivendo circondato, sono augurio ben fallace di ciò, ch' egli deve dopo morte dalla umana razza aspettarsi. Sul cadevere pur dell'uom benemerito più presto ancorchè la tomba i cuori si chiudono ad ogni sentimento. Appena un languido moto di fuggevole riconoscenza quasi involontario spuntando sul labbro de' leggitori onora talvolta le opere di lui, che logorò se stesso per lume e vantaggio della ingrata e cieca umanità.

ELO-

ELOGIO

DI LAZARO SPALLANZANI

SCRITTO

Da Angelo Fabroni

Ricevuto il dì 29. *Giugno* 1801.

Un uomo, che a giudizio di quel medesimo, il quale poteva gareggiare con lui nella cognizione del vastissimo regno della storia naturale (1) fece più scoperte nel giro di pochi anni, che Accademie intere in un mezzo secolo, meriterebbe ben' altro che il tributo di un elogio, che noi siam soliti di pagare a tutti quelli, che onorarono i fasti della nostra Società. Tutte le opere sue possono dirsi perfetti modelli dell' arte di osservare, tutte presentano una vera logica in azione, tutte mostrano l' osservatore instancabile, il profondo filosofo, l' elegante scrittore il vero naturalista. Lazaro fu il nome di lui, Scandiano la patria nobile terra del Modanese, ove nacque il dì 12. di Gennajo dell' anno 1729. da onesta famiglia, e da onorati genitori Gian-Nicola Spallanzani, e Lucia Ziliani di Colorno. Ebbe dalla vicina città di Reggio i primi rudimenti delle lettere umane, e della filosofia, ma Bologna potè gloriarsi d' avergli mostrato quel campo, in cui doveva correre con tanta sua gloria. Non curando i desiderj del padre, che lo destinavano a quella scienza da lui inutilmente professata, e che è reputata la più lucrosa, colpa e vergogna dell' umana cupidigia, che non vede in essa se non se il mezzo di conservare il proprio, e di acquistare l' altrui, coltivò le lettere Greche Latine ed

---

(1) Bonnet Lettr. sur div. sujets d' Hist. nat. Lettr. XLII.

Italiane, si applicò alle matematiche sotto la scorta del rinomato P. Balassi Canonico Regolare, e profittò del doppio vincolo d' amicizia e di parentela, che lo legava alla tanto celebrata Laura Bassi per esercitarsi in ogni maniera di fisiche esperienze. Frequentò ancora quant' altri vi erano celebri Professori delle scienze naturali senza trascurare quella disciplina, che dà il secreto de' metodi, e che dirige lo spirito umano per le vie le più corte verso le reali ed utili scoperte, svelando il meccanismo delle nostre facoltà, delle nostre sensazioni e delle nostre idee, e così si fece ricco di tanto corredo di dottrina da meritare, ricevuta ch' ebbe la laurea dottorale, la cattedra di matematica e di filosofia nel Ginnasio di Reggio, e quella di lettere Greche nel Collegio novellamente fondato per l' istruzione di que' giovani, che il nobil corso intraprendevano delle scienze. Per dare un saggio del suo valore in quelle, prese a censurare la traduzion d' Omero fatta da Anton Maria Salvini, la quale se non mostra le maravigliose poetiche bellezze di quel primo dipintore delle memorie antiche, specialmente in quel che appartiene alla grandezza, alla nobiltà, ed all' armonia della dizione, in cui non ebbe eguali, e a quelle immagini piene di vita ed espressione, con cui nobilitò non solo i grandi, ma anche i piccoli oggetti, ha però il merito di aver saputo trovare nei tesori del nostro Toscano linguaggio, il più idoneo tra tutti i moderni a ricevere le forme Greche, parole e frasi così corrispondenti all' originale, da non potersi fare un simil lavoro se non da chi era sovrano maestro nell' una e nell' altra lingua. Questa è la sola opera di lettere umane data in luce dallo Spallanzani, quantunque le amasse con trasporto, e ne gustasse il bello ed il buono, e non cessasse mai di coltivarle. Ben lo dimostrano i suoi scritti filosofici, tinti d' erudizione e di eleganza del bene e correttamente parlare, ed avvene alcuno, come *il Prodromo di un' opera da imprimersi sopra le Riproduzioni animali*, che può servir di modello a quelli, che procurano di far più bella la filosofia col soccorso delle lettere umane. Scopritore e dimostratore di verità nuove non perdè mai di vista di unire al metodo di formare idee giuste l' arte di esprimerle con precisione e con chiarezza, e di ornarle tal volta colla bellezza delle immagini, colla sublimità dei sentimenti e colla magnificenza dell' espressioni. La lettura dei Poeti servivagli a riscaldare l' immaginazione raffreddata dalle ricerche le più faticose e le più minute; e allora parlava della natura e delle sue ricchezze con una specie d' entusiasmo, e con una rapidità maravigliosa senza però mai oltrepassare con esagerazioni i confini del vero e del naturale.

Quelle riproduzioni, e tutto ciò, che appartiene all' oscurissimo mistero della generazione, fecero il principal soggetto delle occupazioni e delle ricerche del nostro Filosofo, che può somigliarsi ad un Prometeo, tanta fu la luce, che sparse su tutto il regno animale. Non vi è scritto di lui, il quale non mostri l' Osservatore, che vittoriosamente combatte colla natura, e che sa produrre i medesimi effetti, ch' ella opera, da che fu creata, coprendo però di un velo fino a' giorni nostri impenetrabile i mezzi, de' quali si serve. Mediante l'accuratezza delle sue imitazioni lo Spallanzani prova la solidità delle proprie scoperte, e mostra le verità, che insegna, sottoponendo ai sensi gli elementi delle sue dimostrazioni. Per questa via sparirono i più brillanti sistemi, e conveniva direttamente confutare quelli del Needham e del Buffon, che per la celebrità de' loro autori avevano più seguaci, e più strepito facevano nelle Scuole. Alla Dissertazione, che può riguardarsi come una disfida di battaglia, e che pubblicò nell' anno 1765. ve ne unì un' altra scritta in idioma latino, con cui procura di rendere ragione del risalir le pietruzze, che si scagliano obbliquamente sopra l' acqua. Questa Dissertazione è un bel monumento della sua gratitudine verso la sua maestra Laura Bassi, a cui è dedicata, della sua eleganza nell' adoperar la lingua dal Lazio, e del suo acume nel conoscere le prime mutazioni che produce nel liquido il mobile che lo percuote. Non era allora, come lo è in adesso, dimostrata l'elasticità dell'acqua e in mancanza di questa cognizione non sospettò che questa proprietà influisca direttamente sul fenomeno di cui si tratta. Si limitò pertanto a considerarlo come il prodotto necessario del cambiamento di direzione, che dee provare il mobile quando vince la piccola curva, che ha descritta nel seno dell' acqua in virtù del primo suo sforzo. Parlando poi lo Spallanzani a quelli, che all' arte di osservare accoppian quella di combinare, e a cui bastano pochi dati per fare molto viaggio, poteva lusingarsi di avere ottenuto il suo intento con la prima fra le or nominate Dissertazioni, la quale poi convertì con giunte in una prolusione Accademica scritta latinamente, e recitata cinqu' anni dopo in Pavia. Ma non togliendo egli mai gli occhi dal gran libro della natura per iscoprire nuovi fatti, e per dirigerli tutti verso il medesimo fine coll' analisi la più profonda, onde ognuno fosse forzato di trarne le medesime conseguenze, si trovò ricco di tante osservazioni da annunziare nel Prodromo ricordato di sopra la pubblicazione di un' opera grande, che di gran lunga avanzasse i tentativi del Reaumur sopra la riproduzione delle gambe de' Granchj, del Trembley su quella delle parti divise nei Polipi, e del Bonnet su quella de' vermi acquatici e terrestri. Se non eseguì separatamente quel che aveva annunziato, trattò però con sufficiente copia d'osservazioni quest' argomento delle riproduzioni negli opuscoli di Fisica animale e vegetabile, pubblicati in Modena l' anno 1776. Ma prima di parlare di quest' opera immortale, e in ogni sua parte maravigliosa, l' ordine del tempo ci obbliga di riferir l' altra, che manifesta i fenomeni della circolazione osservata nel giro de' vasi, i fenomeni della circolazione languente, i moti del sangue indipendenti dall' azione del cuore, e del pulsar dell' arterie.

Non si è potuto mai decidere una question fisiologica, nè stabilire con sicurezza una verità senza il soccorso dell' esperienza ; assioma, che niun più conobbe dello Spallanzani, e che gli servì di guida in tutte le sue laboriose investigazioni. Rivolse queste in principio alla Salamandra acquajola, poi alle Ranocchie abitatrici nell' acqua e negli alberi, alle Lucerte ed ai Ramarri, e dubitando saggiamente dell' argomento d' analogia dagli Animali freddi ai caldi, per la ragione, che in quelli dopo ancora la separazione dal commercio de' nervi del cervello e del cuore, per qualche tempo continua la vita senza nutrimento, e si restituisce il moto soppresso, con altre simili differenze dai caldi, col soccorso di una macchina microscopica inventata dal Signor Lyonet gli riuscì felicemente di vedere all' immediato ed aperto lume del Sole la circolazione del sangue per tutti i vasi venosi ed arteriosi nell' uovo covato, e l' uniformità dell' operazione della natura sì negli uni, come negli altri Animali. Sono minutissimi, e di somma importanza i dettagli di quel che opera il cuore, unico motore della massa sanguigna, nel dilatarsi e nel costringersi per iscemare, o per accrescere il moto del sangue, e per provare contro l' opinione dell' Haller, che non giunge mai a vuotarsi interamente del sangue nella sua contrazione; come si rallenti e si estingua la circolazione; come questa si conservi in quella stessa quantità e direzione di moto, che ha acquistata il sangue, quando dal tronco delle arterie passa nei rami, vincendo gli ostacoli degli angoli, delle curvature, e delle tortuosità sì naturali, che artificiali; quanto a questo moto contribuisca l' irritabilità delle arterie medesime, che nello stesso Animale non sempre si dilatano in ragione del proprio diametro; quanto sieno mal sicure le leggi idrauliche, che mossero i Fisici ad ammettere la forza di derivazione; e finalmente, per tacere d' infinite altre cose, tutte provate con una serie d' esperienze, che sciolgono questioni, dissipano dubbj, e mostrano verità costanti, quanto sieno diversi i fenomeni, che si osservano negli Animali, ai quali sia stato reciso il cuore, da quelli, a cui sia stato tolto il cervello, restando nei primi vivacità e moto per alcun tempo, ma brevissima vita, nei secondi sopore, immobilità, ed un viver più lungo. Si dia pur la debita lode all' Haller per le osservazioni sulla formazione del Pulcino nell' uovo, che fanno la maraviglia de' naturalisti per l' assiduità, pazienza, e diligenza, con cui l' ha eseguite, per la precisione ed esattezza, che vi ha recato, pel genio e per le vedute, con cui ha saputo renderle feconde, e per le luminose conseguenze e sode verità, con cui ha arricchita la Fisiologia, ma si convenga altresì, che dalla stessa sorgente ha saputo lo Spallanzani attingere tanta copia di novità da divenire anch' egli originale, e il primo ritrovatore di quell' anello, che gli Animali di frigida costituzione con quelli di calida congiunge. Parlando di quest' opera il Bonnet, dice di maravigliarsi come l' Autore abbia saputo vittoriosamente distruggere tanti errori, e stabilire tante verità, dandogli specialmente la lode di avere il primo dimostrato, che l' impulsione del cuore si fa sentire fino all' ingresso del sangue nelle vene, che il moto d' esso non si rallenta nell' estremità delle arterie, come credevano i Fisiologisti tutti, che la sola forza impulsiva debbesi ripetere dal cuore medesimo, senza dar luogo a potenza, o potenze ausiliarie, e che i cambiamenti del color del sangue di giallo in rossiccio, e poi in rosso non sono che mere apparenze, ed ottiche illusioni (1).

---

(1) Vedi la lettera del Bonnet allo Spallanzani alla pag. 255. del libro intitolato: *Experiences pour servir à l'Histoire de la generation des Animaux et des plantes par M. l'Abbè Spallanzani : Geneve* 1785. Anche l' Haller accordò la lode dovuta al nostro Autore per tante e sì importanti scoperte sopra un oggetto, che tanto l' aveva occupato, e ne dette una pubblica testimonianza, dedicandogli il IV. volume della sua immortale Fisiologia colla seguente iscrizione.

Illustrissimo viro
Lazaro Spallanzani
In minimis eo difficillimis
Indagatori
Ob ejus in veri finibus extendendis
Merita
D. D. D.
Hallerus.

Era già nata una reciproca stima, una gloriosa emulazione ed un commercio d' osservazioni fra questi due figli prediletti della natura, Spallanzani e Bonnet. Quegli nel pubblicare l' anno 1769. le memorie di questo sopra i Muli vi aggiunse alcune sue riflessioni tendenti a provare, che non sol ne' quadrupedi, ma ancor negli uccelli si ottengono generazioni bastarde. Mostrò poi quanto fosse capace non solo di confermare e d' illustrare, ma altresì d' ampliare le belle scoperte dell' amico, esposte nell' opera immortale intitolata *Contemplazione della natura*, trasportandola dal Francese nell' idioma Italiano, e per ogni dove arricchendola di note, che lo manifestano non men fedele traduttore del gran libro della natura. Da queste note, e dal Prodromo una e due volte ricordato ben si vede quanto l' occupassero le osservazioni dei fenomeni, che presenta la generazione sì nel regno animale, che nel vegetabile. Senza essere prevenuto da alcun sistema, e diffidando di tutti quelli, ch' erano stati immaginati, perchè contraddetti dalla natura medesima, coi lumi, che avevano sparsi su questo oscurissimo mistero l' Haller ed il Bonnet, corse un campo, che poi divenne tutto suo proprio per le difficoltà, che dovè superare, e pe' frutti copiosissimi, che ne raccolse. Una serie di fatti maravigliosi, raccontati con elegante semplicità, osservati con estrema finezza, seguitati con costanza, legati fra loro, e tutti diretti al medesimo oggetto coll' analisi la più profonda fanno il pregio degli opuscoli citati di sopra. Credeva il Needham, che nella materia risedesse una forza da lui chiamata vegetatrice, risultante dall' accoppiamento di due altre forze, detta l'una resistente, l'altra espansiva, a cui sia data la formazione e il governo del mondo organico, come quella che mettendo in moto le parti tutte della materia, fosse poi capace di risvegliare in essa una spezie di vitalità, scevra per altro d' ogni sensazione. Poteva bastare a convincerlo del suo errore la dissertazione dello Spallanzani nominata di sopra, ma da lui medesimo fatta trasportare in Francese, e corredata di sue annotazioni, prese anzi da essa motivo di riprodurre l'opinion sua intorno alla generazione de' viventi, e di estenderla a segno di dare alla sua forza vegetatrice non solo il potere di organizzare la materia in esseri animati, ma eziandio di farli passare dallo stato di animali a quello di vegetabili, e da quello di vegetabili all' altro di animali. Servivasi egli delle stesse esperienze fatte dallo Spallanzani sopra gli Animali infusorj esposti al calor dell' acqua bollente per confermare questo suo bizzarro sistema, ostinatamente affermando, che il trovarsi gl' infusorj tanto negli aperti, quanto ne' chiusi vasi sottoposti all' azione violenta del fuoco, che avrebbe dovuto distruggere i supposti semi, è una prova di essere stati prodotti dalla forza vegetatrice. Fu pertanto d' uopo allo Spallanzani con una lunga serie di ripetute e novelle esperienze fatte a diversi gradi di calore con estrema sagacità, ed esattezza di dimostrare l'esistenza degli Animaletti infusorj massimi, mediocri, e minimi, e di provare quanto il fuoco contribuisca al nascimento, ed alla moltiplicazione de' più piccoli, scomponendone e sfibrandone le particelle. Sottopose all' azione del medesimo uova, Animali, semenze e piante, e tutto servì a convincerlo della preesistenza de' germi, notando le differenze di quelli, che più o meno resistono alla forza del calore. Esaminò ancora con simil metodo gli effetti del suo contrario, cioè del freddo, negli infusorj, negli Insetti e in altri Animali, ammirò la varietà della natura, che sa servirsi degli stessi mezzi per distruggere gli uni, e per conservare ed animare gli altri, ed ogni esperienza diviene in mano sua una sorgente di verità sconosciute, e un argomento distruggitore del sistema dell' Inglese epigenesista.

Più seguaci aveva ancora quello delle molecole organiche, specioso nome dato dal Francese Buffon ad una immaginata materia vivente, primitiva, incorruttibile, e sempre attiva, la quale operando in virtù di certi rapporti, di certe leggi, e di una forza segreta, pensò che bastar potesse a spiegare la grand'opera della generazione, ed i più reconditi ed escuri fenomeni della medesima. A persuadere questa sua ipotesi impiegò i lenocinj d'una seducente eloquenza, e prevenuto per la medesima, credè poi di trovare nella natura quello, che realmente non v'era, esempio che con altri molti serve a provare quanto le teorie, che precedono le osservazioni, e le conclusioni puramente razionali, debbono essere sospette in fatti d'istoria naturale e di Fisica. Dobbiamo all' Olandese Leeuwenhoek l'osservazione, che nel liquore spermatico annidano innumerevoli Animaletti, a cui diede il nome di vermi, per assomigliarvisi nella forma del corpo, e nella natura del moto. Molti egli ebbe contradditori, ed oltre il Needham ed il Buffon estimò l'illustre Linneo, che i supposti vermi nient'altro sieno se non se molecole inerti, galleggianti a guisa d'olio sul seme, e che intanto si muovono, in quanto che sono investite ed agitate dal calore del liquido seminale. In questa celebre controversia, che molta analogia aveva coll'altra degli Animali infusorj, quantunque di costituzione e di natura essenzialmente diversa da quella de' vermicelli spermatici, entrò lo Spallanzani in modo, come se fosse stato il primo a trattarla, nulla valutando le altrui ragioni per non confondere le opinioni del Filosofo colle risposte della natura. Solamente dopo d'aver raccolta un'abbondantissima messe d'esperienze nuove ed esatte sopra i semi dell'uomo, di varj quadrupedi, e di minuti Animali credè di poter fortificare l'opinione del Leeuwenhoek in modo da resistere a qualunque urto, e da confondere la presunzione di quelli, che si erano lusingati di combatterla. E di quant'altre verità non sono feconde queste stesse esperienze? La natura, l'origine, la propagazione, gli andamenti, i caratteri de' misteriosi ospiti de' semi animali non isfuggono agli occhj del nostro Osservatore, che se non imita l'esempio di quelli, che pretesero di spiegarne ancora gli usi, è perchè confessa con filosofica ingenuità di riguardare ciò come uno di quegli arcani, che trascendono la sfera delle le umane cognizioni. Nell' immensa varietà e costanza de' suoi tentativi non perdè mai di vista l' esame di quel canone ricevutissimo da tutti i Fisici, che gli Animali, e i vegetabili tutti periscono, se necessitati sieno di respirar l'aria in vasi chiusi, e trovò esservene alcuni, che non provano sì facilmente i rei effetti dell' aria non rinovata, e così ebbe dalla natura que' rischiaramenti, che indarno avrebbe cercato presso gli Autori. Dagli effetti salì alla cagione, prendendo massimamente ad esaminare se questa debbasi ripetere dalla diminuita elasticità dell' aria o pur dagli aliti degli Animali stessi, come gli sembra più verisimile, e d'una in altra ricerca passando, potè formare un opuscolo pieno di novità fisiche, fra le quali meritano special menzione quelle del Rotifero e del Tardigrado, e di altri Animali, che hanno il privilegio di risorgere. Non defrauderemo della debita lode il Leeuwenhoek ed il Baker, che i primi osservarono questa maravigliosa proprietà del Rotifero, ma era riservato alla gloria dello Spallanzani l' estenderla ad altri Animali, e di spargere nuovi lumi sulla struttura, sugli organi, e sugli andamenti di ciascun de' medesimi. E chi avrebbe mai immaginato, che l' arena delle tegole, il fango de' fossati e dei paduli, che dal non pensante volgo si reputano quali sterili materie abbiettissime, divenissero pel nostro Osservatore filosofo un oggetto di maraviglie per le rare e pellegrine cose, che seppe trovarvi, e che, come ei confessa, non cessò di osservare con instancabile assiduità e pazienza per lo spazio di più lustri? Animali poi come il Rotifero, il Tardigrado, le Anguillette, abitatori tutti delle arene delle tegole, che dopo di essere morti risorgono, e che dentro a certi limiti tante volte risorgono quante a noi piaccia, non è egli un fenomeno, che a prima giunta può sembrare un paradosso, e che verificato serve a mettere in moto ed in iscompiglio le idee le più ricevute dell' animalità, che ne fa nascere delle nuove, e che diviene meritevolissimo delle ricerche non meno dell' oculato naturalista, che delle speculalazioni del profondo metafisico (1)? Adoriamo l'infinita sapienza del Creatore, e il lume delle poche scoperte fatte ai dì nostri ci mostri l'imperfezione delle umane cognizioni, e l'angustia de' confini, entro i quali sono circoscritte. L'esperienza sola, che può dilatarli, temer dee l'influenza di qualche mal fondato raziocinio, dal che nacque nel nostro Scrittore l'estrema cautela di non dar luogo alla più piccola ipotesi. Quando propose quella, che negli Animali risorgenti il principio della vita loro, perchè privi di cuore, fosse radicato nell'irritabilità de' loro muscoli, speciosa e seducente ragione del restituirsi questa mediante l'irroramento discreto dell'acqua, e del distruggersi pel soverchio calore, per gli odori forti, per certi liquori, per l'elettricità ec., disse che non s'impegnava a patrocinarla, e dalle stesse sue esperienze trasse argomenti per infievolirla. Bastavagli il fatto senza pretendere di dimostrarne il principio, e contemplando nell'universale il mondo vivente, e l'immensa catena, che lega fra loro gli Animali, e questi co' vegetabili, e que' tanti prodigj, che presentano gli Insetti, che risorgono, quelli che si moltiplicano mettendoli a brani, quelli che sono dotati dell'uno e dell'altro sesso, col passare questa maravigliosa proprietà di una in altra spezie come per gradi, fino ad esservi chi può bastare a se stesso per la riproduzione, dice di non vedere ciò non ostante nella natura alcun fatto, che possa veramente chiamarsi isolato, ed un' eccezione alle regole generali, perchè tutto vi è legato con una portentosa serie d'anelli, cominciando dalla Tremella, che scopertasi per un veracissimo zoofito, unisce i vegetabili cogli animali, e progredendo dai Polipi fino all'Uomo. L'immensa copia degli esperimenti, che tante gli scoprirono verità sfuggite agli occhj altrui, non iscemarono in lui punto il desiderio di tentarne e ritentarne de' nuovi, ricordando a se stesso, e a tutti quelli, i quali battevano le stesse vie, che la storia naturale era ancor troppo vicina alla sua infanzia, e che lo scoperto fin ora era un nulla in paragone di quello, che rimaneva a scoprire. Chiudono il prezioso volume degli opuscoli alcune osservazioni e sperienze intorno all' origine delle piantine delle muffe, altr' anello, che a parer d' alcuni sembra collegare i vegetabili co' minerali, e forse ancora cogli Animali, ma per quanto aguzzasse gli occhj il nostro linceo Osservatore, non vide in esse se non che i caratteri tutti dei vegetabili, pago così di aver posta fuor di dubbio la questione dell' origine delle più volgari per lo innanzi non bene discussa, e che aveva indotto alcuni nell' antica ed erronea credenza della generazione spontanea.

---

(1) Si veda una lettera del Signor di Voltaire al nostro Autore sulla risurrezione del Rotifero e del Tardigrado, con cui risponde bizzarramente ad alcune questioni fattegli intorno alla natura della loro anima: *Recueil des lettres de Voltaire Tom. LXIII. p.* 247.

Nella faticosa inchiesta di tante e sì variate generazioni d' Animali a sangue freddo e caldo, e di tutto quello, che serve a mantener la vita loro, o a distruggerla, gli nacque un' idea tutta sua propria, di tentare cioè l' artifiziale fecondazione. La riuscita de' suoi tentativi nelle Cagne, ed in qualche altro Animale sparge una luce non indifferente sulla parte della Fisica la più oscura, e la più degna della nostra curiosità. Qualch' indizio aveva dato di ciò in un articolo stampato nel Prodromo della nuova Enciclopedia Italiana, ma poi ritornò con maggior copia d' osservazioni allo stesso soggetto, ed invitò altri a confermarlo. Voleva ad ogni costo porre in chiaro lume la legge della natura, di cui l'Haller aveva segnate le prime linee, della preesistenza del feto nelle femmine, e tante e sì accurate sono l' esperienze, ch' ei diresse a questo fine, che per esse può dirsi un' opinione dimostrata con tutto quel rigore, di cui sono capaci le dimostrazioni delle verità fisiche. Non contento di far vedere chiaramente, che i Girini delle Ranocchie, dei Rospi, e delle Salamandre non sono, come erroneamente si era creduto, uova, ma veri feti esistenti sotto una forma molto più piccola nelle ovaje delle femmine prima della lor discesa nell' utero, e per conseguenza molto tempo avanti la loro fecondazione, giunse ancora a provare, che questa fecondazione si operava fuor dell' utero non solo dall' accoppiamento naturale del maschio, ma ancora artifizialmente, facendo esperienze, per verità originali e maravigliose, per conoscere l' energia prolifica del liquor seminale di questi amfibj, che è tale, che una gocciola non maggiore della punta di uno spillo a traverso ancora di una massa copiosa di mucilaggine conserva tutta la sua virtù fecondante, e che non la perde mescolata coll' acqua. Non tralascia ancora di esaminare in qual maniera il liquor seminale col suo contatto può penetrare il feto, ed agire sopra di lui per dargli vita, quali sieno gli effetti, che da ciò ne derivano, come il feto medesimo si accresca, allorchè si prepara alla fecondazione, ricerche tutte curiose, importanti, e alla notizia di verità ignorate conducenti, onde è forza di dire, ch' ei signoreggiava la natura, sforzandola a manifestargli i suoi misteri.

Persuaso con tutti i buoni Fisici dell' uniformità delle leggi della medesima, sperò di scoprire nelle piante quel che aveva osservato negli Animali, cioè la preesistenza dei feti, questione per la sua novità e per la sua importanza al pari dell' altra degna degli studj del nostro esperto Osservatore. Cercò pertanto nell' ovaje di alcune piante i piccoli semi, che dovevano maturarsi molto tempo prima che il pulviscolo fecondante giugnesse a fecondarli; ne osservò attentamente lo sviluppo dopo la fecondazione, e vide comparire successivamente la piantina ed i lobi; e potè finalmente dimostrare, che gli embrioni de' semi preesistevano, perchè facendo quagliare l' umore contenuto nel seme della pianta detta *Delphinium Ajacis* prima della fecondazione, scoprì in esso la piantina co'suoi lobi, dal che ne risulta, che l' estrema piccolezza dei feti, e sopra tutto la lor trasparenza, il più delle volte ne impediscono l' osservazione. Dobbiam per tanto esser cauti in decidere, che non esiste quel che non si vede, e che non vi sono feti prima della fecondazione, perchè non ci fu concesso di scoprirli. Dopo di avere così provato che la natura agisce con leggi generali, e che si compiace più di modificarle, che di variarle, l'esperienza adoperata con tutte le precauzioni le più scrupolose e le più efficaci per impedire ogni sorta di commercio tra pianta e pianta, gli palesò un' eccezione a questo canone, perchè conobbe con sua sorpresa esservi alcune piante, che danno de' semi fecondi senza essere state fecondate dal pulviscolo, creduto l' unico mezzo della fecondazione. Tanta copia di scoperte ne' due regni animale e vegetabile doveva essere una sorgente di dolci compiacenze in un' anima, che provava vivissimo l' amor della gloria, e che conosceva quanto poche e malagevoli sieno le vie, che conducono al vero, e quanto molte e facili quelle, che menano all' errore. Prudente, accorto ed animoso nell'evitar l'une, e nel seguir l'altre, meritò la lode di non avere chi il pareggiasse nelle ricerche di verità naturali, ed allorchè il rinomatissimo Giovanni Senebier tradusse in francese le Dissertazioni di Fisica animale e vegetabile, accompagnò questo suo lavoro di considerazioni sul metodo di far l' esperienze adoperato dallo Spallanzani, e sulle conseguenze pratiche, che possono dedursi dalle sue scoperte in vantaggio della Medicina.

Questa scienza, che dall' arte puramente sperimentale può sperare il suo accrescimento, dovè alle cure dello Spallanzani la teoria, se non completa, i dati però principali per formarla, del modo con cui la natura eseguisce la grand' opera della digestione. I Fiorentini Accademici detti del Cimento furono i primi, che si posero nella dritta via per rintracciarla. Il Reaumur ampliò l' esperienze di questi, e le fece con più fine vedute, e con maggior diligenza, ma al solo Spallanzani fu dato di dissipare le tenebre, che coprivano l' operazione maravigliosa della natura. Imperocchè dopo di aver sottoposto agli sperimenti gli stomachi d'ogni maniera, muscolosi, membranosi e medj, giunse a conoscere ove avesse luogo la triturazione, ed ove soltanto co'sughi gastrici si operasse la digestione. Animato dal solito suo coraggio non dubitò d' ingoiare ei medesimo e di vomitare cibi racchiusi o in sacchi di tela, o in tubi forati di legno pe' quali poteva sola agire la forza de' sughi medesimi, sottopose la natura di questi all' esame il più rigoroso, per cui si può concludere, che nè un sal acido, nè un ammoniacale, come credevasi, sono i principj, nè la fermentazione, nè la putrefazione sono i modi, coi quali da questi sughi si sciolgono gli alimenti, e che la digestione si accelera in proporzione del calore, e provando e riprovando, non iscoprì mai verità, che non ne conducesse sempre seco molt' altre nuove e rilevantissime, che maravigliosamente accrebbero le teorie dell' animale economia. Tutta la colta Europa si mise in moto per verificarle, per abbracciarle, e per estenderle agli usi della Medicina e della Chirurgia (1). Forse il solo Giovanni Hunter, nome illustre tra gli Inglesi coltivatori dell'esperimental Medicina, promosse alcuni dubbj sulla teoria della digestione, che il suo Autore dissipò colla lettera apologetica inserita nel volume XI. degli opuscoli scelti sulle scienze e sulle arti, che si pubblicavano in Milano. Tra le altre cose pretendeva l' Hunter, che il calore non avesse parte alcuna nella digestione. Dovè cedere all'esperienze dello Spallanzani, e dargli la lode di avere fatta sparire una moltitudine di false teorie sulla cozione, fermentazione, macerazione, o sopra la triturazione puramente meccanica delle sostanze nutritive nella cavità del ventricolo, che tanto avevano infestata la Medicina. Non v' ebbe scoperta, che non suscitasse contraddittori, ma quest' istessi servirono a porre in più chiaro

---

(1) Vedasi fra le altre l'opera intitolata: *Observations importantes sur l'usage du suc gastrique dans la chirurgie assemblées par Jean Senebier, avec quelques additions de M. Spallanzani à ses experiences sur la digestion: à Geneve* 1785.

giorno il vero, e a confermarlo con ripetuti tentativi. Lo stesso accadde in quel singolar fenomeno osservato dallo Spallanzani della riproduzione della testa nelle Lumache, che espose in una Memoria, e che vendicò in una seconda dalle opposizioni di quelli, che pretendevano non rinascere la testa, se fosse stata tagliata prima che il cervello avesse avuto il tempo d' abbandonarla. Si rallegrò con se medesimo di aver fatto dono alla nascente nostra Società di queste due Memorie colla promessa di contribuire con altri simili lavori alla sua gloria.

Potè somministrare ancora occasione e campo di esercitare la maravigliosa sua abilità in fare esperienze d' ogni maniera la cattedra, che nell' anno 1769. ottenne di Storia Naturale nell' Università di Pavia colla presidenza al Museo. Dal Reggiano, era egli passato al più celebre Ginnasio di Modena, ove per sette interi anni insegnò Filosofia e Matematica, e quantunque egli amasse con trasporto la patria, il desiderio però di miglior fortuna, che sempre lo dominò, lo mosse ad accettare le onorevoli e liberali condizioni, che gli furono offerte dall' Imperial Reggenza. Giunse lo stipendio suo fino alla somma di zecchini 400. oltre la rendita di un benefizio ecclesiastico, sorta di premio, che gli conveniva, perchè dalla prima età pensò a servire la Chiesa, e ad ascriversi alla Modanese Congregazione detta de' Sacerdoti della Beata Vergine di S. Carlo. Le sovrane straordinarie beneficenze risvegliarono l' invidia e la malignità, non altrimenti che se dall' Imperial Museo di Pavia avesse trasportato nel suo privato di Scandiano alcuni de' più rari prodotti di Storia Naturale. Non potè, e non dovè trascurare una simile accusa, per cui in principio ne fu altamente commosso l'animo di Giuseppe II. A placarlo furono pronti gli uffizj di Maria Beatrice d' Este, che ben conosceva i meriti scientifici, e il carattere morale dello Spallanzani, al quale altresì fu facile di confutar la calunnia in modo da confondere i suoi accusatori. Tant' era la fama di lui, che dai più rimoti paesi gli erano offerti doni di rarità naturali, onde non d' altro ebbe bisogno che di se medesimo per arricchire il suo domestico gabinetto.

Molto ancora contribuirono a questo accrescimento, non meno che a quello della Scienza Naturale i suoi viaggi, dai quali trasse materia di molte belle scoperte, e di opere pregevolissime. Il Lago di Ventasso, di cui scandagliò la profondità, e ne esaminò la natura ed i prodotti, e i monti del Reggiano meritarono i primi le sue osservazioni, che diresse principalmente a confermare l' opinione del suo concittadino Antonio Vallisnieri sull' origine delle fontane. Quest' opinione era quasi generalmente ricevuta quando lo Spallanzani pubblicò le sue osservazioni. Mostrò che il numero e la grandezza delle fontane dipendono costantemente dalla quantità delle pioggie, delle nuvole, delle nevi ec., dalla proprietà più o meno efficace delle Montagne per condensare i vapori dell'Ammosfera, dalla disposizione e natura degli strati, dai quali sono formate, dall' affinità più o meno energica, che questi strati hanno coll' acqua, e principalmente dalla moltitudine, come dalla direzione, e declività delle aperture, e delle escavazioni particolari, che contengono. Non contento di questo cercò per lungo tempo se esisteva un rapporto nascosto tra il sistema sensibile dell' uomo, e le sorgenti abbondanti d' acqua viva, che il sen della terra racchiude a diverse profondità. Conobbe alla fine l' inutilità di queste ricerche, e il suo, e l' altrui errore; tanto è vero che gli Uomini grandi, non meno che i volgari sono soggetti a quella malattia dello spirito umano, che prende passione per tutto quello, che è oscuro e misterioso.

Visitò nell' estate del 1779. l' Elvezia ed i Grigioni, e si giovò del commercio scientifico de' rinomatissimi Fisici Bonnet, Saussurre, Trembley e Senebier, divenuti anche prima suoi ammiratori. Scorrendo poi varj tratti del Mediterraneo e spezialmente del mar Ligustico, radunò una gran copia d' osservazioni sopra i corpi marini, e sulla formazione de' soprastanti monti dovuta in gran parte alla congerie di Testacei, e di quelli per fino nello stato di vita incogniti ai pescatori di quel litorale. Rinnovò l' esperienze altra volta annunziate sulla elettricità delle Torpedini, e ne formò un elegante opuscolo; ritrovò ben cinque incognite specie d'animaletti fosforici; descrisse la natura, la sede, e i singolari caratteri di certe numerosissime famiglie d' Animali, che hanno l' apparenza di piante, come le penne marine, gli alcioni, la millepora retepara, la madrepora, e le gorgonie; scuoprì nuovi Animali affini al genere di quelli, che si chiamano tubularj: dimostrò il progressivo moto dei Ricci marini, delle ascidie Linneane, delle meduse lucenti; esaminò diligentemente i caratteri di quel granchio, a cui si è dato il nome di Bernardo l' eremita, e quell' immensa copia d' insetti e vermi, che abitano i fanghi, le arene, gli scoglj e le pietre tutte del mare; ne scandagliò in alcuni luoghi la profondità, e ne cercò l' interna struttura, e per dir molto in poco, non si presentò cosa agli occhj di lui, che non reputasse degna di novelle osservazioni, che poi in mano sua acquistavano un' energia capace di estendere di gran lunga i confini della Storia Naturale. Il vicino continente ancora, e fra le altre le grotte di Carrara e di Equi, le cave de' marmi, i torrenti Carrione e Frigido, e le nevose cime della Pania con tutto quel tratto montuoso, che divide il Modanese dalla Toscana, offerirono al nostro Osservatore di che pascolare la sua Filosofica curiosità, e di che somministrare alle dotte Società, ed alla nostra spezialmente, Memorie che ne accrebbero la fama.

Con quest' idea, e collo scopo d' indagare naturali produzioni inosservate, e di arricchirne il pubblico e privato gabinetto, si offerì di esser compagno al Bailo Veneto, che nell' estate dell' anno 1785. intraprese il viaggio di Costantinopoli. Salparono essi appena da Venezia, che potè osservare alcune trombe di mare, e sulla cagione, che attribuì ai venti, senza dar luogo allo sbilancio del fuoco elettrico, materia ed ef-

effetti e durata delle medesime, formò uno scritto che fa parte del volume IV. delle Memorie della nostra Società. Da fiera tempesta obbligato di passar più giorni nella tanto celebrata Isola di Citera, se non trovò in essa di che pascere gli occhj dell' erudito Antiquario, la natura però di quello sterile ed arido suolo, ripieno di materie vulcaniche, di reliquie d' Animali sì marini, che terrestri impietriti, ed abbondante di tutto quello, che la gran madre delle cose, ed il tempo si compiacciono di creare, di distruggere, e di trasformare, gli porse materia di belle osservazioni. I settantadue giorni poi d' incomoda navigazione, i più mesi di lieta dimora nella sede del Greco impero, e i viaggj nelle vicine contrade furono pel nostro Osservatore una continua occupazione in ricercare, vedere e notare, che lo manifesta di buon gusto in tutte le arti, ragionatore e Filosofo, ed insieme robusto, faticante, accorto e coraggioso. Con sì fatto corredo di natura e di arte visitò nel suo ritorno in Italia la Valacchia, la Transilvania, l' Ungheria e la Germania, e giunto sul terminare dell' anno 1786. nella Metropoli dell' Austria, ne riportò quella lode, che da Orazio è detta non esser l' ultima, di piacere ai Regnanti.

Non passarono due anni, che intraprese un altro viaggio non men faticoso, e soggetto ancora a maggiori pericoli, ma che prometteva più copiosa messe di scoperte, e fu quello delle due Sicilie. La Scienza de' Vulcani, che nel secolo medesimo della buona Filosofia sembrava di essere la più ignorata, e la più ingombrata da falsi racconti e da fallaci teorie, fece il principale scopo delle sue ricerche. Il Vesuvio, i campi Flegrei, i Laghi d' Agnano e di Averno, antichi crateri di Vulcani, fissarono i primi le sue osservazioni. Passò di poi all' Etna, ed attraversando cocenti fumajoli acido-sulfurosi, che gli offesero la respirazione a segno da restare per alcuni momenti abbandonato da' sensi, giunse destituto di forze sulle labbra del cratere, e ne contemplò per ben due ore con estrema compiacenza la configurazione, l' interne pareti con tutte quelle forme, che presenta l'ampia caverna. L'Isole Eolie, altrimenti dette di Lipari, e specialmente quella di Stromboli, che contiene un Vulcano assai rinomato per le continue sue eruzioni, ebbero dallo Spallanzani la più minuta descrizione. Non lo trattenne il pericolo di esaminare da vicino il cratere del Vulcano medesimo, a cui niuno de' più curiosi osservatori aveva osato di appressarsi, e potè così correggere molti de' loro errori quanto alla posizione, alla forma, e alle materie, di cui abbonda. Sottopose queste all' esperienze chimiche, e ne dimostrò la natura, e per meglio conoscere i gas elastici, dai quali penetrate ed agitate sono le liquefatte materie de' Vulcani, pose le non tocche dal fuoco al cimento, di questo ora in contatto dell' Ammosfera, ora involte ne' vapori ardenti dello zolfo, ora in vasi chiusi, notando con scrupolosa diligenza quali sieno delle parti componenti i minerali le prime a vetrificarsi, se gli scorli, se i feldspath, se le miche ec., qual divario passi tra una lava ed un vetro vulcanico, onde avere un esatto confronto tra i resultati dell' arte e quelli della natura, e per tal mezzo comprendere qual possa essere la cagione immediata, e la scintilla prima, per cui

Ardet in immensum geminatis ignibus Aetna (1).

Basta leggere l' introduzione all' opera, divisa in sei volumi, di questi viaggj per conoscere quante cautele, e quanta avvedutezza adoperasse per interrogare e forzare la natura a mostrargli qual fosse stata l' azione delle meteore, quale quella dell' acque marine, quale quella del fuoco in comporre, decomporre, alterare, e variare i tanti prodotti vulcanici da lui osservati a fior di terra, nell' interno delle montagne, nel littorale, nel centro dell' Isole, e per fino nel seno del mare, onde formarne teorie, non già sconnesse, come lo erano per l' avanti, ma legate e combinate in modo ad da creare una nuova e ben fondata scienza vulcanica. All' esposizione delle cose Fisiche, tra le quali signoreggia sempre la sua prediletta Zoologia, che trovò un abbondante pascolo ne' pesci abitatori del Faro, e ne' volatili stazionarj nell' Isole, va unita quella di molt' altre geografiche ed erudite; si esaminano, e per lo più si confutano le opinioni di alcuni naturalisti, che non bene osservarono que' luoghi, ed in ispecie le isole di Alicuda, e di Filicuda, e Lipari stesso, ch' ebbe più osservatori, potè gloriarsi, che dal tempo, che vi approdò Ulisse, e che vi si trattenne per un intero mese invitato dall' urbanità del Re Eolo (1) e dalla brama di conoscere le città, e i costumi di varj popoli, non ne ebbe alcuno, che più dottamente dello Spallanzani notasse e descrivesse la natura, e i prodotti del suo suolo, e delle regioni circonvicine. Anche Scilla e Cariddi, le correnti dell' acque, la profondità dello stretto, le pescagioni del corallo, il lido, le colline, e le montagne gli somministrarono materia, onde fare più bella l' opera sua de' viaggi, ch' ebbe altresì un accrescimento dalle osservazioni fatte nel lago d' Orbetello, ove un' ostinata bonaccia l' invitò di trattenersi nel ritorno dalla Sicilia a Genova, sulla nascita e propagazione delle Anguille. Col fine di verificare le proprie, e le altrui osservazioni si condusse ancora alle valli di Comacchio, e per lui acquistò nuovo peso la più ricevuta opinione del loro nascimento nelle acque salse del mare. Non v' è parte del regno animale, che non fissasse i suoi attenti sguardi, ed una sola specie tal volta gli somministrava i materiali di più memorie, sì era minuto in osservarne l' organizzazione, l' istinto, i costumi, le abitudini, le differenze tra più specie simili. Quel che scrisse sulle Rondini, sui Rondoni, e sulle Strigi è una prova, che nulla sfuggiva alle sue ricerche sempre dirette a distruggere vecchj errori, ed a stabilire inosservate verità.

---

(1) *Ovid. Met. Lib. II. Cap. V. v.* 11.

---

(1) Omer. Iliad.

La chimica, scienza più dell' altre ne' moderni tempi promossa, e di cui tanto si giova la storia naturale, quantunque l' ultima, a cui lo Spallanzani di proposito si dedicasse, gli divenne però tanto amica da non ignorare con qual arte si violenti la natura a manifestare i suoi secreti. Dovè pertanto a questa scienza que' molti esperimenti indirizzati a conoscere la differenza fra il gas idrogeno naturale, il metallico, e quello delle paludi, sul qual soggetto formò due interi capitoli nell' opera de' viaggi, le osservazioni giudiziose di quel che operino l' ossigeno, e il gas acido carbonico nell' aria e nelle piante, nell' oscurità della notte, e nella luce del giorno, le più belle scoperte sulle cagioni e gli effetti de' Vulcani, su varj Animali fosforici, su certi fuochi, che spontaneamente si accendono nell'Apennino, e tutta quella copia di fisici argomenti, con cui vittoriosamente combattè l' opinione del Goettling Professore in Jena, che sosteneva derivare unicamente il lume del fosforo dalla porzion vivifica dell' aria comune, e sofferire questa alterazione e guasto notabile dai raggi del sole. Fu poi uno de' principali studj di lui negli ultimi tempi del viver suo quello di esaminare l' influenza della respirazione degli Animali, e della vegetazione delle piante sull' aria, intorno al quale argomento aveva molto tempo prima raccolte diverse esperienze. Passò a queste dopo di aver tentate le altre, che indirizzò a Giobert di Torino, sulle piante racchiuse in vasi pieni d' aria, o d' acqua esposte all' ombra, o all' azione immediata della luce solare. Aveva composta ancora una dissertazione per manifestare l' influenza dell' aria chiusa, e non rinnovata sopra la vita degli Animali e dei vegetabili, e sullo sviluppo delle loro uova, e de' loro semi. S' ei non giunse con tante belle esperienze a mettere in piena luce il meccanismo ed i fenomeni della respirazione, potè però gloriarsi di avere molto contribuito a conoscerli, e di avere giovato moltissimo alla fisiologia sì animale, che vegetabile, la quale avrebbe ottenuto da lui un maggiore accrescimento, se la morte non im-

impediva il corso delle sue osservazioni . La sua perpetua e prospera sanità fino all'anno settantesimo, corroborata dalla continenza del vitto, dall' esercizio del corpo, dal saggio governo delle umane passioni, e dalla perizia di tutto quello che serve a mantenerla, lo lusingava di potere condurre a fine questa, ed altr' opere utilissime che meditava . L' età stessa senile non aveva punto alterato in lui il dono sortito dalla natura di apprendere e concepire chiaramente le ideè, e di ritenerle interamente, e di esattamente distinguerle, cioè di vederne ancora le minime differenze, di risvegliare le immagini le più opportune, e d' indagare le conclusioni le più lontane e recondite, ma sempre connesse, perchè non mai l' abbandonò un certo senso della verità, ch' egli aveva per natura mirabilmente fino e delicato, unito all' altro di ritrovarla, ov' ella è più nascosta, e di comunicarla liberalmente anco al volgo per lo più ingrato e maligno ascoltatore . Che tal fosse l' ingegno dello Spallanzani, vivace nelle sue immagini, eloquente ed elegante nell' esprimerle, giudizioso, profondo e veritiero ne' suoi ragionamenti, non potrà mettersi in dubbio da chiunque vorrà candidamente esaminare gli scritti di lui . Ed era egli ben sicuro di non mettere alla luce cosa, che non avesse tutti i caratteri del vero, onde non dee far maraviglia, se facilmente sdegnavasi, allorchè trovava contraddittori, o restii a prestare intera fede alle sue asserzioni . L' estero commercio, che aveva co' più dotti Fisici dell' età sua, cui invitava a verificare le scoperte, che andava facendo, e i suffragj onorevoli di questi, e delle moltissime Accademie, alle quali era ascritto (1), o giustificano, o scusano almeno l' opinione, che aveva di se, e

il

---

(1) Nomineremo le principali: di Londra, di Parigi, di Berlino, di Germania, di Stockolm, d'Upsal, di Gottinga, di Ginevra, di Lione, di Montpellier, d'Olanda, di Bologna, di Mantova, di Milano, di Siena, di Torino, di Padova, e finalmente la Società nostra Italiana delle Scienze.

il vivo desiderio, che nutriva di gloria, l' ultimo ad estinguersi, al dir di Tacito, nelle anime de' saggi. Allorchè per molte esperienze fatte in Modena ed in Parma, alla presenza di chiarissimi Professori, parvegli di aver scoperto ne' Pipistrelli un incognito senso, per cui volando acceccati evitano l' urto di qualunque benchè leggerissimo corpo, mostrò di desiderare, che non se ne facesse rumore, se non dopo che fossero stati ripetuti e confermati i suoi tentativi da illuminati Fisici di diverse Università, ai quali perciò ne scrisse. Desiderava ardentemente, ch' estendesse il suo impero quel genere di filosofia che antepone il senso all' immaginazione, e che è al sommo opportuna al conseguimento del vero, e non parlava di questa, e de' frutti, ch' ella prometteva e raccoglieva, nelle pubbliche lezioni, che non accendesse ne' suoi scolari una vivissima brama di possederla. Ripeteva anche spesso ai medesimi, che difficilmente si acquista il senso appassionato per le verità naturali, e l' arte di esporle con istile chiaro, corretto ed elegante, se dalla prima gioventù non se ne intraprendono con ardore gli studj. Forse gli mancò la pazienza di mostrar loro nella privata casa quelle vie, ch' ei batteva, coltivando una scienza puramente sperimentale, che esige cautele e diligenze infinite per non confondere le apparenze della verità colla verità medesima. Il ritrovamento poi di questa gli faceva sempre più ammirare l' infinita sapienza dell' Autore della natura, i suoi piani sublimi, e la bontà adorabile, che si manifestano nel governo del mondo, nella felicità dell' Universo, e in quella degli individui, maravigliandosi, che l' infelice età nostra producesse filosofi, i quali privi d' intelletto e d' amore

. . . . . . non veggion l' orma
Dell' eterno valore, il quale è fine,
Al quale è fatta la toccata norma (1).

Pien di confidenza di contemplare anche in cielo

---

(1) Dante Parad. Canto I. v. 106.

La gloria di colui , che tutto muove ,
Per l' universo penetra e risplende
In una parte più e meno altrove (1) ,

vide con religiosa tranquillità avvicinarsi il termine del viver suo, che cagionò una crudele iscuria, seguita poi da subitaneo apopletico insulto il dì 11. di Febbrajo dell' anno 1799. Potè gloriarsi Scandiano di aver prodotti nel breve giro di un secolo due uomini di fama immortale ai quali meritamente si è dato il nome di Padri della storia naturale, Vallisnieri e Spallanzani. Se molte ed interessanti furono le scoperte del primo ne' tre regni, maggiori ancora debbon dirsi quelle del secondo, che guidato da un genio più ardito, senza arrestarsi a particolari e staccati fatti, giunse per fino a sciogliere il più difficile e il più curioso de' problemi, che offre la nascita di un uomo, di un animale, di un insetto, e l' apparizione di una pianta, che spunta dalla terra per coprirla ed ornarla della sua verdura. La successione de' secoli non presentava su di ciò, che una successione di errori : e che nel tempo, in cui le tenebre più folte continuavano a coprire ai Fisiologisti il gran segreto della generazione, siasi ritrovato uno, che lo svelò, accoppiando all' esperienza la logica e l' analisi la più profonda ed esatta, ben merita questo di essere commendato ed ammirato, e di andare lieta e superba quella terra che lo produsse .

OPERE STAMPATE DI LAZARO SPALLANZANI.

I. Riflessioni intorno alla traduzione dell' Iliade del Salvini Parma 1760. *Nella Stamperia dei Fratelli Borsi* in 8.

II. Lettere due sopra un viaggio dell' Autore nei monti del Reggiano ed al Lago di Ventasso . Nel volume IX. della *Nuova Raccolta di Opuscoli scientifici e filologici del P. Calogera* .

---

(1) Lo stesso Dante loc. cit. v. 1.

III. Dissertazioni due: Modena 1765. *per gli Eredi di Bartolomeo Soliani in* 4. La prima ha per titolo: *Saggio di osservazioni microscopiche concernenti il sistema della generazione de' Sigg. Needham e Buffon.*

La seconda è intitolata: *de Lapidibus ab aqua resilientibus.*

IV. Lettere due: sopra gli Animali delle infusioni e sui nuovi pensamenti in proposito, del Sig. di Needham. Nel volume III. del *Giornale d' Italia spettante alla scienza naturale ec. Venezia pel Milocco* 1767.

V. Memorie sopra i Muli: di varii Autori (cioè, di Bonnet, di *Spallanzani*, di Hebenstreit, e di Klein). *Modena* 1768. *Nella Stamperia di Giovanni Montanari* in 8.

VI. Dell' azione del cuore nei vasi sanguigni, nuove osservazioni. Modena 1768. *Nella Stamperia di Giovanni Montanari* in 4.

VII. Prodromo di un' Opera da imprimersi sopra le riproduzioni animali. Modena 1768. *Nella Stamperia di Giovanni Montanari* in 8.

VIII. Contemplazione della Natura del Sig. Carlo Bonnet tradotta in italiano e corredata di note e di curiose osservazioni. Tomi due. Modena 1769. *appresso Giovanni Montanari* in 8.

IX. Prolusio habita in Regio Ticinensi Gymnasio: Mutinae 1770. *Ex typographia Johannis Montanari* in 8.

X. De' fenomeni della circolazione osservata nel giro universale de' vasi, de' fenomeni della circolazione languente, de' moti del sangue indipendenti dall' azione del cuore, del pulsar delle arterie: Dissertazioni quattro. Modena 1773. *presso la Società tipografica* in 4.

XI. Opuscoli di Fisica animale e vegetabile, aggiuntevi alcune lettere relative ad essi Opuscoli dal celebre Sig. Carlo Bonnet di Ginevra e da altri scritte all' Autore. Tomi due. *Modena* 1776. *presso la Società tipografica* in 4.

XII. Della fecondazione artifiziale: articolo stampato nel *Prodromo* della *nuova Enciclopedia italiana. Siena* 1779.

XIII. Dissertazioni di Fisica animale e vegetabile. Tomi due in 4. *Modena* 1780. *presso la Società tipografica.*

XIV. Risultati di esperienze sopra la riproduzione della testa nelle Lumache terrestri. Nel volume I. delle *Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana.*

XV. Lettera sulla fecondazione artifiziale e sulla elettri-

tricità delle Torpedini. Nel volume VI. degli *Opuscoli scelti sulle scienze e sulle arti. Milano presso Giuseppe Marelli* 1783.

XVI. Sopra la Riproduzione della testa nelle Lumache terrestri. Memoria seconda ed ultima. Nel volume II. della *Società Italiana*.

XVII. Lettera prima relativa a diverse produzioni marine. Ivi.

XVIII. Lettera seconda relativa a diversi oggetti fossili e montani. Ivi.

XIX. Observations importantes sur l'usage du suc gastrique dans la Chirurgie, assemblées par Jean Senebier, avec quelques additions de Mr. l'Abbé Spallanzani *à ses experiences sur la digestion. A Geneve, chez Chirol* 1785.

XX. Lettera apologetica in risposta alle osservazioni sulla digestione del Sig. Giovanni Hunter. Nel volume XI. degli *Opuscoli scelti* citati.

XXI. Osservazioni sopra alcune Trombe di mare formatesi sull' Adriatico il dì 23. *Agosto* 1785. Nel volume IV. della *Società Italiana*.

XXII. Lettera sopra di un fulmine ascendente. Nel volume XIV. degli stessi *Opuscoli* ec.

XXIII. Lettera sugli esperimenti di Pennet. Ivi.

XXIV. Viaggi alle due Sicilie ed in alcune parti dell' Appennino. Tomi sei, in 8. *Pavia* 1792. *Nella Stamperia di Baldassare Comino*.

XXV. Lettera sulla elettricità organica e minerale di Pennet. Nel volume IV. degli *Annali di Chimica e di Storia naturale del* Profess. Brugnatelli.

XXVI. Memoria sopra le Meduse fosforiche. Nel volume VIII. della *Società Italiana*.

XXVII. Lettere sopra il sospetto di un nuovo senso nei Pipistrelli. Torino 1794. in 8.

XXVIII. Risposta ad una Lettera scritta all' Autore intorno all' elettricità animale. Nel volume VII. degli *Annali di Chimica e di Storia naturale* sopraccennati.

XXIX. Lettera sulla pioggia di sassi avvenuta in Toscana nel Giugno del 1794. Nel volume XVIII. degli *Opuscoli scelti* ec.

XXX. Lettera intorno alle riflessioni ed esperienze del Sig. Profess. Goettling sulla Chimica anti-flogistica. Nel volume XIX. degli *Opuscoli scelti* ec.

Alcuni sperimenti per conoscere le differenze fra il gaz idrogeno naturale, il metallico e quello delle Paludi. Nello stesso volume XIX. degli *Opuscoli scelti* ec.

XXXI. Chimico Esame degli sperimenti del Sig. Goettling Prof. a Jena sopra la luce del fosforo di Kunkel osservata nell'aria comune, e in diversi fluidi aeriformi permanenti, nella quale occasione si esaminano altri fosfori posti dentro ai medesimi fluidi, e si cerca se la luce solare guasti il gaz ossigeno, siccome pretende questo Chimico. Modena 1796. *presso la Società Tipografica* in 8.

Descrizione ed uso dell' Eudiometro del Sig. Giobert. Nel volume XIX. degli *Opuscoli scelti* ec.

XXXII. Lettera ad un suo Amico di Mantova. Pavia presso Baldassarre Comino 1796. in 8.

XXXIII. Lettera sulla digestione degli uccelli da preda notturni. Nel volume XIII. dei citati *Annali di Chimica e di Storia naturale.*

XXXIV. Lettera sopra le piante chiuse nei vasi dentro l'acqua e l'aria, ed esposte all' immediato lume solare e all' ombra. Nel volume XX. degli *Opuscoli scelti* ec.

XXXV. Lettera al C. Vans-Mons di Brusselles. Pavia 1798. Inoltre sono attribuiti allo Spallanzani diversi opuscoli per controversie avute con alcuni Naturalisti recenti.

OPERE INEDITE

I. Materiali in abbondanza per l'opera molte volte promessa dall' Autore intorno le *Riproduzioni animali.*

II. Altri materiali risguardanti *la Storia del Mare.*

III. Il suo Viaggio nella Svizzera.

IV. A Costantinopoli e ne' Luoghi confinanti.

V. Memoria sopra di alcune specie di Pipistrelli, che dopo di averle accecate, eseguiscono puntualmente col volo tutti que' riflessivi movimenti nell' aria, che da loro si fanno quando sono veggenti, e che eseguir non si possono da altri volanti Animali se non se colla scorta dell' occhio, diretta al Sig. Senebier. In questi termini l'annunziò lo stesso Spallanzani nella prima delle sue Lettere sul medesimo argomento citate di sopra al numero XXVI.

VI. Esperimenti circa l' influenza della respirazione degli Animali e della vegetazione delle piante sull' aria. Memorie preparate da lui pel volume VIII. della *Società Italiana.*

ELO-

ELOGIO

Di Giordano Riccati

SCRITTO

DAL CANONICO ANTONIO PELLIZZARI

TRIVIGIANO

Ricevuto il dì 9. Ottobre 1801.

Un uomo, alla di cui memoria rende la Patria le più sicure e straordinarie testimonianze di stima e di amore, a cui la Sovrana Sapienza decretò generosamente onori e monumenti perenni di gloria, a cui finalmente l' Europa tutta a larga mano tributa lodi di profonda ammirazione, merita bene di esser conosciuto da tutti, e di esser mostrato agli altri per modello ed esemplare. Chi scrive l' elogio del celeberrimo Conte Giordano Riccati tesse l' elogio della virtù. Ma l' abbozzare il merito d' un uomo sommo, non che agguagliarlo, è impresa sì malagevole, che mi è giuoco-forza prendere il partito di Cicerone, il quale non ha coraggio di ritrarre i pensamenti del famoso Oratore L. Crasso, se prima non prega i leggitori a giudicar del di lui valore più altamente, che non verrà per avventura da lui significato ed espresso; in quella guisa, ei dice, che ognun far suole in riguardo di Socrate leggendo i libri di Platone. Se io potessi rimettere il leggitore alle molte Opere profondissime del nostro Autore, parlerebbero quelle abbastanza da se, ma perchè sono per la massima parte inedite ancora, converrà ch' egli supplisca da se alla scarsità del saggio, ch' io ne darò, e si formi nel proprio concetto una più giusta idea di quest' uomo singolare.

Giordano Riccati sortì i suoi natali in Castel-Franco della Provincia Trivigiana il dì 25. Febbrajo 1709, ed Elisabetta Contessa d'Onigo fu la Madre fortunata d'un figlio sì preclaro, che accrescer doveva lo splendore della nobile sua famiglia, ed emular la gloria del Conte Jacopo suo Padre, uomo sommo in ogni genere di letteratura, come ognuno può raccogliere dalle opere sue profonde ed immortali. Non potea poi il Padre accrescere in miglior maniera la celebrità del suo nome, che col depositare nell' animo capace del Figlio le sue vaste cognizioni. Questa giovane pianta dotata dalla Natura delle più felici disposizioni, e delle più rare qualità, coltivata dalla mano esperta ed amorosa di un tanto Padre, andò via via crescendo e sviluppandosi per tutti i gradi, fino alla massima grandezza, e alla più sorprendente fruttificazione. Io direi della gloria di Giordano, come Orazio della fama di Marcello:

Crescit occulto velut arbor aevo
Fama Marcelli.

La Natura da piccoli inizj, e con occulti accrescimenti produce anche le sue opere più stupende: la violenza, e il disordine non varrebbe che a guastarne il mirabile magistero. La complessione robusta, il talento sodo e perspicace, l'animo pacato e amatore delle scienze e della verità, diedero indizio fin da' primi anni, che il Giovanetto Riccati poteva riuscire nel cielo scientifico un astro di prima grandezza; e già se ne accorsero i di lui primi Maestri nel Collegio di Bologna, i quali si congratulavano col Padre delle grandi speranze, che poteva fondare nel Figlio. Lo stesso fecero i Professori della Università di Padova, i quali ammiravano in lui un degno Figlio di Jacopo Riccati, noto oramai e celebrato non solo in Italia; ma oltremonti, e per tutta l'Europa. Il Conte Giordano, non meno che il Padre, era nato per ogni sorta di studj; e se in Bologna diede saggi di ottimo gusto nelle belle lettere, nell' Oratoria, e nella Poesia, e di acutezza nella Logica; in Padova marciava con piè franco nelle intralciate vie de' Pauli, e de' Papiniani. Trascorro di volo questi anni giovanili; perchè sebbene in altri sarebbero motivo di grandissima lode, nel nostro Riccati non sono che un albore di giorno nascente. M' affretto a considerarlo a fianco del Padre applicato agli studj severi della Filosofia, e delle Matematiche. Egli costante nel suo cammino andrà tant' oltre, che si lascierà addietro i più famosi e valenti uomini, e andrà a collocarsi tra lo scarsissimo numero de'più singolari, e distinti. Fu ammirabile la rapidità, con cui apparò la Geometria, la Trigonometria, e l' Algebra, e afferrò i più riposti artifizj dell' Analisi, e del calcolo differenziale, ed integrale, passando a contemplare anche quelle quantità, le quali di quà, e di là dal finito si estendono per infinito spazio crescendo, o scemando oltre qualsivoglia confine. Tanto era l' amore, che portava alle Scienze, che non contento di approfittarne egli solo, stimolava anche gli altri a coltivarle, e ne promoveva con grande impegno gli studj spezialmente in Treviso, dove si trapiantò la famiglia Riccati nell' anno 1747, in cui fu aggregata al ceto nobile di questa Città. Anzi era così cortese, che per tutto il corso di sua vita porse volentieri assistenza agli studj di molti, spargendo così negli altri quell' abbondanza di lumi, che avea egli acquistato. Il suo cuore soave e benefico, e l' ardente sua brama d' essere utile alla società lo facea di leggieri superar quella difficoltà, e que' tedj, che s' incontrano nell' insegnare: e molto più è da ammirarsi la sua virtù, perchè interrompeva spesso, e con volto ilare le sue serie e profonde speculazioni, anteponendo alle premure sue proprie gli altrui bisogni. E quinci ne avvenne che a misura che andava egli acquistando maggiori lumi colle sue applicazioni non interrotte giammai, cresceva in altrui non solo l' ammirazione, ma l' amore ancora inverso di lui, perchè crescevano di pari passo le morali sue virtù, e le sociali, con cui si rese accetto e caro ad ogni classe di Persone. Obbligante nel tratto, pronto e compito in ogni offizio di urbanità, di bell' aspetto, e maestoso, utile e diligente nelle cariche, e ne' magistrati della Città, si avea già per tempo guadagnato la stima, e il cuore di tutti. Il suo contegno poi in ogn' incontro prudentissimo, la purità de' suoi costumi, e la illibatezza della sua Religione lo fecero di più guardare come un vivo specchio di ogni maniera di virtù, e come un complesso di singolari prerogative. *Verum est, parum philosophiae naturalis, homines inclinare in atheismum*, (diceva Bacone di Verulamio Serm. Fidel. capo 16) *et altiorem scientiam eos ad Religionem circumagere*. Quante volte gli Scrittori d' Elogi hanno bisogno di ricorrere all' artifizio de' Ritrattisti per collocare nell' ombra, o dietro al profilo i difetti de' loro Eroi! E forse talvolta la maggior loro fatica si è di nascondere le oscure macchie, le quali sovente troppa estensione occupando l' accortezza del lodatore tradiscono; ma il nostro Giordano teneva una condotta così irreprensibile e retta, che gli stessi più maledici non avrebbero potuto censurar nessuna delle sue azioni. Ma ritorniamo agli studj.

Cominciava il Padre del nostro Giordano a sentire il peso degli anni, perciò si valeva dell' opera del Figlio per rispondere alle moltiplici ricerche, che da ogni parte gli venivano fatte sopra materie scientifiche, ed affidava senza timore la celebrità del suo nome alle industriose e compiute risposte del novello Filosofo ed Analista. Per questa via si rese celebre per tutta l' Italia prima di pubblicare alcuna sua Produzione colle stampe, non avendo dato in luce alcuna opera che dopo l' età sua d' anni 50. Tutti i più celebri letterati, che già tenevano corrispondenza col Conte Jacopo, poterono conoscere la vastità di mente del Conte Giordano, e ne concepirono così alta stima, che gli spedivano le proprie opere, acciocchè approvate, o corrette da lui potessero sostenere gli occhi del pubblico. Allorchè il Padre di questa vita passò, gli scrissero concordemente lettere onorificentissime, colle quali in luogo del trapassato lo stabilivano concordemente Giudice ed Arbitro delle quistioni letterarie, che avessero potuto insorgere tra di loro, proteste che non ebbero difficoltà di rinnovargli, quando restò egli privo anche del Fratello Abate Vincenzo, che fu uno de' più profondi Analisti dell' Europa. Era dunque divenuto l' oracolo delle Scienze, e di continuo gli venivano spedite lettere da Padova, da Milano, da Modena, da Bologna, da Firenze, da Roma, da ogni parte, colle quali si chiedeva il suo giudizio sopra alcuni punti di Fisica, di Matematica, o di altre scientifiche speculazioni. Gli Scrittori di sì fatte materie non s' arrischiavano di mettere in pubblico le loro produzioni, se prima non le assoggettavano al purgatissimo giudizio di un così autorevole Mecenate. Nel suo scrittojo avea di continovo le opere, che di mano in mano venivano lavorate da' più rinomati Autori, le quali aspettavano intender dalla di lui sentenza ciò che esse realmente valessero, e quindi la loro sorte. Il suo carattere ingenuo e soave era egualmente lontano da ogni adulazione, come anche dalle inurbane riprensioni ed invettive. Egli amava e difendeva la verità, e scopriva l'errore, ma onorava e rispettava gli Scrittori. Quindi è, che alcuni, perchè non godeano forse il vantaggio della di lui familiarità, avendo pubblicate le loro opere non senza qualche notabile mancamento e difetto, restarono di poi convinti della solidità delle correzioni da lui suggerite, e della maniera dolce e amichevole, con cui seppe proporle. Donna Gaetana Agnesi, onore anzi portento del suo sesso, fu una de' primi, che abbiano tratto gran vantaggio dall' acutezza e dalla profondità del criterio di Giordano. È vero ch' Essa molto riconosce dal Conte Jacopo, col quale già prima teneva carteggio sopra teoremi e problemi matematici, e sopra i più reconditi, e astrusi metodi dell' Analisi, ma niente meno si professa non poco obbligata al Conte Giordano, perchè anch' egli col Padre riscontrò con rigoroso esame le sue famose Istituzioni Analitiche, prima che uscissero alla luce. Si conserservano ancora le lettere della celebre Autrice, colle quali professa al nostro Giordano i sentimenti di una profonda stima e riconoscenza; siccome si conservano anche quelle degli altri dottissimi uomini, le quali poste in serie colle risposte del nostro Riccati riempiono molti volumi. Questo solo commercio di lettere basterebbe a farcelo conoscere per uomo grande, palesando esso la maestria, con cui tratta quistioni le più avviluppate di Geometria, di Analisi, di Fisica, e la chiarezza, onde risolve le difficoltà, e i dubbj degli altri.

La celebre controversia sopra la natura de' Logaritmi gli diede motivo d'impiegare molte meditazioni, e di scrivere i suoi pensamenti rispondendo alle dimande, che gli furono fatte da parecchi Matematici. L'invenzione del calcolo logaritmico fu risguardata dagli Analisti come una delle più utili scoperte; ottenendosi per questo mezzo dimostrazioni facili ed eleganti di problemi difficilissimi, e talvolta insolubili co' metodi prima usitati; ma non si comprese da principio quali fossero i precisi confini del nuovo metodo, e quale, dirò così, la linea di demarcazione. Tra il Leibnizio, e Giovanni Bernulli cominciò la contesa se i numeri negativi abbiano i loro Logaritmi, e se debbano essere uguali a quelli de' numeri stessi positivi. Il primo abbracciò la sentenza negativa, il secondo difese l'affermativa. Entrarono poscia in questa lizza l' Eulero, l' Alembert, ed altri dichiarandosi chi a favor del Leibnizio, chi del Bernulli, senza però che nè l'una, nè l'altra parte si desse per vinta. La quistione intanto passò d'oltremonti in Italia, e fu ventilata da' nostri. Ho già prevenuto il Lettore, che il nostro Riccati spese molte fatiche nel maneggiar questa materia, ma quì soggiungo che toccò a lui la gloria di pronunziar la sentenza perentoria intorno a questa lite. Imperciocchè avendo il suo Fratello Abate Vincenzo, sovrano calcolatore nè forse a veruno secondo, estesi i suoi pensieri in cinque lettere (che ora si leggono stampate) furono dal medesimo dirette a mio Fratello, per dargli un attestato di quel compatimento , con cui si compiaceva di onorarlo . Giugnevano queste prima nelle mani del Conte Giordano , dove pure facevano capo le rispettose risposte di mio Fratello . Il nostro Conte pertanto si accordò con esso nel dubitare sull' efficacia della dimostrazione dell' Abate Vincenzo appoggiata anche a' valori immaginarj della base espressa da una funzione infinitiforme ; non già perchè la credessero zoppicante , ma perchè potrebbe incontrar dell' eccezioni dal canto degli avversarj , e versato com' era in questa materia , ponderando le nuove ragioni e gli addotti argomenti , trovò nelle risposte di mio Fratello delle traccie , e delle indicazioni , che lo condussero a stabilire la vera equazione della Logistica , che ha due rami affatto simili , e dall' assintoto equidistanti , onde ci sono forniti i logaritmi de' numeri negativi eguali a quelli de' numeri positivi , e con una lettera stampata insieme colle antidette dell' Abate Vincenzo pose fine alla tanto agitata controversia .

L' equazioni del terzo grado , le formole cardaniche , il caso irreducibile furono sempre per gli Algebristi un forte incentivo di riflessioni , di osservazioni , e di tentativi , e quelli , che si lusingarono di aver guadagnato qualche cosa sopra una materia cotanto spinosa , si rivolsero subito al nostro Giordano per averne il decisivo giudizio . Egli poi sempre pronto a giovare altrui , ed a promovere i buoni studj , pesava colle bilance dell' orafo gli altrui pensamenti , e con istancabile pazienza riscontrava i prolissi calcoli ed intralciati , ed estendeva in fine le giuste e adequate risposte a' celebri Autori . Basta considerare un poco i volumi del commercio di lettere mentovato di sopra per conoscere anche su questo punto la profondità del suo criterio , e la molta fatica da lui incontrata .

Ma qual parte v' ha della Matematica , e della Fisica , in cui non fosse versatissimo , e non potesse decidere da sovrano maestro ? Anzi , essendo egli pratico in ogni materia scientifica , in ogni maniera di letteratura , e nelle arti liberarali, si può dire che in queste lettere si tratti di tutto ciò che forma la scienza e l'onore dell'umanità. Di quanto pregio siano queste sue lettere si può argomentare dalla chiarissima fama, in cui era salito prima di dare in luce veruna sua fatica; talchè ciascun dotto si procacciava la di lui corrispondenza per avere all' uopo un appoggio sicuro ne' suoi giudizj, e ne' suoi consigli. E per verità pochi vivevano allora in Italia, che si distinguessero in qualsisia facoltà o disciplina, de' quali nella lodata serie di lettere non s' incontrino i nomi.

In questo modo andò sempre più crescendo quasi occultamente e mettendo sempre più profonde le radici, per così esprimermi, onde stender di poi i rami fino ad una sorprendente sublimità. Il suo progresso fu sempre costante penetrando più e più ne' riposti penetrali delle scienze, e di continuo scoprendo ignote verità, colle quali avrebbe poi arricchita la repubblica delle lettere. Era giunto all' età, come ho detto, d' anni cinquanta a un dipresso quando risolve finalmente di far sì colle stampe, che il pubblico cominci ad assaporar qualche frutto prezioso de' suoi studj, e se fin quì era già da molti conosciuto e stimato, da questo punto comincia l' Italia tutta a rivolgersi verso Lui per ammirarlo. Una delle maggiori sue cure fu in prima quella di prestare gli ultimi uffizj alla memoria del chiarissimo suo Padre, il quale pochi anni fa avea finito di vivere, col pubblicare le molte e gravissime Opere, ch' ei lasciò scritte. Quanta fatica gli sia costata questa impresa, si può agevolmente argomentare dalle bellissime Prefazioni, dalle dotte Annotazioni, ed Aggiunte, con cui corredate furono, e rischiarate dal Figlio. I più celebri Letterati d' Italia, anzi d' Europa accolsero con applauso queste Opere pregevolissime, che furono un grande alleviamento del dolore sofferto per la perdita di letterato sì egregio; riscontrando con queste primizie nel Conte Giordano un Figlio, che ben potea sostenerne le veci. Ora dunque cominciano ad uscire alla luce ce le Produzioni del suo vasto ingegno, ma succedonsi così rapidamente pel corso di circa trent'anni, che sopravvisse, che giunsero ad un novero ben grande. Comparvero queste o impresse di per se, o inserite nelle Raccolte, ne' Giornali letterarj, e nelle Memorie, che si stampavano in parecchie Città d'Italia, e venivano da tutti accolte e lette con avidità: onde avveniva che il nome del nostro Riccati, crescendo sempre più in celebrità e chiarezza, posto fosse nel picciol numero di que' sublimi ingegni che possono chiamarsi il fiore e la gloria dell' umana ragione. Eppure la maggior parte delle sue fatiche sono ancora inedite, e manoscritte accrescono il decoro e il prezzo alla scelta Biblioteca del Nipote dell' Autore Conte Jacopo Riccati coltissimo Cavaliere, e in molti studj erudito, che ama le lettere, e favoreggia i letterati. Sono anche queste degnissime al pari dell' altre di veder la luce, e si dee riputar comun danno la privazione del molto lume che spargerebbero sopra gli studj Filosofici, Fisici, e Matematici per la novità delle invenzioni, per il rigore delle dimostrazioni, e per la eleganza de' metodi.

Si formò in Siena il progetto di comporre una nuova Enciclopedia, quindi il nostro Riccati non fu solamente invitato a prendervi parte, ma fu anche pregato con lettere pressanti, che volesse concorrere a un' impresa diretta all' onore, ed a' vantaggi dell' Italia. Egli, che non si curò giammai di essere ascritto all' estere Accademie, e Ceti letterarj, non seppe alla Patria dare ripulsa, e promise l' opera sua. Nel Prodromo, che ne fu indi pubblicato, si leggono due sceltissime dissertazioni del suo nome fregiate sopra l' Acustica, le quali ben corrispondono alla fama, di cui già era in possesso, e dimostrano di quanto giovamento sarebbe stato al conceputo disegno, se l' esito vi avesse corrisposto. Allora poi che fu istituita in Padova per sovrana deliberazione quella Regia Accademia, senza di lui saputa vi fu ascritto tra' Socj in attestato di quell' alta stima, in cui tenuto era da tutti, e per arra del molto lustro e decoro, che dal suo valore aspettavasi quella dotta adunanza. In fatto molte prove sincere le diede per sostenerne l' onore, e cominciò anche tosto ad arricchirne gli Atti co' pregiati lavori della sua mente, e della sua penna: se non che troppo avvicinavasi ormai il termine de' suoi anni, ch' era per aduggiare sì lusinghevoli speranze. Nota e celebre si è la Società Italiana, che fu istituita in Verona, ed è composta de' più dotti Soggetti, i quali co' loro scritti siensi fatti conoscere valenti nella Matematica, e nella Fisica. Egli è ben facile a credere, che il nostro Riccati sia stato uno de' primi, che fossero invitati a questo onore; e se in lui un diritto precipuo si ravvisò, onde fargliene l' offerta, la Società stessa gli rese giustizia col giubilo, che dimostrò dopo di averne ricevuto l' assenso. Ecco in qual maniera gli scrisse in quell' incontro il celebre Cav. Lorgna, che n' era l' Istitutore, ed il Presidente: *S' immagini con qual cuore assumo io l' incarico di presentarle la Patente della Società nostra, io, che da tanti anni stimo e venero i suoi talenti, e le auree qualità del cuore*. Ne' pochi anni, che ancora gli restarono a vivere, inserì negli Atti di questa Società sei Memorie piene zeppe di magistrali artifizj, e ammirate da' più solenni Fisici, e Matematici.

Ma troppo lungo sarebbe non solo il dare un ragguaglio distinto di tutte le di lui opere, attesa la moltiplicità loro, e la varietà degli argomenti, ma anche il farne partitamente menzione: imperò giudico meglio a proposito toccarne alcune sommariamente quasi per saggio di quell' intero cumulo di cose, che richiederebbono interi volumi. E perchè i suoi studj più graditi furono spezialmente quelli di Geometria, di Analisi, e di Fisico-Matematica, farò brevemente parola di qualcheduna delle opere sue stampate, o inedite, tra le molte appartenenti alle suddette facoltà, passando sotto silenzio quelle di Letteratura, d' Istoria, di Filosofia, di Aritmetica, di Metafisica, avvegnachè pregevoli e lodatissime.

La Matematica era si può dire il suo incanto, di modo che non solamente la promoveva egli stesso, ma accarezzava con particolare affetto i suoi coltivatori; e fu veduto prender con molto impegno la penna, e pubblicare in un Giornale letterario una giudiziosa e grave dissertazione per ribattere gli attacchi, e le accuse, che non senza rammarico vide in un foglio avventate contro di questa Scienza. Tanto più credette di essere nell' impegno di dover rispondere alle censure contro la Matematica, perchè in una sua Operetta aveva antecedentemente dimostrato esser quella utile ad ogni maniera di Studj, ed alle Scienze tutte, comprendendo pur le Teologiche e Sacre. Ma parlando dell' immortale Giordano Riccati convien formarsi l' idea di un generoso Navigatore, il quale dopo di aver corso tutti i mari già noti, e di avere osservato i passi pericolosi, i seni, e i lidi circostanti, certo oramai di sua sperimentata perizia si spinge oltre agli antichi confini, e scopre nuovi mari, e terre non più conosciute, dilatando col suo valore il commercio, e le ricchezze della sua Patria. Al nostro Riccati deve la Geometria non poche belle ed utilissime scoperte. Il suo Trattato completo delle figure piane isoperimetre contenenti la massima superfizie manifesta l' industria e l' abilità dell' Autore, per la semplicità ed eleganza inarrivabile delle dimostrazioni; e la dissertazione sopra la trisezione degli angoli ne appalesa la sagacità e il giudizioso discernimento. Imperciocchè non tenta egli la soluzion generale del Problema col regolo e colle seste, ma dopo di aver indicato i casi soggetti a' Postulati, ricorre all' Iperbola, la quale può darci in ogni caso la cercata divisione. Anche il Conte Jacopo aveva scritto qualche cosa sopra questa celebre quistione, su di cui sudarono troppo molti inutilmente, e alla cieca; ed il Conte Giordano compì l' opera del Padre, e diede a luce unitamente il lavoro d' entrambi. Quindi possono i Geometri avvedersi non appartenere alla Geometria piana un Problema, che abbisogna per essere sciolto della Iperbole. Per ottenere l' intento sono necessarj tre punti d'intersecazione col circolo, come osserva a tal proposito il valoroso sintetico Boscovich; ma un circolo non può esser incontrato da un altro circolo, o da una retta, che in due soli punti; e perciò vani sempre saranno gli sforzi di chi ne cercasse la soluzione geometricamente. Molti inoltre sono i Problemi, e i Teoremi geometrici di difficile indagine da lui dimostrati maestrevolmente, i quali nella serie de'suoi Manuscritti formano altrettanti opuscoli, che sarebbero lodati a cielo da' Geometri, se uscissero dalla privata lor condizione. Anche sopra alcune curve esercitò la sua sintetica sagacità, e trattò della Cicloide, e della Lemniscata dimostrandone la natura e le proprietà.

Ma sebbene amasse assai la Sintesi, e fosse divenuto in quella valente cotanto, nondimeno più cara gli fu l' Analisi, e in essa pose anche studio maggiore; perchè più feconda essendo della Sintesi, e più adatta a scoprire verità novelle, meglio si conveniva al suo genio inventore. Anche questa Scienza, benchè vasta e difficile doveva aspettarsi de' notabili incrementi da un Coltivatore sì eccellente, che l' amava oltre modo, e ne comprendeva l' indole, e ne possedeva a pieno tutti i metodi più sottili, e industriosi. Ho accennato di sopra le molte lettere da lui scritte agli amici, e corrispondenti sopra varie ricerche analitiche, ed ora aggiungo aver lui estese non poche dissertazioni o per iscoprire ignote verità, o per difendere le combattute; e di queste sue fatiche alcune soltanto uscirono in pubblico, ed accrebbero, dirò così, il comun patrimonio. Soggetto di una tra queste sono le formole cardaniche, che risolvono l' equazioni di terzo grado, quistione assai famosa per le faticose e inutili ricerche di tanti, che tentarono inutilmente il guado non valicabile da chicchessia. Egli però si avanza in questo stretto pericoloso con sorprendente franchezza, e svolti alcuni casi, che ammettono la soluzione algebraica, giunge al caso irreducibile, cui dimostra affatto indomabile col provarlo lo dipendente dalla curva de' seni e de' coseni circolari, curva non altrimenti algebraica, ma trascendente. Quinci si rende manifesto, ch' egli maneggia con pari chiarezza e facilità le ricerche ardue e spinose, che le agevoli e piane: siccome tratta con ugual chiarezza le quantità finite, che le infinite, e le infinitesime. L'Analisi in certi suoi recessi ed anfratti diviene oscura sì fattamente, che sembra aggirarsi, e cozzar con se medesima; ma egli ne capisce così perfettamente il linguaggio, che ne dispiega gli arcani, e in un luogo dimostra la verità di alcuni analitici paradossi creduti comunemente paralogismi; e in un altro stabilisce la vera proporzione e il valore degli zeri sì reali, che immaginarj fra loro affatto diversi. Altrove scioglie problemi analitici difficilissimi, integra formole differenziali, corregge l' errore del celebre Inglese Waring, il quale si vantava di abbassare al terzo grado l' equazioni del quinto, al quarto poi quelle del sesto; insegna l' uso del metodo delle variazioni nella soluzione di varj problemi, e arricchisce in somma da ogni parte la scienza. Ora, che in sì moltiplice varietà di prolissi calcoli, e di laboriose operazioni analitiche sopra argomenti i più difficili ed involuti non sia stato mai da veruno convinto d' errore, non deve riputarsi un fatto maraviglioso, e del Conte Giordano singolar privilegio? Conciossiachè esenti non vanno alcuna fiata da sbagli e sdrucciolamenti neppur i più pratici, e i più circospetti. Ma egli pervenne a questa lode precipua per una cotal sodezza e dirittura inesplicabile del suo ingegno, e per una non ordinaria esattezza nell' operare, da cui non si discostava mai nemmeno nelle azioni della vita e de' costumi. Sempre che poi calcolando giungeva alla formola cercata e finale, per conoscer meglio i valori delle spezie, che la componevano, e nelle varie supposizioni ravvisarne tutti gli accidenti possibili, la cimentava colla soluzione geometrica. Il luogo geometrico mette quasi innanzi agli occhi coll' andamento delle linee, co' punti d' intersecazione, di approssimamento, o di flesso, tutte quelle modificazioni, alle quali può andar soggetta l' espressione analitica, che in se stessa le contiene oscuramente. Ma se facea così gran conto della costruzione per interrogare le formole, non era meno sollecito di consultare l' esperienza, qualora le dedotte conseguenze alla Fisica appartenevano. Per questa via colse più volte in fallo alcuno degli Analisti più rinomati. *L' unione dell' Analisi, e della Sintesi* (dice egli stesso in una lettera al chiarissimo Sig. Malfatti) *dà quel nitore alla soluzione d' un Problema, che invano si cerca nelle Opere dei Geometri puramente calcolatori. Si scopre molte volte col mezzo della costruzione geometrica l' assurdo in una formola, che la sola Analisi non lasciava apparire. Nell' ultimo de' miei Schediasmi ho condotta ad un Fisico assurdo la formola, colla quale l' Eulero determina la velocità del suono.*

Con tale apparato di scienza matematica, e con armi possenti e affilate alla cote della ragione più depurata entra il Conte Giordano nel Regno della Natura. Chi non avrebbe predette le sue vittorie? Si sa, che il Gallileo diceva esser l' Universo un gran libro contenente innumerevoli verità, ed esposto agli occhj di tutti, ma scritto a triangoli, a quadrati, a figure geometriche, a segni matematici. Infatti pochi progressi potè far la Fisica, finchè si tenne disgiunta dalla matematica, e solamente allora si vide avanzare i suoi passi, quando chiamolla in ajuto. Chi dunque più atto del nostro Riccati ad interpretare i sensi di questo gran libro, e a penetrare nel cupo seno della Natura per fare acquisto d' ignote verità? Creò Iddio la materia per se inerte, ma creò parimenti una determinata quantità di forze, le quali investendo la materia stessa, e come che sia in quella insinuandosi, la scuotono, la spingono, la modificano giusta le regole costanti, che furono ad essa prescritte; e quindi nasce la serie successiva di cause e di effetti, che costituisce tutto questo sistema corporeo. Per la diversità delle circostanze, che cambiano la nomenclatura, e l' andamento delle forze, cresce oltremodo la difficoltà di tener dietro alla maniera, con che agiscono, onde accertare in ogni caso l'espressione appropriata della loro causa, e poterne estimare gli effetti; e diventa, per così dire, un labirinto a chi non ha il filo di Ariana per uscirne, voglio dire a chi non è pratico nella Matematica, e spezialmente nel calcolo infinitesimale. Avvegnachè molte e profonde sieno le meditazioni del nostro Riccati intorno alle fisiche leggi, ed abbia dimostrato parecchie verità non conosciute prima con Dissertazioni, e Schediasmi parte resi pubblici colle stampe, parte giacenti nell' oscurità dell' ombra privata; tuttavia per non entrare in una troppo lunga narrazione, accennerò così di passaggio alcuni suoi lavori Fisico-Matematici, perchè ci resti tempo a dire pur qualche cosa sopra di altri punti non meno importanti. E quì il leggitore mi onori di credere, che se tal ora trattò materie preoccupate, e sciolse Problemi fisici da altri Autori maneggiati; lo fece coll' intendimento di additar metodi nuovi, o più eleganti, di correggere qualche sbaglio, o di supplire a qualche difetto.

Col principio dell' indifferenza, e col metodo delle Azioni con facilità ed evidenza dimostra la legge dell' equilibrio, e la fa veder legge necessaria dipendente dalla natura medesima delle Potenze da Dio create. Allora due, o più Potenze riposano in equilibrio, quando si contendono il passo mutuamente con niso e momento uguale, e per opposta direzione: di modo che, supposto un minimo moto per uno spazio infinitesimo, le loro Azioni contrarie, cioè le loro forze applicate agli spazi percorsi, sarebbero perfettamente uguali. Questo metodo delle Azioni, sopra di che si è cotanto disputato, è il fondamento di tutta la Meccanica; ed egli ne fa uso costantemente. Anzi stupivasi assai, che alcuni celebri Fisico-matematici seguissero ancora il metodo Cartesiano dopo tutto ciò, che avea scritto il rinomatissimo Abate Vincenzo suo Fratello. Per questo anch' egli, e nella presente dissertazione, e in molti altri luoghi delle sue opere, richiama il lettore a riconoscere la certezza e generalità della sentenza Leibniziana.

Per la produzione però de' fisici effetti è necessario, che le Potenze sieno poste in movimento, ed esercitino le loro forze per ispazj finiti. Nelle perquisizioni pertanto di simili effetti ora si cerca la misura delle forze vive, ora del tempo, oppure della velocità ne' corpi solidi, non meno che ne' fluidi: quando si vogliono conoscere gli spazj percorsi, e quando le curve da' mobili descritte. Nella soluzione da lui fatta del Problema proposto a' Geometri Italiani dal Sig. Niccolò Bernulli, la curva richiesta dalle condizioni del Problema stesso non esprime altrimenti il viaggio del mobile, il quale si suppone cader da varj punti per la direzione delle assisse al centro delle forze collocate nel vertice; ma somministra le ordinate, che devono ugualmente proporzionarsi alle forze centripete, ed a' tempi della caduta. Il moto poi per la curva viene da lui considerato nella dissertazione sopra la forza centrifuga, di cui scopre la natura e la origine, dimostrando nascer quella da perdita di forza viva infinitesima di secondo grado in tempo infinitesimo di primo: in oltre considera il moto per la curva nella soluzione del Problema inverso delle forze centrali supposte in ragione inversa de' quadrati delle distanze, dove stabilisce anche i tempi periodici delle rivoluzioni: così pure nella soluzione di alcuni Problemi meccanici, in un de' quali esamina il moto de' Projetti, e in molti altri suoi lavori, tra i quali accennerò soltanto la figura del gorgo formato dall' acqua, che spiccia da un vaso cilindrico per un foro circolare aperto nel centro del suo fondo. Dopo i tentativi d'altri Matematici ebbe egli la gloria di quest' invenzione, che gli costò gran tempo, e non poche osservazioni difficili e laboriose. Mette poi a computo il tempo là dove dimostra vera l' asserzione del Galileo, che un grave scende più presto per un quadrante di circolo, che per la sua corda: siccome considera la velocità nell' esame della falsa ipotesi, che nel moto accelerato le velocità accettino le ragioni degli spazj passati, e nota l' inganno dello stesso Galileo, e di chi pretendeva di sostenerlo. Sarebbe un non finirla giammai, se tutte riferir volessi le sue fisiche speculazioni, che ascendono a un numero ben grande. Talvolta Egli tratta della forza viva di que' corpi, che girano intorno ad un asse verticale; tal altra contempla que' corpi, che ruzzolano sopra un piano orizzontale: alcuna fiata rintraccia e determina le leggi delle forze elastiche; e sovente si occupa nel far diligenti e giudiziose osservazioni sopra que' corpi solidi, i quali viaggiando per un fluido qualunque incontrano resistenza, e perdono velocità e forza, comunicando al mezzo resistente parte del loro moto, o tutto interamente. Passerò sotto silenzio questi, ed altri non pochi suoi lavori, benchè degnissimi dell' immortalità; ma non posso, nè devo esentarmi dallo spendere alquante parole sopra l' Opera insigne de' principj e de' metodi della Meccanica. Fu questo lavoro incominciato dal Conte Abate Vincenzo, e dovea contenere sessanta quattro capitoli, ma giunto l' Autore al vigesimo cessò di vivere, e lasciò imperfetta l'opera intrapresa. Il Conte Giordano, che ben sapeva il disegno del Fratello, la condusse al fine; e perchè potesse non per tanto attribuirsi al Fratello stesso, volle servirsi, per quanto potè, de' materiali, che trovò sparsi per le Opere, e per gli scritti di lui: ma è da dolersi, che non sia finora uscita ad appagare le pubbliche brame de' Dotti, che l' aspettano avidamente, e ad accrescere vieppiù la celebrità de' due rinomatissimi Autori fratelli. Se diasi pertanto un' occhiata alla moltitudine, ed alla scelta delle sue Produzioni, alla eleganza de' metodi, alla novità delle invenzioni, alla giustezza de' raziocinj guarantiti dalle fisiche sperienze, si conoscerà agevolmente che il Conte Giordano arricchì di non poche verità la Statica, la Dinamica, l' Idrostatica, l' Idraulica, e tutta quanta la Fisica. Nè si creda, ch' Egli inteso a calcoli sottilissimi, e assorto in profondissime speculazioni, abbia trasandata l' Architettura;

poichè di quest' Arte liberalissima grandemente si compiaceva; e se la ricevette dal Padre aumentata di nuove accessioni, spezialmente della media armonica, anch' egli non poco ha contribuito a renderla più ragionata e più perfetta. Per verità si mostra uomo grande anche in quest' arte scientifica, come può ognuno chiarirsi dai privati e publici edificj da Lui disegnati, e da alquante dissertazioni parte publicate, e parte inedite, nelle quali sviluppa e dimostra i principj di questa Scienza nobilissima, e ne deduce le regole più importanti.

Per un cumulo di scienza così grande riguardato era con parziale stima e benevolenza dal suo Principe, che soventi fiate gli raccomandò l'esame de' nostri fiumi; acciocchè avesse a suggerire i necessarj ripari, e le opportune operazioni per contenerli dentro agli alvei loro, e preservar così le campagne da' loro ribocchi, e allagamenti. Fu perciò decorato di Lettere orrevolissime, e di medaglie coniate per eternar la memoria de' suoi meriti e della sua virtù. Anche nell' ultimo anno della sua vita fu per Sovrana disposizione eletto Capo di una Deputazione sopra il corso della Brenta; e perchè la sua età avanzata lo dispensava dall' andar sopra il loco, quattro Matematici doveano assoggettar al suo giudizio le loro osservazioni e i loro computi.

Quantunque le cose fin quì narrate dimostrino ad evidenza che il Riccati pieno il petto di filosofia e di peregrine cognizioni potesse gareggiare coi più valenti pensatori del secolo decimo ottavo; tuttavolta posso asserir con tutta verità che queste sue eccellenti produzioni erano il frutto di alquanti scampoli di una lunga e prosperosa vita, a quando a quando ritagliati dalla principal sua occupazione. Comprende il leggitore, ch' io parlo della sua grand' Opera sopra la Musica lavorata pel corso di quaranta e più anni con tale esattezza di sperienze, e con dimostrazioni si ineluttabili, che sarà applaudita fino a tanto, che le scienze e le arti saranno in pregio. Per giungere a formar quest' Opera veramente classica prese le mosse assai da alto, v' impiegò lo studio di molti anni, corredossi di accurati esperimenti, smidollò tutta la materia con profonde meditazioni, superando affannose fatiche, e difficoltà gravissime. La grand' Opera, ch' Egli meditò di comporre, obbligollo a riscontrare quanto fu scritto dagli altri di Acustica, e di Musica, cernendo il grano dalla paglia e dal loglio, siccome fa in varj scritti, ove tenta e prova col suo crogiuolo le dottrine degli Autori più famosi, ne' quali pure trova della mondiglia. Risale per fino agli antichi Romani e Greci per conoscer le loro musiche cognizioni, e i loro principj. Ha dovuto per questo aprirsi la strada per mezzo all' oscurità e all' incertezza, sostenuto per altro da due saldissimi appoggj, evidenza di matematiche dimostrazioni, e verità d' esperienze, le quali Egli stesso si andava a mano a mano procacciando: nuovo Dedalo, dirò così, che si fabbricava l' ali da se medesimo per indi spiccare l' ardito volo securamente. La Musica si appoggia su fondamenti della Natura: conveniva dunque discendere ad un esame diligente e rigoroso de' primi suoi elementi. Le sue investigazioni sopra l' Acustica erano dirette a contemplare i suoni nella stessa loro origine, cioè nelle varie modificazioni de' corpi, che li producono. Quindi con ingegnosi calcoli e delicati misura la natural rigidità delle fibre e corde elastiche, e determina il loro allungamento, quando sieno da un dato peso sollecitate. Passa inoltre a considerare le vibrazioni delle corde intere, o delle loro parti aliquote; e secondo che più grosse sono, o più sottili, più corte, o più lunghe, più, o meno tese, ne raccoglie i suoni più acuti, o più gravi; e accerta le precise proporzioni de' tempi. Non meno attento si fu nel contemplare le compressioni dell' aere in ragione de' pesi aggravanti, e nel divisare le vibrazioni delle corde aeree ne' tubi cilindrici. Egli è profondo in ogni sua Opera, ma ne' suoi Schediasmi da me ora accennati sopra le fibre e corde elastiche, si fa vedere insuperabile. Tutto il mondo ha fatto giustizia al merito singolalare dell' Opera, quando comparve la prima volta in Bologna l'anno 1767; e furono applaudite le sue scoperte, ed approvate le sue decisioni parte favorevoli, e parte contrarie ad Autori di chiarissima fama, che qualche punto di cotali materie avevan preso a discutere. Anzi alcune difficoltà a lui proposte da un valente Matematico intorno a quella curva, nella quale ripiegasi la corda oscillante, lo impegnarono a portar tanto avanti le sue ricerche, che giunse a stabilire la equazione generalissima di tutte le curve bilanciate, ed isocrone. E avvegnachè i suoi pensamenti si accordino mirabilmente colla esperienza, è forza confessare, ch' Egli seppe ben interrogar la Natura, e strapparle il segreto de' suoi magisterj. Egli rende perciò ragione di molti fenomeni, che da nozioni le più interne ed arcane dipendono. Quel terzo suono, che s' ode nell' aria all' oscillar di due corde, se concorrano le debite condizioni, fu in prima dal Tartini osservato, ma ci voleva il Riccati a spiegarne la vera cagione. E parimenti se il Conte Jacopo suo Padre gli fece strada col suo esempio a calcolar la proporzione tra la forza degli oggetti esterni, e le sensazioni da essi eccitate; Egli valorosamente progredisce più là nell' ardua perquisizione, anzi a tal segno porta innanzi il passo, che nell' Opera del Contrappunto stabilisce, quali affetti possano muoversi nell' animo da suoni diversi: materia quasi del tutto nuova; poichè poco, o nulla è stato detto dagli altri sopra questa parte la più nobile, e la più importante della Musica. Usciti alla luce i mentovati Schediasmi, il nome del Conte Giordano Riccati Trivigiano, noto già e celebre, cominciò a non serbar più confini, a diffondersi e a suonar alto per tutta Europa in guisa, che ovunque sono in pregio le Scienze, conobbesi la inarrivabile forza ed estensione del suo ingegno, nè si dubitò di annoverarlo tra i primi Matematici del secolo decimottavo. Oltre agli accennati Schediasmi, v' ha non poche Dissertazioni acustiche ugualmente belle, utili, importanti, delle quali alcune videro la luce, restando l' altre an-

ançora nell' ombra di condizione privata; ma sì le prime, che le seconde sono produzioni degnissime del loro Autore, e in esse maestrevolmente dimostransi le più recondite verità di questa Scienza.

Dappoichè Egli rintracciò le sorgenti del suono ne' corpi, che lo producono, applicò le su riflessioni al mezzo per cui passa, cioè all' aere, che lo trasmette all' orecchio, esaminando quegli ondeggiamenti del mobile elemento, che ne sono il veicolo, il tempo, la velocità, e il modo di propagarsi. Anche sopra l' orecchio medesimo fa di molte speculazioni notomizzandolo filosoficamente, onde attignere dalla di lui struttura, e dalle parti componenti, la vera notizia del mirabile magistero uscito dal Facitore sapientissimo, per quanto l' occhio umano può penetrare in cotali recessi, pressochè inpenetrabili delle sensazioni. Tutti questi oggetti abbraccia Egli, e discute con lungo giro di profondi raziocinj in varj de' suoi scritti, e principalmente ne' sopramentovati Schediasmi.

Ecco pertanto con quali nozioni e principj si accinse il nostro Conte Giordano a insegnare le Teorie della Musica; ecco su quali fondamenti egli innalza il suo armonico edifizio. Dopo d' aver contemplati i suoni diversi in se stessi, passò a determinar le relazioni loro, considerandoli o successivi, o simultanei. La melodia si ottiene con suoni succedentisi in una serie ben ordinata e dilettevole, ed ha bisogno più di genio, che di regole e precetti; da' suoni poi simultanei risulta l' armonia, che domanda un grande apparato di cognizioni, di canoni, e documenti. Quando i suoni, per una cotal convenienza tra loro, fanno grata sensazione all' orecchio, si appellano consonanti; e di questi spezialmente si vale la Musica: ma in essa devono aver luogo tratto tratto anche i suoni dissonanti, che simili alle ombre della Pittura danno maggior risalto alle musiche consonanze, e soggiacciono a regole certe e invariabili, che dal nostro Autore sono spiegate ampiamente. È poi incredibile la esattezza, con cui determina la natura, e le ragioni de' tuoni, e de' semituoni, e l' origine de' due Modi, maggiore, e minore. Non lascia indietro i Modi derivati, e ne dimostra la utilità. Propone e rischiara i sistemi Diatonico, Cromatico, Enarmonico, e parla de' tempi, e della loro divisione in buoni e cattivi, e della loro pronunzia. Assegna in seguito le vere regole per gli Accordi, per li Passaggi, per le Cadenze, e per le Fughe. In somma egli è giunto a prescriver le leggi tutte del Contrappunto coll' esaurire completamente la vasta materia, maneggiandola con tanta sottigliezza e precisione, e con tal rigore di computi e di raziocinj, che quest' Opera potrà considerarsi il vero e perfetto Codice delle leggi della Musica. Non ne parlerò di vantaggio, perchè avendone l' Autore pubblicato il saggio fino dall' anno 1762 può ciascheduno argomentar da questo eccellente compendio quanto sia grande il pregio dell' Opera intera. Tentò più volte di donare al Pubblico l' Opera stessa, ma non potè mai effettuare questo suo desiderio per varie cagioni, che stornarono sempre sì lodevole disegno, e intanto sopravvenne l' ultimo giorno di sua vita, che fu il vigesimo del mese di Luglio dell' anno 1790. Tutta la Città fu grandemente commossa, e comune fu il lutto, perchè il trapassato possedeva il cuore di tutti. Molte e vive dimostrazioni di dolore si diedero da ogni ordine di Persone, ma particolarmente dal Collegio amplissimo della Nobiltà, a cui apparteneva in singolar modo, e di cui era perciò maggiore la perdita. S' ei fu ricco cotanto di virtù intellettuali, non era meno fornito di quelle del cuore, di pura Religione, e di cristiani costumi. Quindi potè con animo confidente incontrar l' ultimo passo assistito dagli amorosi ed efficaci ajuti della Chiesa, e andarsene a godere, e a contemplar la verità nell' eterna sua sorgente, dopo di aver con indefesso studio procurato di conoscerla di quà ammirando le sue emanazioni negli enti creati, e dopo di averla adorata con ossequiosa venerazione sotto a' velami della Fede.

ELOGIO

Di Giovambattista da San Martino

SCRITTO

DA IPPOLITO PINDEMONTE

Ricevuto il dì 9. *Dicembre* 1801.

Non è chi non sappia quanto le arti d' ogni maniera, e quelle scienze, che a regolar si fanno le operazioni dell' arti, possano al bene degli uomini, ed al comodo loro in questa difficile e scoscesa vita contribuire. E però non saranno mai ringraziati abbastanza quelli, che tali scienze coltivano, e fatiche incontrano, e affanni, acciocchè i lor simili più agiati abbiano ad essere, e più felici. Vero è che da quelle cose, che utili tornano agli altri, trae la stessa utilità a un tempo chi le inventò: come colui, che illuminando agli altri la oscura strada notturna, viene ad illuminarla anche a se medesimo. Ma che direbbesi di quell' uomo, che passando volontariamente i suoi giorni nell' austerità, e nella privazion quasi totale di quanto i sensi lusinga, pur facesse di accrescere e di moltiplicare i piaceri onesti degli uomini; che s' occupasse nel renderli più doviziosi, benchè consapevole di non dovere uscir mai della povertà; che si studiasse di abbellire un mondo, di cui egli non gode? Non meriterebbe forse d' esser rassomigliato a un celeste spirito, che tra gli abitatori d' un qualche pianeta si contentasse di soggiornare, promovendo tra essi quella felicità, che non può per la diversa natura sua divider con essi, e quindi altro compenso non ricevendo, che la nobile compiacenza di porre in miglior condizione, che nol trovò, quel fortunato pianeta? Tale agli occhi miei si presenta Giovambattista da San Martino, che non avrà nè meno il compenso d' un buon lodatore, poichè fu imposto a me il carico di lodarlo.

Se non vogliam pensare col volgo, poco rileva per un grande uomo, che a lui manchi una patria illustre. Ma non rileva già poco per un luogo picciolo, e per sè oscuro, ché in esso nasca quell' uomo, dal quale, come da face, che ivi s' accenda subitamente, venga in singolar guisa illustrato. Tanto può dirsi di quel villaggio della Marca Trivigiana, che detto è San Martino di Luperi, e gode ora d' una celebrità, che non osava prima nè sperar pure. In sen di questo fu Giovambattista da un buon Sacerdote per la carriera degli studj primi guidato; e tra le cose, che meglio imparò, il pericolo fu d' una vita libera e indipendente. Quindi cercò rifugio tra una compagnia religiosa, ed in Bassano, d' anni ancor fresco, vestì con l' abito di Cappuccino quell' amor d' evangelica perfezione, che solo può render leggera, e molle qual veste è più ruvida, e più pesante. Sino a quel tempo però, ed appresso ancora non si vide scoppiar da lui favilla d' ingegno: intanto che quegli ottimi Padri, riguardandosi scambievolmente, diceano come di poca utilità all' Ordine il nuovo compagno riuscirebbe. Ma non potè nascondersi, io credo, agli occhi più acuti d' un Padre Filippo da Verona, che frequentò, essendo ancor Prete dell' Oratorio, la casa, per non dire la scuola, di quel lume d' Italia Scipione Maffei, da cui sappiamo che fu grandemente pregiato; e certo, uomo com' era non men di accortezza fornito, che di Dottrina, veduto avrà in quell' aurora di nuvoli ricoperta il giorno più chiaro e più scintillante. Nelle sue mani posto venne il giovine cenobita, fatta ch' ebbe questi la solenne sua professione. Poco nondimeno nelle scienze sacre avanzavasi, e non molto nelle teologiche disputazioni spiccava: Egli andava crescendo come quegli alberi, che son di fibra tanto più forte, quanto crescono, e s' infrondano più lentamente.

Dopo anni sette di studio si rivolse alla predicazione. Ma non avea lena bastante, e desiderar lasciava quegli esterni doni della persona, che parvero sì gran cosa a un Demostene, e che certamente fan tanto: onde quel celebre Areopago, che ne conoscea l' efficacia, e temeane la seduzione, udiva, come ciascun sa, nelle tenebre gli Oratori. Dunque nell' arte ancora del dire affaticò egli con poca fortuna l' ingegno: del che io non voglio punto maravigliarmi. Conciossiachè ove distinto si fosse nella erudizion sacra, e nella sacra eloquenza, veduto si sarebbe in lui ciò, che videsi, eziandio a questi tempi, in altri Religiosi di quel rispettabile Ordine, i quali e per erudizion sacra, e per sacra eloquenza non debolmente risplendono. La natura dunque non avrebbe allora formato di lui un uomo straordinario, come a me parve sempre ch' ella di fare intendesse: quindi creollo per quelle discipline appunto, dalle quali tutto ciò ch'egli vedea, che ascoltava, e la mancanza massimamente d' ogn' incoraggiamento, d' ogni comodo, d' ogni sussidio dovea rimuoverlo. Quindi, mentre tutto alla predicazione il chiamava, nelle scienze fisiche il gittava ella. E' vero, che l'Orator sacro non ha per avventura uno scopo così diverso, come sembrar può su le prime, da quello in cui mira il coltivatore delle scienze suddette. Certo ambidue, comecchè per via differente, e in differente modo, pur tendono alla stessa meta, cioè allo scoprimento de' secreti della natura. L' uno cerca questi ne' diversi corpi e nelle parti più intime de' medesimi. L' altro adopera soventi volte lo stesso negli animi, dal fondo de' quali cava que' secreti, che non di rado agli occhi nostri ancora si celano; ei dà a conoscere il nostro cuore, facendone quelle analisi, delle quali non so se il Chimico ne abbia di più difficili e delicate; notomizza, per dir così, le passioni, e la ragione medesima, che cerca scusarle, e spesso, come sì elegantemente s' esprime Aristotele, a filosofar s' unisce con quelle. Ambidue la natura cercano dunque; ma questa volea essere dall' osservator nostro anzi, che negli animi, investigata ne' corpi, ed in questi disposta era a disvelargli alcuno di que' suoi arcani, che il desiderio sono, e la disperazione di tanti investigatori.

Furon pertanto bene inspirati i Superiori suoi, quando il fecero discender dal pulpito, ed entrare nell' ospital pubblico di Vicenza, che alla sua umanità e religione venne afſidato. Quivi potè meglio attendere a quelle scienze, che prima stavano troppo a disagio nella ristretta sua cella. La Meccanica particolarmente non potea quasi muoversi, e già temea non ſosse costretta d' abbandonarlo. Quel soggiorno di miserie umane divenne dunque per lui un luogo desiderabile e bello, nel quale soddisfacea ai doveri del proprio stato e coltivava ad un tempo gli studj più cari, con un passaggio dagli uni agli altri tanto più naturale e facile, che il bene della sua spezie era così negli uni, come negli altri, l' oggetto suo principale. Quindi ora il veggo al letto degli infermi, e de' moribondi, confortar quelli nelle lor pene, e sostener questi in quel terribile salto col quale da un mondo all' altro l' uom passa: ed ora il trovo, che l'occhio della mente rivolge alla condizione, ai bisogni, e ai desiderj ancora degli uomini tutti, ed or pensa a chi tuttodì s' affatica, ma non sempre col debito frutto, e quando a chi gode delle altrui ſatiche, ma con sì poco discernimento sovente, che sembra voler coloro, che più che al piacere, al travaglio nacquero, consolare.

Tra questi tengono il primo luogo gli agricoltori: gli agricoltori del cammino pur troppo ignari, come chiamolli Virgilio, che per compassion di loro, se a lui crediamo, dettò le sue immortali Georgiche. Ma le immortali Georgiche servon bensì al diletto di alcuni spiriti privilegiati, all' utilità de' rozzi coloni non servono; e lo stesso dicasi d' altri infiniti libri per niuno così men fatti, come per coloro, in grazia de' quali si vantano d' esser fatti. Conveniva pertanto pensar d' un mezzo non meno agevole, che sicuro, onde ammaestrare i contadini così radicati nelle antiche loro abitudini, che nol son più nel terreno quelle piante, tra le quali essi vivono. E perchè, dicea il Padre da San Martino, non si potrebbe prendere da ogni terra, villaggio, e borgata uno o più direttori agrarj così ne' principj, come nella pratica d'una buona agricoltura bastantemente versati, ai quali dati fossero da instruire tutti que' giovani del distretto, che nella importante arte loro esercitar dovranno le naturali lor forze? Si temerà, che manchino tali direttori? Un premio alla fatica proporzionato non li farebbe là nascere, dove mancassero? Basterà dunque persuader coloro, che al timone son delle cose pubbliche, nel cui numero molti certamente si trovano in questa età, che magnifici sogni non chiamano i progetti tutti degli scrittori, forse per non aver l'incomodo di porre il loro studio in alcuno.

Punto essenzialissimo nell'arte agraria è la debita ripartigion de' terreni tra le praterie, e i seminati. Il Padre Giovambattista, trascorrendo dal fondo del suo ritiro con occhio erudito le nostre provincie, vide non senza dolore, che troppo picciolo spazio lasciano gli orzi e i frumenti alla pingue medica, ed al fecondo trifoglio. Mancheran dunque al campo gli ingrassi, all'aratro i buoi, ed anche al macello: molte materie prime, scarseggiando il bestiame, verran meno a non poche arti, ed uscirà l'oro fuor dello stato per l'acquisto pericoloso di quegli Animali stranieri, che una epidemia allo stato fatale recheran forse nelle contaminate lor viscere. Era facile l'avvedersi di questi mali dalla malvagità cagionati del ripartimento introdotto: ma facil non era il dimostrare con industriosi ed esatti calcoli qual esser dovesse il più vantaggioso a introdursi, e alle circostanze nostre locali più accomodato. Ed è vero, che la subita esecuzion d'un sistema, che i prati stendesse, e ad occupar li recasse due quinte parti di tutto il terreno fruttifero, incontrati avrebbe ostacoli non leggeri: ma era proprio d'una salutar novità l'incontrarli, come il fu dell'accorta e vittoriosa penna del nostro autore il distruggerli.

Vide ancora quanto vantaggiosa riuscir potrebbe una coltivazion del frumento altra da quella, che oggidì tiene; e la bella dissertazione, ove il metodo si dichiara di prepararlo e piantarlo, piacque tanto ad una società Georgica della Dalmazia, che nella lingua Illirica recar la fece, volendo che alla pubblica instruzione servisse, quantunque di maestri nelle dottrine agrarie quella provincia non manchi. Nel che saviamente imitò, se m' è lecito un tal paragone, l' esempio del Senato Romano, il quale, benchè di libri d' Agricoltura Roma non fosse priva, quelli possedendo già di Catone, sì nel Latino idioma volle trasportati i volumi, che delle cose della villa il Cartaginese Magone avea scritti.

Vide quanto migliorar si potrebbero i vini Italiani, e non potendo sfuggirgli di quanta utilità tornerebbe alla nazion tutta questo miglioramento, così ben soddisfece alle domande su questo soggetto della Reale Fiorentina Accademia de' Georgofili, e di quella importantissima operazione, che dicesi fermentazion vinosa, a lei ragionò così dottamente, che n' ebbe l' onor d' un *accessit*, se quello non riportonne d' una corona. E ben conobbesi poco stante, quanto ad una corona avvicinato allora si fosse. Conciossiachè domandato avendo la Società Patriotica di Milano agli studiosi Italiani la più acconcia maniera, e alle varie circostanze della Lombardia Austriaca la più adattata, di formare i vini, e di conservarli, così l' Autor nostro degli accurati suoi esperimenti, e delle acute osservazioni sue si giovò, così ordinatamente e ampiamente trattò il suo argomento, e con tanta cognizione ad un tempo le convenienze particolari della Provincia Lombarda, benchè forestiero, discusse, che quel premio colse in Milano, al qual solamente avvicinato s' era in Firenze. Laonde io non mi maraviglio punto, se alcuni anni appresso un altro premio egli ottenne, che fu quello dell' Accademia di Belluno, la qual seppe da lui, perchè i succhi della Bellunese uva sieno tartarosi e poco robusti, e l' arte imparò di levar via da essi quelle colpe, e di perfezionarli . Parecchi , nol niego , sarannosi in questa bella parte di rustica economia con felicità adoperati : ma non so se altri mai al suo fianco avesse una Fisica , ed una Chimica sì diligenti e sì destre , o se in mano uno strumento tenesse a conoscer le buone , e le ree qualità del mosto così perfetto , come l' Areometro , o sia Pesa-liquori da lui maneggiato , e che si fabbricò egli medesimo , non contento degli usitati, e nè anche di quelli del Signor Beaumè più famosi . Chi non riconosce l' importanza di queste intraprese ed il pregio , è un barbaro , che nè men vede quanto alla sanità degli uomini , non che alla delizia , il dono della vite contribuisca ; e quanto ancora alla nazionale ricchezza, che verrebbe non poco accresciuta , se invece di seguire il caso , che in qualche luogo soltanto può far giungere i vini a un certo grado di squisitezza , o i falsi metodi , che non li faran mai giungere a verun grado in luogo veruno , volesse l' Italia le regole seguitare sì nel formarli , sì nel custodirli , da questo suo figlio prescritte : poichè allora non solamente sarebbero allegre senza bottiglia straniera le nostre mense, ma le altre nazioni chiamerebbero a sè la nostrale , che sino ad esse pervenir potrebbe , reggendo al trasporto , e alla navigazione , anzi traendo vigor dalle scosse , e grazia , direi quasi , dalle tempeste .

Taluno crederà forse quì terminare i trionfi del nostro scrittore : ma non è vero . Ricevette una corona dall' Accademia ancor di Vicenza , e a buon dritto ; quando , vincendo i suoi concorrenti , vinse ancora e debellò un nemico terribile delle piante , e di coloro , che le coltivano , cioè quella nebbia , che le offende non di rado e le uccide . Io non saprei per verità dichiarare , se più sagace e profondo egli si palesi o nel determinar la vera indole di tal malattia , o nello stabilire le cause , dalle quali deriva , o nell' indicar que' rimedj , che possono superarla , o impedirla . Dirò bensì , che io più non incolpo di quel malore nè , con pace del celebre Vallisnieri , i piccioli vermi , che alcuna volta appariscono, forse perchè la materia della nebbia serve loro di nutrimento, e lo sviluppo favorisce de' germi loro; nè, con pace dell' immortal Galilei, le gocciole di pioggia, o rugiada, che pigliando su i vegetabili la figura d' un emisfero, faccian le veci di altrettante picciole lenti piano-convesse, veci che far non possono, non incendendo una lente i corpi, che alla distanza del fuoco suo, ed essendo, questa per quantunque si voglia poca, sempre più là dell' immediato contatto: ma non dubiterò di far consistere il malor suddetto in una ostruzione de' vasi alla insensibile traspirazion destinati. Dirò che una tale ostruzione vien causata da quel misto di esalazioni e di vapori, che formano un malvagio stato di viscosa materia alla superficie de' vegetabili. E finalmente ringrazierò l' Autore de' rimedj che adopera, medicando il grano, seminandolo rado, ed altre avvertenze usando, onde preservar le piante, se ancor sono illese, o ben bene scuotendole, ma in diversi modi secondo i casi, e le spezie diverse, ed anche, quel che sembra più sicuro, inaffiandole, ove le piante sieno già guaste, e vicina sentano quella morte, che ritorna indietro ingannata.

Si potrà dire pertanto, che se non ebbe il nostro scrittore altri premj, fu perchè Accademia veruna gli argomenti non propose dell' altre sue opere: intanto che non mancò propriamente alle opere il premio, ma solo la condizione, che stati ne fossero gli argomenti da un' Accademia proposti. Non mancò dunque la corona, nè a quello scritto, in cui cerca donde somministrata venga alle piante tutta quella quantità d' acqua, che al loro nutrimento è richiesta; nè alle sue riflessioni su la maniera di preservar gli alberi dai tristi effetti del ghiaccio; nè a quella memoria intorno al modo di conoscere il mefitismo, o sia l' irrespirabilità dell' aria; nè a quelle ricerche a rintracciar dirette la causa del movimento della canfora alla superficie dell' acqua, e della cessazion del medesimo. Ma la vera, e più dolce ricompensa per lui, quella, cui egli particolarmente anelava, era il diletto puro e sue sublime d'avere insegnato cosa, che utile tornasse di qualche modo ai suoi simili, come colui, che tanto stimava impiegate bene le sue fatiche, quanto eran queste al comodo, ed al piacere della società tutta rivolte. Quindi or s'argomenta di rendere più economico il consumo di quel liquore, che arde continuo innanzi agli altari, e che le veglie illumina de' Sapienti; or conferma con nuove sperienze il metodo di costringere il miele a far le veci di quel sale prezioso e dolce, che estratto vien da una canna. Mancano le legne ai camini, che dall' odierna mollezza così veggiam nelle case moltiplicati, ed egli corre al riparo: il ghiaccio manca talvolta, ed egli un mezzo facile addita, onde procurarcelo artifiziale in qualunque tempo, correggendo, come studiò di fare quelli del verno, gli incomodi ancor della state: ed ora a costruire insegna una nuova stadera portatile ed universale: e quando rivolge l'animo anch' egli alla cura difficile di quella Epizoozia, che tanta parte attristava della miserabile Italia. Oggetto non v'era, che troppo tenue sembrasse a lui, e non degno di filosofica meditazione, sol che da quello prometter si vedesse, o dare almen la speranza di qualche pubblica utilità: e però lungi dal condannarlo, ch' egli talvolta a ricerche troppo picciole s' abbassasse, parmi anzi meritar lode grandissima, che avesse in dispregio pel vantaggio degli uomini quell' accusa, e si contentasse, per essere ancor più Filosofo, meno ad alcuni parerlo. Mi piace quindi vederlo creare una nuova penna da scrivere, chè sì comoda riuscir dovea ai viaggiatori massimamente. Mi piace vederlo esaminare qual sia il migliore di tutti que' mezzi, che suggeriti vennero a procurarsi istantàneamente un lùme, del che tanto gli artisti si giovano, e coloro che opera danno ai Fisici, e Chimici esperimenti. Non fabbricò forse le più ingegnose armi contra quegli insetti, che turbano i nostri sonni? Certo dileguò in parte i timori di alcune persone, liberando le campane dalla taccia di attrarre i fulmini, non solo col bronzo, onde son composte, ma col movimento ancora, che ad esse vien dato: giacchè quanto al dileguar que' timori in tutto, ciò solamente far puossi col munire ogni sacra torre di quel metallo, che i fuochi elettrici chiama, ma per estinguerli.

Forse diranno alcuni, che se alcune delle opere, che io venni accennando sin quì, ricche sono di osservazioni sagaci e nuove su la natura, vuolsi attribuirlo in gran parte all' avere usato Giovambattista da San Martino un microscopio di tal perfezione, qual noto non era prima di lui. Ed a ciò io non contrasto. Ma chi recò a quella perfezione tale strumento? Giovambattista da San Martino. Nè già d' un eccellente microscopio soltanto fece egli dono alla Fisica. Le fece dono ancora d'un Barometro portatile semplicissimo a cui confessan di dover cedere quelli d' un De Luc, e d'un Beccaria. Le fece dono d' un nuovo ingegno, con cui misurar comodamente le svaporazioni, o sia d' un nuovo Atmidometro. Dono le fece d' un Igrometro nuovo. Ella veramente avea già parecchi Igrometri a spugna, a corda di canape, o di minugia, a pelle, a carta, ed a paglia ancora, ed a penna, e ad avorio, ma l' averne appunto tanti mostrava, che soddisfatta non era d' alcuno. Comparve poi l' Igrometro a cappello del celebre de Saussure, ed ella sembrò contentarsene. Ma questo cominciò a divenirle non caro, presentato ch' ebbe l' Autor nostro il suo a tunica vellosa, ch' è la più interna delle cinque membrane, onde vestiti son gli intestini, e che, d' un terzo almeno, è più sensibile del cappello. Finalmente le presentò un nuovo Eudiometro, che a lei piacque, avvegnachè possedesse quello a gas nitroso del Signor Fontana, e l' altro a gas idrogeno del Signor Volta. Ho già indicato un Areometro, di cui veggiamo la descrizione tra le Memorie della *Società Italiana*: Areometro universale, servendo per ogni liquore, all' intelligenza di tutti adattato, e manesco per tutti; comparabile in guisa, che quanti costrutti vengano secondo i principj medesimi, sien consentanei a sè medesimi sempre, ed immersi nel fluido istesso, mostrino sempre lo stesso grado. Ma questo strumento non fu così dato alla Fisica, che altre scienze, ed alcune arti e manifatture l' uso non ne dividan con essa. Ne dividon l' uso la Chimica, la Farmacia, e quelle, che s' affaccendano intorno ai colori e alle droghe, e l' altre, che intorno ai sali, zuccheri, saponi, e nitri non cessano di travagliarsi.

Men grato forse sarà riuscito alle scienze quel nuovo Termometro suo a Mercurio, il quale, mediante un indice, che gira sul proprio asse, viene indicando i gradi della temperatura alla circonferenza d' un quadrante notati: dico men grato quando convien confessarne, ch' è per gli sperimenti, da preferirsi l' antico. Ma convien confessare ancora, che il Termometro ad Indice vanta alcune doti sue proprie: lasciando che altri, se vuole, col Barometro a Indice dell' Hook il confonda. Servo, potrebbe dire, a tutti gli usi della società, e della vita, ove non si esiga una estrema dilicatezza, nè v' ha occhio, comechè indebolito ed infermo, al quale scortesemente io mi sottragga. E a non parlare del meccanismo nuovo, e ingegnoso, che pur merita lode, vengo ad ornare con la mia forma non poco elegante la stanza, ove son riposto. E non è forse da considerarsi la bellezza negli strumenti? Non può forse anche questa allo studio invogliar della scienza? Non ha dunque essa pure la sua utilità?

Così dir potrebbe il nuovo Termometro, di cui abbiamo la descrizione ne' volumi della *Società Italiana*: mentre io passo tosto a ringraziare il Signor Camus, che tutto inteso com' era agli sperimenti elettrici, volesse ancora accertarsi, se i liquori elettrizzati divengono più leggeri, o pesanti più, e così prestasse occasione alle belle riflessioni del nostro Autore su tal proposito, che fregiano anch' esse i suddetti volumi. Vedesi pur ne' medesimi, con qual destrezza e valore l' Autor nostro a rintracciar si facesse l' origine del Carbonio, che trovasi ne' vegetabili, seguendo fedelmente i Inluminosi vestigj di quella giovine chimica, che disprezzando l' antica, passò dalla Francia, in cui nacque, all' altre nazioni, ed or va per le scuole e per le Accademie d' Europa così applaudita, e orgogliosa. Egli non dubita punto della verità delle teorie nuove, e risguarda con occhio di compassione i tempi passati. Ma ne' tempi passati non avean forse i Filosofi la stessa fiducia nelle teorie loro, e non rivolgeano indietro gli occhi con la stessa compassione ai loro predecessori?

Comunque sia, quello, che mi par certo, si è che Giovambattista da San Martino coglieva sempre l' opportunità di scriver cosa, che in vantaggio, e in diletto della società umana tornasse. È nell' ospital di Vicenza, ove una state regnar vede con dolore certa febbre acuta, e maligna; nè pargli poter sollevarsi da quel dolore, se non pubblicandone un ragguaglio esatto, che serva di norma in ogni luogo per l' avvenire. Si trova due volte in Zara; e le più diligenti osservazioni meteorologiche sono in quella Città una delle sue occupazioni più dolci. Le medesime osservazioni di far non lascia in Vicenza, che più anni ebbe la fortuna di possederlo, ed il merito di saper conoscere la sua fortuna. Sino a un ventaglio può vantarsi d' un suo nobile scritto, che la teoria ne contiene. Nè trattasi già di quella teoria morale, e galante, che veggiamo insegnarsi al bel sesso dallo Spettatore Inglese con tanto garbo, ma che niun savio uomo alla penna domanderebbe d' un Cappuccino. Si tratta di spiegare fisicamente, come a prodursi venga quel piacevole rinfrescamento, che si prova nel bollor della state all' agitar del ventaglio. Il che fece con tanta dottrina, quanta non s' aspetterebbe in tale argomento, e quanta bastar ben può a contentare il Fisico più difficile e schizzinoso, non che la colta Dama, che di quella spiegazione domandato lo avea, punta da una di quelle curiosità, che non sogliono inquietar molto le Dame, e dalle quali pochi ancora son gli uomini, che si lascino molestare.

Tante sue illustri fatiche aveano così sparso il suo nome per tutta Italia, che quando egli si diede a viaggiar per essa, luogo non fu, ove non trovasse molti ammiratori. E tali erano i costumi suoi, che non fu luogo, ove non lasciasse, partendone, molti amici. Far possono fede così dell'uno, come dell' altro, anche le tante Lettere scientifiche di valenti uomini a lui dirette, e pubblicate già con la stampa. Parlator felice non era, ed aveano alquanto del rozzo, se credo ad alcuni, le sue maniere: forse la barba, e il vestito avran fatto parere più ruvide, che non erano, le maniere ancora. Ma sotto quella lunga barba, e quel grosso panno si nascondean gli affetti più dolci, i più nobili desiderj, e quella vera filantropia, o generale benevolenza, che sta su le bocche di tanti, e nel cuore di così pochi, quella filantropia, che tanto è più bella di tutti gli altri amori, e di quello stesso di patria, quanto è più disinteressata, e che fuor della patria estendendosi, della qual però sempre rispetta i diritti, ed il Mondo tutto abbracciando, ha men dell' umano, che del divino. Fu questa, che sostener gli fece tante veglie, e fatiche tante: giacchè considerando ciò, che da lui volea il severo professato istituto, e quello, che a lui domandavano le professate difficili scienze, bisogna dire o che riposo non v'era per un tale uomo, o ch'era riposo, non già la cessazione, ma sì la mutazion del travaglio. Fu questa, che accompagnandolo sempre ne' suoi viaggi, il rendea osservator così diligente dell' indole de' terreni, della qualità delle produzioni, e dell'azione delle macchine dotte, onde s' adornano le Università, e spesso ancora, e meglio, che della seta e dell' oro, i principeschi palagj. Non parlo delle molte Accademie, alle quali fu ascritto. Dirò piuttosto, che gli occhi rivolse a lui dal suo trono il Re delle due Sicilie, e che Acton di lui ministro alla Università di Catania invitollo, mostrandogli colà una cattedra di Agricoltura; che non desiderava essere occupata, che da lui solo. Ma destinato era, che la Dalmazia, non la Sicilia, godesse di quegli influssi benefici, de'quali è sempre cagione l'apparizion dell' uom grande a quella terra, sopra cui egli, quasi novello astro, risplende. Perciocchè volendo nel tempo stesso giovarsi dell' opera di Giovambattista da San Martino la sua Repubblica, questi amò meglio, come proprio è di ogni savio, render servigio al naturale suo Principe, che non al Principe forestiero, e prontamente ai littorali si recò dell' Illiria, ov' era chiamato da un nuovo stabilimento utilissimo già crescente, ma che di sussidj ancora, onde a perfezion giungere, abbisognava.

Una pianta straniera, divulgata prima sotto il nome di Nicoziana, o d' erba della Regina, poi sotto quel di Tabacco, due secoli fa nota appena, e negletta in Europa, proscritta da molti Sovrani, e tra gli altri dal Czar, dal Gran Signore, e dal Re di Persia, ed all' uomo, di cui deturpa la faccia, come più dannosa, che utile, per varie ragioni riconosciuta, salì nondimeno col tempo in pregio sì grande universalmente, ed ora tra i bisogni immaginarj, o piaceri artifiziali, che dicansi, tiene un tal posto, che non v' ha forse esempio più luminoso d' una usurpata riputazione, e d' una fortuna non meritata. Benchè pianta perenne sia nel Brasile, ed anche verso il seno Persico senza industria veruna germogliar sappia, è però annuale tra noi, e domanda coltivazione, non che terreno particolare. Quel di Nona in Dalmazia, ove praticar si voleano le piantagioni considerabili, delle quali or parlo, potendo dirsi un miscuglio di argilla, di minutissima sabbia, e di terra vegetabile, parve tosto promettere una vegetazion prospera e rigogliosa: lasciando, che le pietre calcarie, onde si compone in parte l'ossatura di quelle colline, favorivan non poco una pianta, com' è il Tabacco, alcalina. Nè solamente il genio del suolo, ma osservar bisognava i costumi ancora del cielo, e interrogar sopra tutto il vento di Tramontana, di cui non parve che molto a temer s' avesse in un clima, ch' è de' più temperati, e men soggetti a que' crudi venti, da' quali dominata è l' Itaè l'Italia settentrionale. Ma essendosi rotto allora un terreno, che non avea sentito da parecchi secoli la man dell' uomo, dovettero svilupparsi da esso quelle nocevoli esalazioni, onde vennero le malattie, e le morti, che nel principio i sospesi animi conturbarono, e delle quali meno ancora è da maravigliarsi, ove si consideri, che in vicinanza alla terra smossa acque stagnanti trovavansi, ed importune paludi. Si credette però, che a misura che si andrebbe d' anno in anno domando il campo, ed aprendo una strada comoda all' acque, un aere respirar potrebbesi meno insalubre, e più terso: e indarno non si credette. Il Tabacco stesso conferì non poco al miglioramento di quell' atmosfera, come se volesse, per una spezie di gratitudine, alla vita de' coltivatori suoi provvedere. Perciocchè essendo vero, che le piante, ove la luce del sole percuotele, per l' aria impura, che assorbono, la più purgata rendono, e più balsamica, ed essendo vero non meno come le sperienze di Giovambattista insegnarono, che le foglie del tabacco rendon quest' aria vitale più copiosa, e più benefica ancora, che non fan gli altri vegetabili, quanto non doveàn correggere quell' atmosfera le nuove piante, onde rivestite verdeggiano così spaziose campagne? Senonchè tutto questo ancor non bastava, stanteche dal non lontano Porto di Nona, come da quello, le cui acque son molto pannose, e d' erbe guaste e di corrotti insetti ripiene, recavano i venti meridionali non poco danno e spavento. Fu quindi suggerito di far prendere un' altra via al fiumicello limaccioso, che mette foce in quel porto, e di costruire ad un tempo alcune fornaci, che non invidierebbero i più pregiati ventilatori: perchè se il fuoco vizia l' aria, e la converte in gas carbonico idrogenato, non lascia già di emendarla, ove sia, come appunto è quella, di cui si tratta, umida ed alcalescente. Ma quando è mai, che la forza, che concepisce, contenta appieno di quella, che eseguisce, rimanga? No, la ricolta non torna così ubertosa, come potrebbe aspettarsi. Le piantagioni, delle quali testimonio è anche il Giugno, esser vorrebbero nel mese di Maggio compiute: ampliate le praterie artifiziali, ed il numero degli Animali lavoratori accresciuto: gli edifizj, comechè vasti, si domandano una estensione più grande: gli alberi son troppo vicini un dell' altro, non senza lamento delle sottoposte piante, che defraudate rimangono in parte della bramata luce solare. A questi suggerimenti ne aggiunse molti altri Giovambattista da San Martino, cioè l' osservatore più diligente, l' agricoltor più sperimentato, l' uomo in una parola, per cui animosa troppo non dovrebbe parer la speranza, che non s' avesse a dipender più dall' altre nazioni riguardo a una merce di tanto consumamento, e della qual non v' ha forse inutilità dagli uomini più cercata, o superfluità, se così posso esprimermi, più necessaria.

Furon lodati que' capitani delle antiche Repubbliche, i quali dopo il libero esercizio d' un gran potere alla testa de' loro eserciti, tornati dalle spedizioni loro, rientravan tosto nella sommessione alle leggi e nella modestia di semplici cittadini. Ed io non dico, che ciò non abbia del maraviglioso: dico più maraviglia dover destare quell' uomo, che dopo esser vissuto per molti mesi signor del suo tempo, e quasi libero e indipendente, rimettesi a un tratto sotto la più cieca ubbidienza, le sue catene contento riprende, e seguita quella legge austera e inflessibile, che l' uso prescrive di qualunque ora, e non men che del giorno, è arbitra della notte, di cui tronca improvvisamente i sonni, e li converte in salmeggiamenti. Senonchè altri forse risponderebbe, che là minore è la maraviglia, dove i motivi non sono umani, e dove un' assistenza dall' alto si dee supporre. Comunque sia, ritornato il Padre da San Martino dalla sua onorevole spedizione, e nella vita rientrato di umile Cappuccino, gli fu subitamente imposto da' suoi Superiori il carico di ammaestrar nelle Lettere e nelle scienze i giovani religiosi, quel che i suoi Superiori volean far molto prima, e potuto non avean mai. E già gran lusinga era di vedere in breve uscir da lui quegli alunni, che degni fosser di lui. Speranze brevi e ingannevoli! Piacque invece all' ente supremo, che delle fatiche sin quì durate quel premio egli ricevesse, rimpetto al quale cadono tosto sfrondate e appassite le corone delle Accademie, e l' applauso, ch' esce dalle bocche degli uomini, alcun suono nell' aere più non risveglia. Mancò di vita sul principio dell' anno mille ottocento, e nel sessant' uno dell' età sua, quando verde ancora, e robusto potea di nuove opere arricchir l' Italia, che, avvolta in altre sventure, non sentì forse, quanto dovea, quella d' averlo perduto.

Ma quantunque stata sia per noi la carriera sua troppo breve, non so, se non sarebbe stata soverchia per lui, e non punto desiderabile, una più lunga carriera. Visse, è vero, abbastanza, ond'esser testimonio di molti mali, e onde veder disseccate in parte quelle sorgenti di nazionale ricchezza, alle quali consecrato avea tanti studj. Ma testimonio non fu di quanto avvenne in quest' ultimo tempo, nel qual più fatale ci riuscì forse una guerra di pochi giorni, che quella non ci tornò di parecchi anni: non vide due nemici eserciti passar l' un dopo l' altro su i campi stessi, e l' uno devastar ciò, che potè all' altro sfuggire: non udì tra le tenebre della notte misti ai gemiti ed alle grida de' fuggitivi coloni i colpi di quelle scuri, che degli alberi ancor più utili spogliavano le campagne, e con quelli la speme ancora de' futuri dì recidevano. Nè gran conforto avrebbe poi destato in lui questa pace, che appena un poco d' ulivo mostrare ardisce, mentre con l' armi in mano pur rimangono nazioni così potenti, e finchè, quantunque la terra cominci ad esser tranquilla, pieno tuttavia di guerra, e non men dall' ire degli uomini, che da quelle de' venti, turbato è il mare. Felice te dunque, che nel soggiorno sei della vera pace, di quella, che nè l' ambizion de' mortali, nè l' avarizia, nè l' odio, nè la vendetta può giunger mai ad interrompere! Felice, che or puoi contemplare nella sua divina sorgente quel vero, di cui andasti in traccia tra noi con ansietà sì lodevole, puoi scorgere quelle cagioni, alle quali ti studiasti per la scala degli scoperti effetti con tanta alacrità di salire, puoi soddisfare ancor meglio a quel desiderio, che ti scaldò tanto tra gli uomini, al desiderio bellissimo di beneficarli! Io spero, che nella faccia di quell'ente sommo, in cui tutto vedi, vedrai pure, anima santa e beata, questi pochi fiori da me sparsi su quell' umile pietra, che le spoglie cuopre già tue, e ch' esser dee così nuda, quando i monumenti più grandi, e per iscolpita lode più ragguardevoli vidersi spesso inalzati ai nemici dell' umanità, e ai distruttori del Mondo.

OPERE STAMPATE

Di Giovambattista da San Martino

Opere, divise in tre tomi. Venezia. 1791. *Presso Gio. Antonio Perlini.*

Tomo Primo. Lettera ad un Professore sopra la maniera pratica di apparecchiare, e di osservare alcuni oggetti col Microscopio. — Articolo sopra un Barometro portatile semplicissimo. — Saggio sopra un Igrometro a tunica vellosa. — Lettera al Sig. Ab. D. Giuseppe Toaldo P. P. P.. di Astronomia e Meteore nell'Università di Padova, contenente alcune ricerche sulla Evaporazione, con la descrizione d' un novello Atmidometro. — Dettaglio succinto della febbre acuta, esantematica, maligna, che regnò la state 1786. *nell' ospital di Vicenza l' anno* 1786. *— Lettera al celebre Sig. Leopoldo Marcantonio Caldani P. P. P. di Medicina e Anatomia nell' Università di Padova, sul maneggio del Microscopio dall' Autore novellamente raffinato. — Articolo di Lettera all'eruditissimo Sig. Ab. D. Carlo Amoretti, sulla maniera di liberarsi dalla molestia delle zanzare. — Ristretto delle osservazioni Meteorologiche fatte in Vicenza l' anno* 1787. *— Lettera al celeberrimo Sig. Orazio Saussure in difesa dell' Igrometro a tunica vellosa. — Lettera al chiariss. Marchese Antonio Carlo Dondi Orologio, sui risultati della piantagione del Formento. — Ristretto delle Osservazioni Meteorologiche fat-*

fatte in Vicenza l' anno 1788. — *Lettera al chiariss. P. D. Francesco Maria Stella, ove si ricerca, d' onde venga somministrata alle piante tutta quella quantità d' acqua, che si richiede al loro nutrimento.*

Tomo Secondo. Ragionamento sulla necessità e sui mezzi d' instruire il contadino nell' arte agraria. — Memoria sopra la nebbia de' vegetabili. — Ricerche Fisiche sopra la Fermentazione vinosa.

Tomo Terzo. Memoria intorno ai metodi di fare e di conservare i vini. — Ristretto delle Osservazioni Meteorologiche fatte in Vicenza l' anno 1789. — *Memoria intorno alla più utile ripartizione de' terreni fralle praterie, ed i seminati dello Stato Veneto. — Lettera al Sig. N. N. sopra la maniera di ridurre i camini da fuoco molto economici.* Con questo si chiude il terzo Volume.

Della costruzione d' un Termometro ad Indice: Memoria inserita nel tomo sesto della Società Italiana.

Riflessioni intorno alla causa d' un fenomeno Elettrico. Ivi.

Saggio intorno alla rettificazione dell' arcometro, e a' differenti suoi usi. Nel tomo settimo della Società Italiana.

Dell' origine del carbonio, ch' entra nelle piante. Nel tomo ottavo, parte I. della Società Italiana.

Dei vini della Provincia Bellunese, Memoria. Belluno. 1795. *Nella Stamperia Tissi.*

Riflessioni su la maniera di preservar gli alberi dai tristi effetti del ghiaccio. Nel nuovo Giornale Enciclopedico. *Vicenza. Settembre.* 1788.

Nuove ricerche dirette a rintracciare la causa del movimento della canfora alla superficie dell' acqua, e della cessazione di esso. Nel nuovo Giornale Enciclopedico d' Italia. *Venezia. Marzo.* 1793.

Memoria intorno alla maniera di conoscere e di correggere il mefitismo dell' aria. Ivi.

Articolo intorno alla maniera di correggere il Barometro per mezzo del Termometro di Reaumur. Ivi. *Marzo, e Aprile.* 1790.

Lettera intorno agli effetti provenienti dalla varia grossezza de' dischi elettrici di cristallo. Ivi *Novembre* 1794.

Ristretto delle osservazioni meteorologiche fatte in Zara gli anni 1793., *e* 1794. Ivi. *Ottobre.* 1794.

Saggio intorno alla maniera di rendere più economico il consumo dell' olio, che serve per uso delle lucerne, e delle lampade. Ivi. *Dicembre*. 1791.

Appendice per servire di continuazione al Saggio sull'economia dell' olio. Ivi. *Agosto*. 1793.

Metodo di ridurre il mele a far le veci dello zucchero con novelli esperimenti confermato. Ivi. *Agosto*. 1792.

Lettera al chiariss. Sig. Ab. D. Paolo Spadoni, ove si esamina quali fra i varj metodi, suggeriti per procurarsi istantaneamente un lume sia quello, che meriti d' esser preferito agli altri. Ivi. *Giugno* 1794.

Lettera intorno al suonar le campane in tempo procelloso. Ivi. *Aprile*. 1794.

Lettera intorno ad un fenomeno magnetico. Ivi. 1794.

Descrizione d' una penna da scrivere pe' viaggiatori. Nel nuovo Giornale d' Italia. *Venezia. Presso Gio. Antonio Perlini*. 1791.

Lettera al chiariss. Sig. Alfier Pietro Miloscovich sopra la costruzione d' una stadera portatile, universale, atta a farci rimarcare il peso d' ogni sorta di libbre. Ivi 1797.

Intorno al vero punto dell' incominciamento del giorno, ossia delle ore 24. Italiane, Saggio. Ivi.

Lettera al chiariss. Signor P. Z. intorno alla cura dell' Epizoozia, che regna presentemente nelle Provincie del Bergamasco, e del Veronese. Ivi.

Saggio sopra un novello Eudiometro a Cirino. Ivi.

La Teoria del ventaglio, ossia lettera alla nobil Donna L. G. Ivi.

Articolo di Lettera al Sig. Gaspare M. intorno al peso, ch' esercita l' aria sul corpo umano. Ivi.

Delle cause della rancidità dell' olio, e de' mezzi di prevenirla. Articolo tratto dalla Biblioteca Fisicoeconomica *di Parigi del P. G. B. D. S. M. con note dello stesso*. Ivi.

Lettera a S. E. Alvise Morosini, che contiene una succinta Relazione dello stabilimento de' Tabacchi di Nona. Venezia. Presso Gio. Antonio Perlini. 1792.

Delle Opere inedite non si potè avere notizia, che soddisfaccia.

ELO-

ELOGIO

DI GIUSEPPE OLIVI

Scritto

DA POMPILIO POZZETTI

Delle Scuole Pie.

Consegnato il dì 11. *Marzo* 1802.

Penetrata d'alto cordoglio l'italiana Società delle scienze prende ora a pagare il tributo estremo di gratitudine alla memoria di un Uomo straordinario, che nel fior dell'età accolto fra suoi, corse in breve spazio di tempo carriera sì illustre di meriti da renderle doloroso oltremodo il sentimento dell'acerba sua perdita. È questi il giovane Giuseppe Olivi, l'estesa dottrina di cui e gli importantissimi scritti, ove ne trasfuse le ricchezze, mostrano che un talento sagace ed attivo, guidato da uno spirito giusto, nitido, fecondo, amante dell'osservazione e dell'ordine già non aspetta il lento giro degli anni per metter frutti di rigogliosa maturità.

Nato Egli in Chioggia nel decimo nono giorno di marzo dell'anno mille settecento sessanta nove da Francesco Olivi e da Teresa Vianelli, e rimaso nella stessa infanzia orfano del Genitore, ebbe tosto nell'amorevolezza di due ottimi Zii chi, sottentrando alle paterne cure, provide al coltivamento felice delle sublimi qualità di mente e di cuore, che nel tenero Nipote a vicenda spiccavano. Al primo accostarsi ch'Ei fece alle Lettere, si manifestò ne' rapidi suoi avanzamenti l'efficacia delle prerogative moltiplici in essolui riunite, ed altrove a collegarsi difficilissime. Imperocchè erano in Giuseppe Olivi prontezza nell'apprendere e tenacità di ritenitiva, ingegno vivace e mansuetudine di carattere, intentensità di applicazione e sopraffino acume, effetto ciò pure di quella gracile tessitura di organi dilicatissimi, che in lui fanciullo tuttora di un lustro, sappiamo essersi con fatali indizj appalesata. Frattanto, lo studio de' classici Autori sì latini che italiani, sotto l' eccellente scorta dell' abate Francesco Fabris, svolse nel Giovinetto, coi germi del sano gusto, una dichiarata inclinazion per le Muse. Queste, in contraccambio, gli furon cortesi di tutte le doti proprie dell' anime gentili ed armoniche, le cui ingenue ed amabilmente disadorne espansioni producono una sorta d' incanto soavissimo in chi le somiglia.

Ma la Natura che mostrò sul principio compiacersi d' essere in qualche sua parte dall' Olivi dipinta cogli spontanei colori di una patetica poesia, lo invitava a divenirne lo storico e l' interprete nella feconda vastità de' suoi regni. Avventurato che ne intese presto i valevoli impulsi e gli seguì! All' indicato scopo si videro dunque collimar di buon' ora i pensieri, le mire, le occupazioni tutte di Giuseppe. Gli oggetti medesimi che all' età puerile sogliono essere, o indifferenti, o di sterile trastullo, l' orticello domestico e la circostante spiaggia sparsa di corpi subacquei, servivan di profittevole allettativo alla sua nascente passione. Nè ebbe in Patria a desiderar varietà di mezzi opportuni ad alimentarla: vi trovò per questo gli esempj e la voce di preclari Naturalisti, il compiuto erbario nazionale, l' orto di esotiche piante, quivi istituiti dai valenti Clinici, Giuseppe Fabris e Bartolomeo Bottari, della Storia marina e della botanica, quant' altri mai, benemeriti. E lo furono in particolar maniera pe' servigj da entrambi renduti al bramoso Alunno, quegli col dirigerne i primi passi nel cammin del sapere, questi con ammetterlo alla confidenza sua, non meno che alla società dei Dotti concittadini e stranieri soliti visitarlo, e coll' aprirgli libero l' adito all' ampia da se formata collezione di naturali e specialmente marittime rarità.

Addestrato, mercè questi ajuti, l' intendimento dell

Olivi all' intima cognizione della scienza prediletta, si diede a rinvigorirlo mediante la profonda lettura delle opere immortali di Buffon e di Bonnet, filosofi insieme e poeti di rara, avvegnachè differente, sublimità. Grave, cioè, nel primo ed immaginosa, rapida nel secondo e toccante; abilissimi quindi l'uno e l' altro ad agitar fruttuosamente lo spirito di Lui, ove facean lega inusitata le qualità di amendue. La meditazione di tali modelli fu per l' Olivi, come già quella dell' *uomo* di Cartesio pel gran Mallebranche, quasi un fuoco celeste che lo animava incessantemente ad utili imprese.

La storia naturale dell' Adriatico, di cui l' insigne Vitaliano Donati non potè offerirci che un saggio, a se rapì il Giovine osservatore. Attese le pratiche notizie acquistate da Lui nel museo Bottari intorno i moltiplici corpi marini, cui godeva eziandio distribuire, giusta il metodo Linneano, nelle lor classi, Ei potè subito comprendere l'uopo che avea di recarsi, qual fece, colà dove gli fosse dato rintracciarne entro i nativi lor seggi le specie viventi, e così andarne spiando gli essenziali interiori attributi, le vicende, le affinità, le particolari relazioni. E poichè non era in Lui meno intenso l' ardore d' investigare ad un tempo le virtù dell' erbe e delle piante, perciò lo avreste veduto quivi aggirarsi del continuo, ora sulla terra, or sull' acqua, ricercatore accuratissimo, senza che, o la complession dilicata, o il disagio o l' asperità de' viaggi, o l' intemperie delle stagioni frapponesser giammai il menomo impedimento all' esecuzione dei meditati disegni. Anzi la prosperità degli attuali successi lo invogliava ogni dì maggiormente a proseguire il fruttuoso esercizio. Esplorare, discutere, tentare, dedurre, a proprio ammaestramento rivolgere, per via di sagaci domande, la rozzezza medesima de' pescatori e de' marinari: abbracciar per mezzo loro colle sue indagazioni quel tratto di mare che dal veneto estuario (conforme l' appellano), va sino all' altezza di Ancona e di Zara: determinare al favor di reiteterate disamine la natura delle diverse produzioni raccolte, segnarne le individuali differenze, rettificar quindi imparzialmente i proprj giudizj e gli altrui, scoprir fin d' allora l' influenza che an le circostanze locali sulla generazione e sulla vita subacquea dei varj esseri: furon queste in parte, nello spazio d' anni tre consecutivi, le industriose geste dell' oculatissimo nostro Viaggiatore; questi fra gli altri molti, i vantaggi che Egli e le Scienze ritrassero dalle care sue pellegrinazioni.

Ma gli ingegni, pari a quello di Giuseppe Olivi, sono acutissimi nel misurare incontanente l' ampiezza della scientifica provincia in cui anelano di segnalarsi, e credendo nulla sapere ove alcuna cosa pur resti ad apprendere, non sanno trovar riposo, finchè non giungano a conseguire tutto quanto richiedesi alla piena soddisfazione di siffatto loro vivissimo desiderio. Si accorse ben Egli non bastare alla vastità del proprio i soccorsi, quantunque riguardevoli, e la suppellettile di fisico sapere che potea fornirgli la Patria: disegnava perciò di trasferirsi a Padova fiorente di Scienziati e di presidj d' ogni maniera ad istruirsi: se non che le ripugnanze della Madre affettuosa, cui non dava cuor di vederlo da se allontanato così mal fermo, qual era, in salute, lo persuasero a cangiar determinazione ed a sottometterla ai doveri ed ai sentimenti di Figlio. Pensò di conciliarli colla passion generosa che il dominava, abbracciando in Chioggia stessa un tenor di vivere, che senza perpetuità di legami lo astringesse a non interrotto pacifico ritiro, dove sostener colla piena delle sue forze i più ardui studj: ed a tal fine massimamente entrò, l'anno mille settecento ottantacinque, nella rinomata Congregazione de'Padri dell' oratorio. Ingeriva stupore veder l' Olivi, assorto quì nelle sue moltiplici applicazioni, passar dall' amenità della poesia, dell' oratoria, dell' erudizione al rigor delle filosofiche e delle sacre discipline, non togliendo unqua l' animo dalle naturali, sua cura e delizia primiera, e mantenervi frattanto l' energia d' una mente limpidissima e pieghevole a ciascheduna, nè venir meno giammai all' osservanza ed agli usi del religioso Istituto. Esempio atto a comprovare che i robusti ingegni, lungi dal rimanere entro que' sacri asili irreparabilmente, come si va declamando, soffocati, vi trovano spesso ed agio ed irritamento per sollevarsi ad altezza maggiore. Così avesse potuto il nostro Giuseppe goder, congiunto a quel della vita regolare, il benefizio della sanità sospirata! Ma dell' esser le vicendevoli loro esigenze più a lungo incompatibili, lo convinsero le gagliarde scosse che ebbe questa a soffrirvi, per le quali obbligato ad uscir dalla pia Società, non senza rammarico de' Confratelli, cercò, previo il materno assenso, ed ottenne sotto il ciel Padovano, un consolante, sebbene ahi! troppo fugace ristoro a' suoi mali.

Stabilitosi adunque l' abate Olivi, nell' autunno del mille settecento novanta, in quella sede beata di Pallade, non può ridirsi il fervore ond' Egli si fece ad accrescere ed a perfezionare le adunate notizie intorno la Scienza della natura, e quelle similmente che a lei fanno sostegno e corona. Con siffatta maravigliosa attività, non iscorsero appena due anni che; posseditore delle migliori dottrine spettanti alla fisiologia si animale che vegetabile, alla fisica sperimentale ed alla moderna chimica, i principj delle quali divengono, in potere del genio, sempre fecondi; recò l' Olivi sul teatro della fama il valor de' provetti, sicchè l'Accademia di Padova, ricca di nomi e di opere gloriose, fu sollecita d' ornarsi colle primizie dell' applaudita penna di Lui.

Nella memoria, promulgata di poi dall'Accademia medesima, che l' Olivi impiegò ad illustrare una spezie d' ulva delle venete Lagune ignota per lo innanzi ai Botanici, si mostra Egli diligente, acuto, destro nell' arte di osservare e di dedurre, o ne descriva la forma, il colore, la fruttificazione, o additi i luoghi in cui dimora e cresce, o disveli i caratteri speciali che la distinguono dalle altre piante *crittogame* a lei in qualche parte conformi, od esponga i tentativi eseguiti, e le fondate conseguenti speranze di ristaurare con essa il bel colore purpureo cui la dotta antichità ricavava dai fuchi marini. Consimili speranze lo eccitarono a ricercare quali fossero gli animali porporiferi un dì conosciuti, e nella difficoltà di ben determinarli, quali da noi sostituir si potessero a tale uso rilevantissimo. Trovonne due spezie abitatrici dell' Adriatico, l' *arca nucleo* ed il *buccino echinoforo* di Linneo. Somministra la prima spontaneamente, e senza veruno apparecchio, un vivacissimo porporino liquore. Se aprasi, Egli dice, codesto nicchio; accade vederlo tutto stillante d'un glutine vinoso che gocciola nelle valve del testaceo, donde agevol cosa è raccorlo, illeso tuttor l'animale, e farne pur noi indeficienti conserve. Il buccino echinoforo non dona la porpora se non colla perdita dell' individuo, ed è per l' azione del fuoco e pel contatto dell' aria ambiente che esso addiviene in tutto simile al colore del sangue arterioso. Il qual cambiamento spiegasi dal nostro Indagatore mediante la stretta analogia, che sa rinvenire, tra la colorazione della sostanza glutinosa di questo verme, e la colorazion parimente del sangue arterioso nella respirazione degli animali detti di sangue caldo. Per non dissimili argomenti, voglio dire per l'attività della base dell'aere vitale, che s' impadronisce dell' aere infiammabile e del principio carbonico, si fece altra volta a dichiarare la causa del color rosso in cui si tingon le croste dei granchj e de' gamberi posti sovra le brage, o nella quasi bollente acqua sommersi. La scoperta di Lui intorno le anzidette conchiglie porporeggianti, sostenuta dalle teorie più care agli odierni Chimici e dal voto ancora de' Filologi, merita le continuate riflessioni degli intendenti, onde non avvenga ad essa ciò che a molte, i cui giovevoli effetti veggiamo svanire per mancanza di chi prosegua a coltivarle.

Non perdè l' Olivi giammai di vista nelle sue fatiche il comun bene e l' incremento delle ottime discipline. Inteso a promuover l' industria e l' agricoltura nazionale, divolgò uno scritto, ove con sceltezza e novità di osservazioni è riè rilevata l' indole fertilissima del terreno adjacente a Chioggia, e son posti in aperto i ſatti e le ragioni che gli promettono vigorosa ubertà. Conciossiachè guidino a toccar con mano l' attitudine di quel suolo a nutrire ed a propagare vegetabili sì terrestri che marittimi, sì paludosi che asciutti, sì pingui che arenosi, tanto gli uni che vestono i prati, quanto gli altri che amano l' ombra, infin quelli eziandio che allignar sogliono a preferenza in elevati paesi. Fra i vantaggi apportati dal nostro Filosofo alla Botanica, ricorderò il nuovo genere di pianta ch' Ei valse a formare della *bursa marina* di Gaspare Bauhino, e della *vermilara ritusa* dell'Imperato, trasferite per Lui, su prove inconcusse, dall' usurpato regno animale a quel, loro proprio, della semplice vegetazione. Cotal sua pianta chiamò Egli *Lamarkia* in onor dell' esimio Naturalista di questo nome, locolla a buon diritto nella classe di quelle che celano gli organi lor sessuali, all'ordine delle alghe l' ascrisse, e ben potè compiacersi di vederla in tal guisa ricevuta e commendata dai Luminari più cospicui della scienza; ammessa inoltre, qual rara gemma, a far di se bella mostra negli accreditati annali botanici dell' Ustero. Nè tacerò l'altro dono, che alla Botanica stessa Egli fece, d' una pianta affatto nuova, appartenente all'ordine pur delle alghe, la tessitura della quale, la forma, l' andamento, le proprietà e sopra tutto il difetto di visibile fruttificazione lo indussero ad annoverarla, coll' aggiunto qualificativo di *peziolata*, infra le ulve; destinandola a comparir così nella pubblica luce, che la Parca inesorabile di poi le invidiò. Sarà per altro alla viva riconoscenza nostra eternamente raccomandato il Ritrovatore d' una spezie siffatta che, della natura dei fuchi e delle ulve partecipando, è a dirsi produzione intermedia a questi due generi, una tra quelle che stringe la stupenda catena degli esseri, che giova a compiere il naturale sistema delle famiglie, e che forse ci presenta, legati in una sola, i tre distinti generi dei fuchi, delle conferve e delle ulve.

La seconda di queste minute famiglie a se trasse in particolar modo le speculazioni dell' Olivi, ed alla nostra Società fu dato goderne i frutti preziosi. Diconsi conferve quegli ammassi di tenui filamenti, che in diverse fogge intralciati fra sè, ammantano il fondo e i lati delle acque stagnanti d' una verzura spesso indistinta, la quale poi distaccandosi, viene a galleggiare alla superficie. Il sommo Adanson primo scuopritore di questi esseri singolari, li giudicò vegetabili dotati della irritabilità: per lo contrario, animali furon creduti dai sagacissmi Sperimentatori Felice Fontana e Bonaventura Corti, e taluno pur v'ebbe che riguardolli siccome esseri costituenti uno degli anelli di congiunzione tra il regno vegetabile e quel de' viventi. In tale stato di cose entrò l' Olivi nell' aringo, prese a discutere le osservazioni di chi avealo preceduto, a moltiplicar le proprie, a combinarle colle altrui, determinò il numero, la fisonomia, i caratteri delle specie, fino allora incognite, di siffatte piante, ne esibì la naturale istoria, notò l' inesattezza di nominarle tremelle, esaminò le convenienze che unisconle ai vegetali, nè ravvisonne alcuna meritevole di essere accomunata coll' animalità, salvo il moto lentissimo onde si dirigono e si avvicinano ai luoghi rischiarati dal raggio solare. Ora per trionfar di qualunque ostacolo, per mettere al di sopra d'ogni eccezione il meccanismo da Lui asserito di tai movimenti progressivi delle conferve, cotanto vantati dai Fautori dell' opposta sentenza, convenìa mostrare, che quelli non sono no l' effetto spontaneo d' ingenita sensibilità, la conseguenza bensì necessaria delle arie che emanano; convenìa di più stabilire l' influenza della luce sui vegetabili, e l' affinità che aver ponno con essa alcuni principj componenti la loro fibra. Tanto e nulla meno eseguì l'Olivi con bell'apparato non men di esperimenti che di raziocinj, e col maneggio felice delle chimiche dottrine specialmente di Lavoisier; e l'averlo potuto, e l'aver gettati ad un tempo i semi di una scienza pellegrina circa l' aria che sorte dalle piante, lo inalza alla

r. sfe-

sfera dei pochi uomini benemeriti dell' umano sapere, e dei Maestri solenni di fisica sì animale che vegetabile.

Degno di ugual vanto il manifestano: ciò che sui fondamenti medesimi Egli scrisse per chiarire il fenomeno delle conferve infusorie non dissimile al già considerato nelle irritabili: ciò che addusse in campo, onde sostenere la vegetabilità delle tremelle a torto combattuta dal chiarissimo di Saussure: quanto comunicò al dotto Giovanni Arduino per certificarlo che entro il mare Adriatico non vivono cornamoni, dai minutissimi in fuori: quanto aggiunse ai pensamenti dell' illustre Cavolini sopra la fabbrica, le particolarità, il contrastato genere delle coralline: tutto quanto finalmente Ei registrò nel compendio italico delle transazioni anglicane a decoro ed a profitto della Zoología. Imperocchè, non v' à parte di Storia naturale ove fosse all' Olivi piaciuto aggirarsi, che Egli non lasciasse quinci segnata di luminosi vestigj. Un abile Chimico Veronese, l' abate Tommaselli, cui era noto il valor dell' Olivi anche nella difficile scienza vulcanica, interrogollo un tratto, come avvenir potesse mai che la lava, la quale, in raffreddandosi, non offre apparenza alcuna di vetrificazione, andata pur sia liquida e fusa ne' correnti che sboccano dallato al *cratere* de' luoghi ignivomi? Sembravagli questo un paradosso, nè ben si appagava di quanto, per dileguarlo, aveva scritto il gravissimo Autore del *Saggio di Litologia del Vesuvio*. Bastò all' Olivi additar qualche traccia sicura all' egregio Amico onde incamminarsi e pervenire alla verità, col mostrargli, che la fiamma vulcanica resta modificata a seconda della profondità, della ristrettezza, della configurazione del focolare, a norma delle qualità varie delle materie a cui si distende, a misura della quantità d' aere vitale che lo alimenta. Son lodevoli ognora gli sforzi d' un ingegno che tende per essi a metterne sul difficil sentiero dell' evidenza. Arrise questa in ispecial maniera al nostro Esploratore là dove, ajutato ad arrivarla dal più fino artificio nello sperimentare, e dalla retta applicazione de' risultamenti, provò non essere l' ingrata esalazione di asfalto elevantesi dalle sorgenti delle acque minerali Salernitane cimentate dal Professore Vincenzio Comi, non esser no altrimenti quel lezzo, com' Ei riputavalo, una nuova sostanza aeriforme in sua origine, sibbene un'aria infiammabile oliosa derivante dalla scomposizione medesima dell' asfalto.

Questo zelo magnanimo palesato costantemente da Giuseppe Olivi nell' inchiesta del vero, fu ben tosto alla Società nostra ferace di altra sua produzione. Persuaso di quanto contribuiscano le disquisizioni comparative all' intelligenza di alcuni fenomeni, forse inesplicabili perchè isolati, giudiziosamente avvisò, che a dilucidar quello de' pipistrelli accecati, e nondimeno volanti attorno così appunto come nol fossero, giovar potesse l' istoria da se raccolta di alcuni vermi marini, i quali abbenchè privi dell' odorato e della vista, riconoscono in qualche distanza la preda e muovono ad afferrarla. Imparammo adunque da Lui, che varj molluschi, e tra essi le attinie e le idre, sperimentate non solo entro le lagune, ma altresì, con molt' agio e con frequenti variate prove, in vasi a ciò destinati, si danno a conoscer fornite di tale e tanta esquisitezza nel tatto, che s' avvedon per esso degli oggetti lontani, mediante l' impressione suscitata da questi nell'acqua: impressione che, innanzi di giugnere a loro, trascorre lo spazio perfino di sette pollici, ed è tenue in guisa da nascondersi allo sguardo armato dell' osservatore. Tanto è poi vero doversi i movimenti di que' molluschi ripetere dall' unica azione esercitata sul loro tatto che, se vengano impediti gli ondeggiamenti con un mezzo diafano, in grazia d' esempio, con lastra di purissimo cristallo, essi più non vagliono ad accorgersi dell' esca situata al di là dell' ostacolo. Le prudenti riflessioni che accennò quivi l' Autore, dedotte per Lui da tali fatti e riferite opportunamente alla disciplina del tatto, creduta per avventura conforme nelle operazioni de' pipistrelli ciechi, denotan chiaro che la sola modestia potè suggerirgli inoltre di cedere ad altri l' uffizio di giudice in un argomento, ove a niun meglio che a sè ne competeva certamente il diritto.

Tanti e sì dotti parti del sottile intelletto e del sapere di Giuseppe Olivi, sebben quì appena commemorati, che basterebbero alla fama di chicchessia nella più tarda età e dopo lunga perseveranza nella fatica, apportar dee maraviglia l' intendere che furon l' opera in Essolui della fresca gioventù e d' un' applicazione di anni pochissimi, e ciò che sembra a prima giunta incredibile, che non furono, nè i soli, nè i principali; conciossiachè a dir mi rimanga pure di quel suo libro che gli attirò sopra ogni altro l' universale acclamazion della fama, e che della sua costituisce il patrimonio legittimo ed immanchevole, parlo della Zoologia dell' Adriatico dall'Olivi nel mille settecento novanta due pubblicata. La fisica istoria del mare appresta all' ingegno contemplatore un fondo inesausto di ricerche e gli prepara abbondevole messe di utili ritrovamenti. È nel fosco silenzio di quegli abissi dove par che la Natura solinga ami spiegar la pompa delle sue ricchezze e del suo magistero, è quivi entro che dessa forma ed intreccia le fila moltiplici onde risulta l' immensa tela degli esseri organizzati, le cui sottilissime falde, se posso dirlo, allargandosi, per degradazion successiva, dal primo degli animali all' infima tra le piante, circondano i confini estremi della materia bruta ed informe. Le scoperte memorabili di quel ristretto numero di filosofi, i quali, dietro l' orme dell' italiano Marsili, indirizzarono a quest' oggetto sublime le sollecitudini loro, sono pei fortunati confidenti della natura altrettanti stimoli efficacissimi a tentar nuove cose, onde raggiugnerla viemaggiormente in que' cupi recinti, e sì costringerla quasi a rivelarne gli arcani cui sembra più gelosa di occultarci. Mosso l' Olivi fin dall' adolescenza, come il vedemmo, da tale istinto, non cessò mai di volgere le fisiche e le intellettuali sue forze alla nobile impresa di ordir così la storia dell' Adriatico, e di quel tratto segnatamente, che dal settentrionale suo termine si dilata fino alla latitudine di Ancona e di Zara. E vi riuscì a tanta eccellenza ch' io non so bene se altro esempio, maggior di questo, pur siavi, a significar quanto possano l' ardenza del genio, la penetrazione e la chiarezza dello spirito, la dottrina e la diligenza indefessa riunite nel lavoro d' un Uomo solo. Ove migliori se ne vider gli effetti che nel disegno, nell' orditura, nell' esecuzione di questo? Quale esattezza e precision continua nella particolar descrizione, ch' Egli ne porge, dei fondi del Golfo veneto; quale accorgimento nel rintracciar, che fa, la diversa natura, l' origine e la provenienza dei materiali che li compongono, e sopra tutto, i vincoli di somiglianza che passano tra l' indole di codesti esseri organici e quella de' siti ove nascono, vivono, si propagano e periscono! Fondato sui cardini stessi il catalogo, ch' Ei tesse quivi, degli animali natii di quel Golfo e muniti d' integumenti solidi, addivenne un erario copioso di naturali inaspettate dovizie. Compajono ivi in cinque schiere divisi, e sono, gli insetti mancanti delle ale, i vermi ignudi e provveduti di varie membra, i molli, semplici e coperti d' un guscio calcario, i molli parimente, ma composti e chiusi dentro un corallo pure calcario, altrettali e gelatinosi che stanziano in uno scheletro corneo e fungoso. Oltre quelli, tra i viventi or mentovati, che il Linneo descrisse, parecchi ne incontri omessi da lui e colla scorta distribuiti e col linguaggio dei recenti Scrittori cui furon noti: in appresso le numerose spezie scoperte dal nostro Zoologo ricevon da Esso, colle norme sicure del Plinio Svedese, acconcie le denominazioni, l' istoria, l' assortimento. Ordin non àvvi o classe di cotesti animali che non risenta il benefizio di tanta perspicacità: i punti essenziali risguardanti la misteriosa loro economia, svolti, definiti, rettificati; dappertutto indagini, sperimenti, lumi, avvertenze non volgari; deduzioni rettissime di fenomeni da cause per l' addietro ignorate; osservazioni, teorie, schiarimenti, giunte, spiegazioni, ritrovati. Non può mai deplorarsi abbastanza la fatale sciagura che, a pubblico danno.

no, gli tolse di compier l' opera e sì di estenderne, conforme divisava, i comodi allo studio degli esseri naturalmente non conservabili, sciagura che fraudò la comune aspettazione d' altri lavori intrapresi da Lui a pro massimamente della Ictiologia, non meno che della fisica Topografia, col ragguaglio degli esseri senzienti e dei vegetanti nel paese terracqueo di Venezia.

Or mentre la Compagnìa medica di questa Città, che dell' opera or rammentata avea commessa la cura all' abate Olivi, lieta dei saggi offertile, ne accelerava co' voti l' eseguimento: mentre i dotti sì Italiani che d' oltremonte, e le Accademie più rinomate d' Europa, quelle di Berlino, di Madrid, di Praga, di Zurigo, di Copenaghen, di Gottinga, di Harlem, di Lunden, di Mantova, di Milano, di Torino, di Padova gareggiavano a testificargli per onorifiche guise l' alta stima di Lui concepita, mentre i Veneti Padri, appoggiati ai liberi suffragj di sapienti Giudici, gli decretavano l' importante carica di soprantendente all' agricoltura ed all' economia nazionale: in quest' amichevole cospirazione di circostanze oltremodo propizie alla fortuna de' suoi talenti, ricomparvero più minacciosi e proruppero i violenti sintomi di quell' abitual tisichezza che andava segretamente logorando la debol sua macchina, e di cui rimase vittima in Padova, il dì ventiquattro d'Agosto dell' anno mille settecento novantacinque, vigesimo sesto dell' età sua. Forse non mai vi fu morte che tante lagrime costasse all' umanità ed alle scienze, che più barbaro scempio facesse di adulte speranze e di quanto avvi fra noi di meglio pregevole e di più delizioso. Oltre le prerogative dell' ingegno e del sapere, convenivano in Giuseppe Olivi quelle d' un cuor tenero, virtuoso, leale, benefico, d' un' indole mansueta, condiscendente, ognora flessibile al retto, d' un tratto officioso, colto, insinuante, costumato, piacevole, che si attraeva l' estimazione e la benevolenza di chi che si fosse. Egli sentì vivamente la passion della gloria, nè seppe, come tanti, nasconderla, ma attese a meritarla, non dilungandosi mai dalle vie che a quella onestamente conducono. Perciò le conseguenze della medesima ridondarono ognora in vantaggio altrui e delle liberali facoltà, e potè scrivere a' suoi intimi che se amava una fama, ciò era per ottenere un poco più di amicizia. Ove questa si credè lecito di produr qualche dubbio intorno alcuna opinione espressa da Lui nella prediletta sua Zoologia Adriatica, lo trovò, secondo le occorrenze, pronto ad acconsentirvi, modesto e prode a rimuoverli, sempremai incapace di sagrificar la verità e l'amicizia stessa all' idolo dell' alterezza e della pertinacia, che disonoran pur troppo talvolta l'eccelso carattere del filosofo. Lontano dall' invidiare o dal contendere a chicchesia il godimento della celebrità, fu anzi assiduo e sincero nell' accarezzarne i favoriti. Penetrato dai sentimenti augusti di Religione, splendida prova ne diede coll' intrepidezza cristiana onde sostenne l'aspetto dell' imminente suo passaggio dal tempo all' eternità. Alla memoria dell' estinto Giuseppe Olivi, onorata già pel comun lutto, vidersi eretti dal patrio amore in Chioggia, dalla pietà domestica in Padova, monumenti e titoli perenni di riconoscenza. Sulla tomba di Lui sparse i fiori eletti dell' eloquenza quell' Uomo celebre ch' ei solea chiamare col dolce nome di padre, quel Letterato veramente filosofo, la cui penna degna è di assicurare i figli privilegiati di Minerva nel possesso dell' immortalità, il Professore Melchior Cesarotti.

OPERE STAMPATE DI GIUSEPPE OLIVI.

I. *Memoria sopra una nuova spezie di* Ulva *delle Lagune Venete*. Nel tomo III. Parte I. de' *Saggi scientifici e letterarj dell' Accademia di Padova*.

II Memoria epistolare sulla Botanica e Agricoltura de' lidi Veneti diretta al celebre Sig. Giovanni Arduino. Nel *Giornale d' Italia* anno 1791.

III. Lettera sui cornamoni dell' Adriatico. Ivi.

IV. Dell' atmosfera delle acque minerali di Salerno, e in particolare del lezzo d' asfalto che si fa sentire; della di lui permanente gasozità, natura e denominazione: Memoria epistolare diretta al Sig. Vincenzio Comi Prof. di Medicina. Nel tomo XIV. degli *Opuscoli scelti sulle Scienze e sulle Arti*. Milano presso Giuseppe Marelli 1791.

V. Della scoperta di due testacei porporiferi e di un' Alga tintoria. Ivi.

VI. Delle Conferve irritabili e del loro movimento di progressione verso la luce: esame fisico-chimico. Nel tomo VI. delle *Memorie* della Società Italiana delle Scienze.

VII. Scoperta e spiegazione del fenomeno del movimento progressivo di una Conferva infusoria, ossia della materia verde di Priestley, verso la luce. Negli *Annali Botanici* di Zurigo.

VIII. Memoria sulla natura delle Coralline, e riflessioni sulle Tremelle, al Sig. de Saussure. In 8. senza date tipografiche.

IX. Zoologia Adriatica, ossia Catalogo ragionato degli Animali del Golfo e delle Lagune di Venezia. Bassano 1792. Remondini: in 4. In quest' Opera sono rifuse alcune produzioni dell' Autore impresse ancora partitamente, come la *Memoria sulla Lamarkia nuovo genere di pianta*, stampata negli *Annali Botanici* di Zurigo, le *Ricerche chimiche sulla colorazione delle croste d' alcuni animali* pubblicate nel volume IV. degli *Annali di Chimica e Storia naturale* del Prof. Bruguatelli, e le *osservazioni sopra la natura, ed economia animale de' Vermi cellulani o piantanimali*, inserite ancora nel tomo XVI. degli *Opuscoli scelti* citati.

X. Storia naturale compresa nelle Transazioni filosofiche della Società Reale di Londra compilata ed illustrata dal Sig. Gibelin, recata in italiano dall' abate Marcantonio Ludrini con nuove illustrazioni del Conte Niccolò da Rio e dell' ab. Giuseppe Olivi. Tomo I. Venezia 1793. Antonio Fortunato Stella, in 8.

XI. Risposta alle ricerche dell' ab. Giuseppe Tommaselli sulla natura e genesi delle lave compatte. Nel volume XX. dell' *Antologia romana* ed in altri fogli periodici d' Italia.

XII. Osservazioni sopra la squisitezza del senso del tatto di alcuni Vermi marini. Nel tomo VII. delle *Memorie* della Società Italiana delle Scienze.

XIII. Saggio di poesie inedite : impresso dopo l' elogio dell' Autore scritto dall' ab. Cesarotti . Padova 1796. Penada.

Opere inedite :

I. Esami e Scritture di commissione dell' Eccellentissimo Inquisitore dell'Arti Procurator Memmo, per ridurre alla capacità dei tintori dello Stato Veneto le scoperte scientifiche di alcune Nazioni d' Europa .

II. Illustrazione dell' Ulva peziolata , pianta ignota .

III. Prospetto d' una topografia fisica , zoologica e fitologica letto alla Società medica di Venezia .

IV. Storia naturale del pesce Gobio detto volgarmente Go. Imperfetta .

V. Saggi 1. *sul sistema fisiognomico di Lavater* . 2. *sulla condizione de' villici* . 3. *sull' educazione delle donne* . 4. *sull' utilità del teatro* . 5. *sugli elogj* . Incompleti .

STATUTO

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA

DELLE SCIENZE.

I. La Società Italiana delle Scienze è composta di quaranta Socj attuali, tutti Italiani, di merito maturo e per opere date in luce ed applaudite riconosciuto.

II. La scienza della natura è il grande oggetto, in cui la Società Italiana si propone di versare. Pubblicherà pertanto, di due in due anni, sotto il titolo di Memorie di Matematica e di Fisica, le produzioni di chiunque de' Socj vorrà render pubblico negli Atti Sociali il frutto de' proprj studj.

III. De' quaranta Membri uno sarà Presidente della Società, e la presidenza durerà sei anni.

IV. Avrà la Società un Segretario perpetuo ed Amministratore: il quale sarà partecipe di tutte le facoltà dei quaranta, benchè non fosse uno d'essi; ed avrà diritto, non obbligo, di presentar Memorie da inserirsi negli Atti.

V. Altra Classe vi avrà di Socj Emeriti, in numero indeterminato. Essa è preparata a chiunque dei quaranta, o per età avanzata, o per abituale mancanza di salute, o per altro motivo, non producesse verun suo lavoro in tre consecutivi tomi delle Memorie Sociali: e questi si conteranno dal tomo VIII. in poi, cioè dopo l'accettazione del presente Statuto.

VI. Un' altra Classe, parimente indeterminata, comprenderà i Socj Onorarj. A questa saranno ascritti, previo l'assenso di ventuno almeno dei quaranta, i compilatori, eletti dal Presidente, degli elo-

gj de' Socj attuali defunti. Inoltre esso Presidente potrà aggregare a questa classe, nel suo sessennio, due Soggetti, non più, che avessero operato cosa a pro della Società, onde meritassero d' esserne onorati particolarmente.

VII. Ed altra Classe avrà finalmente il titolo di Socj Stranieri, stabilita per distinguere ed onorare il merito nelle scienze in qualunque parte fuori d' Italia. Sarà composta di dodici Soggetti, a ciascun de' quali verrà esibito in dono un esemplare d' ogni volume, che uscirà in luce, delle Memorie Sociali.

VIII. Le aggregazioni, alle classi de' Socj attuali e degli stranieri, si faranno nel modo seguente. Per ogni posto, che rimanga vacante, dovrà il Presidente, col mezzo del Segretario, proporre sei nomi a ciascuno de' Socj attuali, il qual farà scelta d' uno, e lo indicherà per lettera al Segretario. Quel de' sei, ch' entro il termine di due mesi dalla proposta, avrà più suffragi, s' intenderà aggregato, e la Compagnia sarà fatta opportunamente consapevole dell' acquistato Cooperatore.

IX. All' elezione del Presidente saranno invitati li Socj attuali con una lettera circolare del Segretario; al quale ognuno di essi farà tenere in iscritto la nomina del Socio da se eletto a Presidente: e la pluralità de' voti, che arriveranno al Segretario dentro il termine di due mesi dopo la data del circolare invito, determinerà l' elezione, che dovrà esser dal Segretario annunziata ai Membri votanti.

X. Ciaschedun dei quaranta ha facoltà d' inserire negli Atti una scoperta utile, un' importante produzione, anche di persona non aggregata, ma Italiana, purchè se ne faccia mallevadore egli stesso, come di cosa propria, inverso la Compagnia.

XI. Di questi Autori non Socj dovrà il Presidente aggiungere i nomi, segnati con asterisco, ai sei che presenta, a tenor dell' articolo VIII, per l' elezione d' un Socio attuale. Bensì questa nomina cesserà, dopo fatta sei volte, contate dalla pubblicazione d' ogni Memoria.

XII. Le Dissertazioni o Memorie, da pubblicarsi ne' volumi della Società, debbon essere scritte in lingua Italiana, in carattere chiaro, e, avanti che spiri il dicembre antecedente all' anno prefisso all' impressione, fatte pervenir franche alle mani del Segretario, il qual dovrà apporvi la data del ricapito, acciocchè sieno stampate con essa in fronte, e per ordine di tempo. Che se l' opera sia voluminosa, può l' Autore distribuirla in due o più parti pe' tomi susseguenti.

XIII. Tutto ciò, ch' è destinato pegli Atti, dev' esser nuovo, inedito, importante, ed analogo all' indole scientifica di questi volumi, che non ammette sfoggio d' erudizione, nè moltitudine di note e di citazioni

XIV. I fogli stampati di ciascun volume non dovranno eccedere il numero di cento. Le Memorie sopprabbondanti resteranno in deposito pel tomo susseguente, o saranno restituite agli Autori che le dimandassero. Bensì, nel caso di soprabbondanza, le Dissertazioni degli Autori non Socj dovranno cedere il luogo a quelle de' Socj, purchè queste sieno arrivate entro il termine prescritto.

XV. La Società non si fa risponsabile delle opere pubblicate negli Atti. Ogni Autore dev' esser mallevadore delle cose proprie, come se le pubblicasse appartatamente.

XVI Non permette peraltro la Società le invettive personali; e nè anche le critiche non misurate: sopra di che veglierà il Segretario, e ne farà inteso il Presidente per un acconcio provvedimento.

XVII. Il Socio, autore d' una Memoria o d' un Elogio, avrà in dono il volume, in cui è contenuta; e dodici esemplari della sua produzione, con frontispizio apposito, e con la numerazion delle pagine ed il registro ricominciati. Le dodici copie saranno pur corrisposte agli autori non Socj. Qualunque Autore desiderasse più delle dodici copie, non sarà aggravato d' alcuna spesa per conto della composizion tipografica.

XVIII. Nell' atto di queste spedizioni sarà trasmesso ai Socj, che avranno mandato il voto per le elezioni, la dimostrazione stampata del numero de' suffragj toccati ad ogni Candidato, senza il nome però de' votanti, e così ancora i conti stampati dell' Amministrazione tenuta dal Segretario durante il biennio precorso.

XIX Alle principali Accademie estere sarà offerto in dono un esemplare d' ogni volume delle Memorie Sociali, che andrà successivamente uscendo alla luce.

XX. I doveri del Presidente, oltre i già mentovati, sono: mantener l' osservanza dello Statuto: eleggere il Segretario, qualunque volta sia di bisogno; avere in governo e cura ogni interesse della Società; rivedere, almeno una volta all' anno, i conti dell' amministrazione del Segretario, alla validità de' quali fa d' uopo l' approvazione e sottoscrizione di mano propria del Presidente; e ragguagliar finalmente il Successore dello stato degli affari nell' atto di rinunziargli l' Uffizio.

XXI. Dopo il Presidente, il Segretario è la persona propria-

mente deputata a mantener corrispondenza con tutti i Membri della Società, e quasi centro ove debbono metter capo tutte le relazioni Sociali. Egli invia le patenti d'aggregazione; tiene il maneggio economico; presiede alla stampa, ai correttori di quella, ed all' incision delle tavole; prende cura delle spedizioni, e d' ogn' altro interesse della Società; sempre però con l' approvazione del Presidente. Egli deve pure tener registro d' ogni atto che importi; custodire i voti de' Socj per le elezioni, manifestandogli al Presidente ad ogni richiesta; e finalmente eseguir tutto ciò, che ne' precedenti articoli gli è addossato.

XXII. Sono instituiti due premj, consistenti ciascuno in una medaglia d' oro del valor di zecchini sessanta, coniata con relative iscrizioni. Questi premj apparterranno agli Autori delle due Memorie più utili d' ogni Tomo: l'una di Matematica pura o mista: l' altra di Fisica non matematica. La collazione si farà come segue. Si dividerà la Compagnia in due classi: l' una di Matematici; l' altra di Fisici. Ciascuno de' Socj attuali manderà al Segretario il suo voto, con cui dichiarerà, quale delle Memorie sopra argomenti della sua classe (sia di Socj o non Socj) giudica degna del premio, escluse le proprie. La Memoria, che avrà più voti favorevoli, in ciascuna classe, sarà la premiata. In caso di parità di voti, deciderà la sorte. Per l' esecuzione del presente articolo, ogni Socio attuale riceverà in dono un esemplare di ciascun tomo, che gli sarà trasmesso con la maggior prontezza possibile dopo terminata la stampa. Allo spirare di quattro mesi, successivi alla data di queste spedizioni, si pubblicherà il risultamento dei voti per li due premj, nè saranno d' alcun valore i voti che pervenissero posteriormente. Gli Autori perfine, quando massime l' argomento possa essere incerto o promiscuo, dichiareranno, spedendo le loro Memorie, a qual classe intendano attribuirle.

XXIII. A compensazion delle spese, che incontrano i Socj ne' porti di lettere per cagion della Società, ogni anno nel mese di ottobre saranno imbossolati li nomi de' Socj attuali, che avranno corrisposto a tutte le lettere del Presidente e del Segretario nel corso dell' anno antecedente; e ne saranno tratti a sorte sei, ciascun de' quali avrà diritto di esigere zecchini tre dalla cassa della Società.

XXIV. Ogni volta, che la forza pecuniaria della stessa Società lo consenta, si esporranno programmi al concorso pubblico. Risoluto ciò *dal Presidente, il Segretario inviterà li Socj attuali a proporre argomenti. Questi esser dovranno, o Fisici, o Matematici, o Fisicomatematici, o in qualunque modo giovevoli a queste scienze; e sempre applicabili ad utile general dell Italia. Il Segretario li manderà stampati a ciascun Socio, pretermettendo quelli, che uscissero dalle condizioni or prescritte. Ogni Socio spedirà al Segretario il proprio suffragio per la scelta dell' argomento, e dichiarerà insieme qual premio reputi conveniente e qual tempo alla facitura e presentazione delle Memorie. Quel tema, che avrà più suffragi, sarà adottato: nel caso di parità di voti, deciderà la sorte.*

Tosto si comunicherà alla Compagnia l' argomento coronato, ed il numero de' suffragi riscossi da ogni argomento: nell' atto stesso sarà richiesto ciaschedun Socio attuale di nominarne tre (di qualunque Classe, purchè Italiani, e dimoranti attualmente in Italia); quelli cioè, che ciascuno, osservato il quesito, stimerà più adattati a giudicar le Memorie che compariranno al concorso. Quei tre, ne' quali concorrerà maggior numero di suffragi (l' uguaglianza rimovasi con la sorte), s' intenderanno destinati a pronunziare il giudizio.

Nelle occasioni statuite sopra, saranno come non fatte le risposte de' Socj, qualor non giungano al Segretario dentro quaranta giorni dalla data della rispettiva circolare di lui.

Il nome de' Giudici eletti rimarrà a sola notizia del Presidente e del Segretario: se non che ciascun di quelli sarà fatto consapevole della propria destinazione, con divieto di concorrere al programma e di manifestarla a chicchessia: niun di loro saprà i suoi Colleghi. Se qualcun ricusasse, sarà sostituito il prossimo inferiore in quantità di voti. Ogni Giudice riceverà, dopo pronunziato il giudizio, un decente compenso dell' esclusion dal concorso.

Il Presidente, considerati i pareri de' Socj, lo stato economico della Società, e l' importanza di moltiplicare i programmi, stabilirà la grandezza del premio, ed il termine da assegnarsi al concorso. Sarà tosto promulgato il problema per tutta Italia. Ogni Italiano, anche Socio, potrà concorrere: rimangono esclusi li soli tre Giudici. Le Memorie dovranno essere inedite, scritte in lingua Italiana, e pervenute nelle mani del Segretario entro il termine prescritto dal programma: il nome degli Autori sarà occulto; ogni Memoria porterà in fronte un motto, e sarà accompagnata da un biglietto suggellato, contrassegnato al di fuori dal medesimo motto, e contenente, al di dentro in maniera occultissima, nome, cognome, patria, domi-

cilio e profession dell' Autore. Il mancare a qualunque delle antecedenti condizioni fa perdere il premio.

Tosto che il concorso sia chiuso, il Presidente, veduto il numero e l' estensione delle Memorie, definirà il tempo, entro il quale ogni Giudice dovrà pronunziare il giudizio. Allora il Segretario trasmetterà le Memorie, tutte unite, ad uno de' Giudici: da cui restituite che siano e notificato il proprio giudizio al Segretario, saranno da questo fatte pervenire ad altro Giudice; quindi con le regole stesse al terzo. Ogni Memoria coronata da un Giudice, sarà stampata, col nome dell' Autore. Il premio sarà dato a quella Memoria, che venga coronata da tre, o da due Giudici. Se tutti e tre li Giudizj fossero discordi, si dividerà il premio fra le tre Memorie coronate. Lo stesso si farà tra due coronate, qualora un Giudice negasse il premio a tutte le Memorie, e gli altri due non fossero concordi. Che se fossero due li giudizj di negativa generale del premio, in tal caso il terzo giudizio non sarà di alcun valore: si notificherà alla Compagnia l' esito del giudizio e si passerà alla pubblicazione di nuovo programma, coi metodi stabiliti sopra.

Ma quando sia conferito il premio, il Segretario annunzierà prontamente ai Socj ed a tutta l' Italia il nome degli Autori delle Memorie coronate, indicando quello cui spetta il premio. Esse Memorie saranno stampate senza indugio; se ne spedirà un esemplare ad ogni Socio, 12 della propria a ciascun degli Autori coronati, 38 di più al premiato: i rimanenti si esporranno a vendita pubblica.

MEMORIE
DI
MATEMATICA E DI FISICA.

SAGGIO

Sopra la Prosopalgìa, *e della sua analogia colla* Pedionalgìa

di Giovanni Antonio Marino

AGLI EGREGI MEMBRI DELLA SOCIETA' ITALIANA.

> *Scientia, & potentia in idem coincidunt, quia ignoratio caussae destituit effectum.*
>
> Baco de Verul. nov. scient. org.

Ricevuto li 13. *Novembre* 1800.

Non vi parlerò, Egregi Socj, di cosa novissima nel Saggio, che a voi presento, mi lusingo però, che sarà per essere cosa utile, ed interessante, poichè egli à per oggetto l'umanità sofferente, ad alleviamento della quale la natura stessa ci invita a profittare delle cognizioni, che l'arte, e la scienza ci somministrano.

Il soggetto di questa Memoria si è una per me singolarissima malattia di già descritta, e resa pubblica nel Giornale fisico medico di Pavia nel 1792 ad oggetto allora mio principale di procurarmi validi mezzi per addolcirla, e curarla da Dotti Medici di Italia specialmente, a cui gli invitavo, e de' quali il generale silenzio mi ha defraudato nella lusinghiera speranza mia, e confidenza. Resta però ora superfluo ad un tal fine di ripeterne quivi la minuta descrizione, ed istoria, da che ella si può di leggieri riscontrare nel Giornale citato (*a*), giacchè avventurosamente la malattia si è in modo, ed in forza snervata, e raddolcita a non incomodarmi gran fatto pella rarità de' suoi parosismi, e pella tollerabilità de' dolori, a cui si trova presentemente ridotta.

Il motivo poscia di scrivere questo Saggio, e di dirigerlo, e sottometterlo alla prudente disamina del vostro giudizio, fu in me recentemente promosso dalla lezione del quarto volume degli opuscoli scelti dato alla luce dall' Illustre Professore Brera di Pavia, in cui rinvenni registrata la dissertazione di Giovanni Martino Weisse sopra il dolore della faccia già denominato da' Nosologisti col nome Latino *di Itrismus dolorificus*, da' Francesi di *Tic douloureux*, e dal medesimo caratterizzato col nome greco di *Prosopalgia*, in cui mi avvidi di una analogia grandissima colla mia periodica irregolare malattia, sebbene in sede così disparata, da cui derivandone l' etimologia avevo imposto quello di *Pedionalgìa* (*b*) esprimente dolore nel sottopiede, nel quale consiste. La singolarità perciò dell' unico mio esempio, per quanto a me finora sia noto, e di tale analogia fra due malattie in tanta distanza di sede, e varia costruzione, la loro origine, la pertinacia loro, e renitenza ad ogni soccorso tentato dall' arte, mi hanno indotto a trattarne con qualche estensio-

---

(*a*) Ved. *Giornale Fisico-medico, ossia Raccolta di osser. ec.* di L. Brugnatelli med. ec. Pavia 1792. quad. 18 Aprile. Lettera prima.

(*b*) Mi cade in acconcio di quì avvertire, che nella citata mia lettera al D. Brugnatelli stampata in Pavia sono trascorsi due errori riguardo al nome di *Pedionalgìa* trovandosi scritto *Pediontalgìa* nella prima Lettera, e replicatamente *Pedontalgìa* nelle seguenti.

zione , a mio , e pubblico vantaggio ; giacchè la lunghezza del morbo mi ha somministrato riflessioni più mature per considerarne la natura , e compararlo . Mi prevalerò , nell' esame dell' analogia , di alcuni testi del Weisse , ma specialmente della Storia esattissima del Reil apposta in nota alla citata dissertazione alla pag. 142 della medesima . Passerò quindi alla disamina delle varie opinioni degli Autori , che ne scrissero riferite dal Weisse riguardo alla sede , ed alla causa , e finalmente de' rimedj moltiplici per la maggior parte inefficacemente tentati , e del solo vantaggio riportatone col mezzo delle strofinazioni fatte alla parte dolente coll' unguento mercuriale suggerito , e praticato dall' Illustre Starkio , che desidero venga da ulteriori successi confermato . Mi servirà inoltre di scorta nella indagazione delle varie cause del morbo , e de' mezzi co' quali fu diversamente trattata la prosopalgìa l' ampia Memoria , che ne scrisse già l' esimio M. Thouret inserita in quelle della Accademia di Medicina di Parigi , in cui incombenzato dell' esame dell' opera di M. Pujol sopra lo stesso soggetto , sembra che nulla abbia omesso riguardo a questi due articoli essenziali . (c)

(c) Ved. *Sylloge opusc. select.* Valer. Alois. Brera M. D. Vol. IV. Ticini 1799. e *Memoire de Medecine, & de Fisique medicale &c. an.* 1782. premiere partie de l'an. 1783. Vol. 7. pag. 204. Memoire sur l'affection particuliere de la face , à laquelle on a donné le nom de Tic douloureux par M. Thouret ; e quì debbo anche prevenire i Leggitori , che sino dall' anno 1796 , se mal non mi appongo , consegnai al Dottore in medicina Giambattista Simonetti allora condotto in Bertinoro una mia comparazione di analogia fra la malattia della Pedionalgìa colla storia d' una prosopalgìa descritta dallo stesso M. Thouret negli atti parimente della Accademia di Medicina di Parigi Vol. III. an. 1776 , la quale era una appendice alle mie Lettere al Sig. Dottore Brugnatelli , e che avrebbe dovuto inserirsi nel secondo volume delle osservazioni Mediche , e Chirurgiche ec. , il di cui primo volume s' era di già pubblicato colle stampe d' Imola sino dall' anno 1793 , ma non ebbe poi effetto la sua continuazione , onde non mi consta , che altrimente sia ella stata resa pubblica .

ESPOSIZIONE

Della Storia della prosopalgìa del Reil riferita dal Weisse p. 142.

§. 1.

Un cert' uomo W. n. ministro del Vangelo d' età d' anni XL. di temperamento collerico , di colore pallidogiallo di faccia , godeva d' un abito robusto di corpo , ampio negli omeri , di statura mediocre . Non ebbe prole nel suo matrimonio . Viveva soggetto a profusi sudori ad ogni movimento di corpo , od agitazione di spirito . Soffriva emorroidi cieche unitamente a pertinace sudore , e molesto prurito , sano pel resto , e giammai per l' addietro affetto da grave malattìa .

§. 2.

Sono trascorsi sedici anni

PARALLELO

Colla pedionalgìa .

§. 1.

Stimo superfluo di quì riferire il mio temperamento , e stato precedente di sanità a confronto del riferito dal Reil nel soggetto di prosopalgìa , sia perchè quello già trovasi ampiamente esposto nella mia storia della sciatica preceduta alla pedionalgìa (*d*), e molto più perchè consta dalle varie storie , che si trovano registrate dagli autori , che trattarono della prosopalgìa , che la varietà de' temperamenti delle età , e delle malattie pregresse nulla ha influito all' invasione della medesima . Perciò , che spetta poi alla cura , si avrà occasione di parlarne, quando si tratterà della stessa .

§. 2.

Consta dalla citata mia Storia ,

(d) Ved. *Delle acque termali di Vinadio ec.* Cam. di G. A. Marino. In Torino 1775. presso Madresse Oss. 49. pag. 91. e seg.

dal che nella regione de' denti incisivi fu egli sorpreso da un acerbissimo dolore pungente, ma fugace, il quale in un momento passando in guisa di fulmine scompariva, e ripigliava. Nel principio della malattia questo fenomeno si fece alternativamente sentire pel corso di dodici, e più settimane, col progresso poi gli intervalli si resero più brevi, sempre mai però mutando, e modo, e sito.

§. 3.

Pendente un certo dato tempo, e costantemente per alcuni anni sentir si faceva il dolore nella regione del dente molare di mezzo della mascella destra superiore. Nelli due ultimi anni ascendendo dai denti molari superiori insino alle tempia, e di nuovo discendendo si estendeva sino alla articolazione della mascella destra. In questo sito il dolore era ardente, e nel dente si faceva sentire più pungente, e tagliente. Qualche volta spiccando dal dente assaliva la stessa lingua, e la

ria, che la *Pedionalgìa* m' invase dopo la risoluzione della paralisi del piede destro, e che il modo, il tempo, la forza, gli intervalli del dolore sono gli stessissimi, avuto riguardo però alla varietà della sede, e delle diramazioni, delle espansioni del nervo ischiatico nel sottopiede da quelle della faccia, le quali in sostanza non alterano la stretta analogia, che passa fra le due malattie.

§. 3.

In me il dolore sorprende per lo più alcune diramazioni nervose del lato esterno destro del sottopiede, trasportasi alcuna volta nel mezzo di esso, passa altra fiata a circondare come da legatura il dito mignolo, sorprende non di rado ora uno, ora due, ed ora tutti i polpacci delle altre dita, e quasi all' unisono, intatto però sempre il pollice. Ebbi degli intervalli di settimane, di mesi, e di anni, ed una volta di tredici mesi. Essendo eccessivo il dolore traeva seco per consenso la

con-

tormentava tutta insino alla sua punta.

§. 4.

S'accrebbe negli ultimi giorni il dolore, così che in una settimana, in uno stesso giorno, anzi nel corso d' un' ora spesso ripeteva. E sebbene il dolore non fosse perseverante, ma a guisa di percossa elettrica presto scomparisse, egli era però così intenso, che traeva seco la contorsione di tutto il volto, la concussione di tutto il corpo, onde ne seguiva il tremore delle articolazioni tutte, e le cadeva di mano quanto in tal tempo riteneva. Lo spasmo eccitato dalla intensità del dolore induceva una copiosa salivazione espressa dal condotto stenoniano con sollievo del male.

concussione, lo spasmo, il tremore di tutto il corpo, e persino il trismo della mascella inferiore, ed avendomi una volta sorpreso ritto in positura col piede sinistro elevato per il passo, dovetti cadere per terra.

§. 4.

Ne' primi periodi erano gli slanci, e più rari, e meno acuti, siccome le accessioni più frequenti, e meno forti, ma di più lunga durata per più giornate, cosicchè poteva con qualche stento però vacare agli affari miei più premurosi. Indi poi si resero più frequenti, e più brevi non oltrepassando i periodi di accesso le ore dodici nel suo vigore, ma l'intensità s'accrebbe indi poi gradatamente oltre modo di forza, e di acutezza scintillando per lo meno ogni minuto secondo nelle prime ore, e diradandosi insensibilmente verso il fine del periodo, a cui succedeva una fiacchezza eccessiva delle forze muscolari, ed il sonno.

§. 5.

§. 5.

Il dolore non suscitossi mai spontaneamente, ma ebbe origine sempre mai da causa esterna. In seguito alla masticazione, ed appunto nel suo principio (poichè continuandola il dolore svaniva), alla deglutizione, al menomo movimento della lingua repentinamente li slanci si suscitavano, e nella interruzione del sermone, o del colloquio si risvegliavano nel riassumerli, quando che nel discorso continuato, i dolori, che cinque minuti prima vigoreggiavano, si assopivano, cosicchè poscia l' infermo poteva continuare le sue istruzioni morali al popolo senza dolore, ma appena terminata l' orazione, e sospeso il discorso, se di nuovo si accingeva a parlare, subitamente si rinnovava il dolore. Ogni leggiero contatto però alla guancia col solo dito, coll' apice d' una penna, colle forbici pella tonsura de' capelli, colla soffregagione della saponata per la ratura, esacerbava il dolore congiunto col tre-

§. 5.

Nel mio caso all' opposto suscitaronsi i periodi sempremai spontaneamente, od almeno senza causa avveduta, o riflessa esterna, se non se alcuna fiata in conseguenza di forte succussione sofferta da viaggi precipitosi in vetture men comode per istrade sassose; altre volte dopo lunghe sedute sopra seggiole dure, basse, ed incomode, e spessissime volte dopo forti patemi d' animo. Per lo contrario vigente il periodo, se rallentavasi il dolore, si riacerbava, e forti slanci succedevano ad un leggiero superficiale contatto della cute della parte affetta di cosa anche morbidissima passata alla sfuggita senza pressione, all' improvviso colpo di una grossa Campana, o d' altro eccitante rumore, anzi dal solo parlare di me, o degli Astanti dopo il silenzio. Intollerabili poi mi riescono in quel tempo le fregagioni, ed il solletico sopra tutte le diramazioni sottocutanee del nervo ischiatico tanto postiche, *more delle articolazioni. Anzi non di rado, cosa in vero meravigliosa, tale si dimostrava la simpatia del nervo affetto col sistema universale, che se si venisse a toccare, o stropicciare alcun lato opposto del capo, del braccio, o del femore, si eccitavano i dolori nella parte affetta. Spesso ancora accadeva, che dalla sola stropicciatura alle emorroidi cieche tale cosa avveniva, sebbene però spesso variasse il consenso della superficie cutanea irritata in varie parti, onde ora dall' una, ora dall' altra preferibilmente si rinnovasse il dolore. Senza però, che precedesse qualche locale irritamento soleva tacere il dolore, onde pendente il sonno, e la totale quiete del corpo, e della bocca viveva esente da ogni insulto, quando che appena svegliato al primo movimento della bocca per isputare la saliva riaccendevasi l' accesso. Il sonno pel corso di tanti anni non venne mai turbato, eccettuatene due notti sole, nelle quali si aggiunse l' odontalgìa unita a feb*che, che antiche, sopra, e verso il capo della fibola, circa il peroneo esterno, ed interno, al metatarso del piede destro, alla pressione degli sfinteri del retto, e della vessica, le quali cose in ogni tempo fuori di quello del periodo sogliono, parimente più o meno, suscitare una sensazione di slancio doloroso nel sottopiede, ma breve, debole, e fugace senza conseguenza ulteriore. Incerta, e vaga fu sempre in me l' ora, ed il tempo di sua invasione, così che indistintamente mi sorprese di notte, e di giorno, parlando, o tacendo, in moto, ed in riposo, digiuno, o satollo, prima, o dopo, o pendente il sonno senza previo preludio. Non si sopì mai il dolore pel sonno, bensì succedeva un lungo sonno dopo la cessazione del dolore, la quale o spontaneamente succedeva, o veniva procurata col mezzo degli oppiati massimamente se introdotti per l' ano nel retto intestino più prontamente agivano, onde il sonno per lo più si protraeva al-

bre, e pulsazione nella parte affetta,

alla notte seguente. Ometterò, che molte volte suscitossi il dolore del piede nell' invasione di alcuna febbre anche periodica, e cessò spontaneamente con essa, anche senza crisi apparente della medesima.

§. 6.

La parte affetta compariva sanissima, e tollerava senza consenso dolorifico, e la forte compressione della medesima, ed il caldo, ed il freddo. I denti erano sanissimi, e poteva mordere qualunque cosa durissima. Un dente sano estratto per esplotazione non recò sollievo alcuno.

§. 6.

Sanissimo comparve mai sempre l' intero mio piede, siccome tutt' ora si conserva, trattane una appena apparente magrezza in confronto dell' altro successa alla semiparalisi del medesimo, nel qual tempo cadettero le unghie di quattro dita, le quali sono state a poco a poco rimpiazzate da nuove. In tempo però degli accessi alcuna volta sembra intumidirsi quel sito da cui partono le scintille dolorose, e soffre impunemente fuori di tal tempo qualunque pressione anche forte, e 'l caldo, e 'l freddo; ma non mai le leggerissime confricazioni cutanee senza consenso molesto.

§. 7.

Non eravi luogo, o moti-

§. 7.

Lo stesso posso asseverare ri-

zo a sospettare per causa alcuna specifica acrimonia, tanto meno la cancerosa, o psotica. Si sono sperimentati varii rimedii, e molti. Fra gli interni ebbero luogo i saponacei, i viscerali, i più specifici anthelmintici, e specialmente la cicuta, e la bella donna, e l'aquila bianca, e fra gli esterni i vessicanti, linimenti, embrocazzoni, ma tutti in vano. Dalla sola elettricità riportò qualche momentaneo alleviamento.

§. 3.

Innumerevoli trovansi presso gli Autori le osservazioni di tale malattia. D'una prosopalgìa mortale riferisce il caso Ballonio. L'esempio d'una enorme nella guancia sinistra si trova registrato negli atti de' curiosi della natura vol. 1. oss. 161. D'un' altra periodica superata col mezzo della recisione del nervo infraorbitale ne rapporta la Storia Van.

riguardo ad alcuna delle cause evidenti di acrimonie speciali, sopra del che però mi riserbo di parlarne più in esteso in altro luogo. Per ciò, che spetta poi alla selva de' rimedii praticati, io non credo d'averne omesso alcuno fra gli indicati, trattane la cicuta, e la bella donna per le ragioni già da me addotte nella sopracitata mia lettera al D. Brugnatelli, in cui ho fatta menzione di qualche fugace sollievo ricavato dall' applicazione del ferro magnetico, della inefficacia della elettricità, siccome dal moltiplicato uso delle terme di Valdieri, e di Vinadio.

§. 8.

Basta leggere la Memoria di M. Thouret per convincersi essere assai frequente la prosopalgìa osservata da molti autori Inglesi, Francesi, e Tedeschi, di cui non ne trovo traccia sin' ora fra gli Italiani. Della pedionalgìa poi non ne trovo traccia presso alcuno, ed a me solo, per quanto io sappia fin' ora, è toccato di soffrirla, e di osser-

Wy (l' editore) *ed in altro soggetto s' aprì un ulcere sotto l' unghia del pollice del piede , a cui s' era esteso il dolore ischiatico discendendo , che in fine dopo più mesi d' intollerabili dolori lancinanti , ed a forma di slanci , e di scintille , che di là partivano si scoperse la carie della falange sottoposta , da cui guarì poscia perfettamente , e de' dolori . Ma tanto nell' uno , che nell' altro caso il dolore non era , siccome in me , così distinto , e ricorrente ; nè aveva lunghi , o brevi intervalli , ma continuò dal suo apparire senza intermissione di giorni sino al suo termine , e passaggio nelle malattie succedanee .*

servarne due casi analoghi con differente successo in seguito parimente a sciatica sofferta senza però successione di semiparalisi . In un soggetto succedette alla sciatica un dolore lancinante nel piede , e dopo più mesi di martirio si manifestò un ulcere fra il malleolo esterno , ed il tarso , che non mai cedette ad alcun metodo , onde fattosi gangrenoso recò la morte all' infermo ottuagenario .

§. 9.

Dopo l' esposizione della Storia del Reil , e del paralello suo colla *Pedionalgìa* passerò ora a fare qualche cenno sopra la probabilità della sua causa , relativamente però a quanto possa influire alla dilucidazione del mio caso , scopo principale di questo saggio .

Ma non saprei , a dir vero, quale considerazione possano meritare le cause predisponenti addotte, o sospettate dagli Autori , che scrissero della prosopalgìa, sebbene in alcuni rarissimi casi la cognizione loro abbia potuto determinare le indicazioni della cura quando palesi si fecero le acrimonie da' quali dipendeva per la loro aberrazione, se nella maggior parte a nulla giovarono. Unico, direi quasi, si è il caso fortunato della osservazione di Rademacher riferita negli Annali di Huffelandio di un erpete farinoso comparso alla cute, e suscitato col mezzo dell' estratto di napello, che superò la malattia. Mi lusingai io stesso, ma invano, quando ne' primi periodi della pedionalgìa comparve dietro l'orecchio destro un ampio erpete di tal natura, e che tuttora sussiste, e quando nacquero due volte separatamente lungo la spina del dorso dei tumoretti cistici, che suppurarono, e quando le morici secche, e dure si ammollirono, e fluirono, ed in seguito di disenteria una volta senza sollievo di quella.

§. 10.

Considero bensì quanto in generale l' ipotesi delle indicazioni prese, ed operate in conseguenza delle malattie pregresse, o concomitanti, resa abbia illusoria la cura tentata della prosopalgìa. Ed in vero nel caso riferito dal Weisse pag. 140 di sua dissertazione della malattia nata in una Donna di diecinove anni in seguito a scabie soppressa, che la travagliava ancora nell' età sua di settanta due anni, essendo in quella pochi anni prima di sua morte spontaneamente comparsa una scabie secca, svanì il dolore, ma medicata la scabie coll' unguento di Werloffio, e scomparta la medesima, immantinenti rinacque il dolore, e non dice l'Autore se altra volta siasi replicato lo sperimento, e con qual esito. Ma comunque ella sia la cosa, qual differenza non passa fra le operazioni spontanee della natura, e le sostituzioni imitate dall' arte? Nessuno ne ignora il divario. In generale perciò questi fortunati avvenimenti sono rarissimi, siccome riscontro dalla numerosa serie delle osservazioni raccolte nella diffusa Memoria citata di M. Thouret, nelle quali la teoria delle cause della malattia poco, o nulla ha influito all' esito felice della cura. Consta dalle medesime, che

la stessa recisione d'alcun ramo de' nervi, che si distribuiscono alla parte affetta, la quale non può sempre aver luogo senza rischio, e conseguenza, non ha che rarissimamente riuscito a superarla, quando si è considerato il morbo semplicemente locale, e che il magnetismo, e la elettricità ostinatamente praticate hanno quasi sempre defraudate le speranze, e la confidenza del medico, e dell' infermo, sempreché fu giudicata la malattia dipendente dall' alterato sistema nervoso, o dalla sua aberrazione riguardando il fluido nerveo analogo ad uno de' due fluidi magnetico, od elettrico. Parlo della cura eradicativa, e non della palliativa, sebbene ancora non sia sempre riuscito con tali mezzi di calmare il sintoma momentaneo del dolore. Tralascio di estendermi nella enumerazione de' casi enunciati nella memorata memoria, e di sommarne i risultati per brevità, ma che di leggeri si riscontrano da chi con attenta, ed imparziale considerazione vorrà assumerne la disamina colla Lezione della medesima, la quale merita ogni pregio, e riflessione, e conchiuderò con M. de *Champserù* citato nella medesima dissertazione (c), che la causa, e la sede più proba-
„ bile della *prosopalgìa* si debba riporre in un qualunque
„ menomo, ed anche non apparente ristagno di umore oc-
„ cupante alcuno degli organi particolari, *a'* quali si distri-
„ buiscono le ramificazioni del quinto pajo, e loro comu-
„ nicazioni colla porzione dura del settimo pajo, sebbene
„ molti altri delli Autori citati ammettano le cause simpa-
„ tiche.

§. II.

Ora affine di tracciare con qualche ordine la disamina della causa, e della sede della pedionalgìa, le quali stabilite, mi serviranno di scorta a ricercare poscia quali possano essere le cause determinanti le accessioni, esaminiamone brevemenmente il principio, e la progressione. Ebbi già occasione di accennare, e debbo quivi ripeterlo, che sino dall' anno 1762 dopo una lunga, e molesta Lombagine nel mese di Dicembre fui sorpreso da atrocissima Sciatica postica nervosa nel femore destro, questa cedette in fine in conseguenza d' un empiastro diaforetico sperimentato applicato alla gamba dello stesso lato, ma che non la comprese tutta intera unitamente al piede dal sotto-ginocchio al capo della fibola sino all' apice delle dita siccome era prescritto, e ne restò indifesa, e scoperta la parte tutta postica del piede, (a cui di già si estendevano gli acerbi dolori), dal calcagno diagonalmente passando come a retta linea sino al pollice nel sottopiede. Cedette in pochi giorni il dolore ischiatico, ma la parte tutta del piede indifesa dall' empiastro trovossi priva di senso, di moto, di calore, e come essiccata. Era allora il mese di Febbraro dell' anno 1794. Trovato inutile ogni mezzo tentato per guarirne sino all' estate dell' anno stesso passai sul fine di Giugno alle terme di Vinadio, ove coll' uso lungamente praticato delle medesime nelle varie sue forme diversificato in bevanda, in bagno, in doccia, in fango, e stufa si risvegliò in fine il senso, rinacque il calore, riacquistò in gran parte il suo moto il piede; ma questo dopo alcun tempo si rese tumido, si fece erisipellacio. Si sciolse a stento la risipola, a cui succedette un dolore terebrante al peroneo della gamba, ed a questo successero indi poi le prime invasioni della pedionalgìa ribelle, che tutt' ora dopo trenta sette anni di pertinacia non è pienamente domata.

(c) Ved. L. C. pag. 241, e seq.

§. 12.

Sembra perciò ragionevole, e consegnente il credere, e stabilire, che l' eccedente umore sieroso, o linfatico ristagnante nel tessuto cellulare della guaina investiente le diramazioni superiori del nervo Ischiatico, causa efficiente della sciatica nervosa postica, giusta le prove dimostrative del Cotunnio, fu per la sua maggior parte attenuato, ed espulso da' suoi ristagni per mezzo della trasudazione copiosa apparente indotta, e sostenuta pel corso di circa quaranta giorni dall' applicazione dell' empiastro; ma che una parte siasi potuta deviare, ed annicchiarsi nel sito del piede rimasto indifeso, e privo dell' empiastro. Da un tale ristagno ragion vuole, che si deduca la causa della paralisi, poichè reso l' umore meno scorrevole, e più compatto per la tenue trasudazione superiore promossa, avrà potuto comprimere, costringere, ed avvincolare sì fattamente le diramazioni sottocutanee inferiori del nervo stesso, e del tessuto cellulare, onde indurre la stupidezza, e produrre l' emaciazione, e la paralisi, solita conseguenza della sciatica imperfettamente guarita.

Superossi la paralisi quasi pienamente dal valore delle terme, ma forse non riuscì egli tale a rimettere nella sua giusta naturale proporzione l' umore ristagnante, di assimilarlo, e di ridonare al tono delle fibre muscolari la sua energìa perduta, a tollerarne l' incarico, onde dal vizio del ristagno siasi sempre più l' umore alterato, e reso stimolante, e capace di irritare il particolare sistema de' nervi di quella parte, e di indurlo alla sensazione dolorifica. Una ragione di una tal causa, ed in un tal sito io la deduco da che le diramazioni nervose colà non iscorrono cotanto sottocutanee siccome nella gamba, e parimente perchè in tempo della paralisi la pelle tutta della pianta del piede s' era resa cotanto callosa, dura, e secca, che a stento, e fatica col mezzo del bagno di vapore di malvavischio lungamente praticato non mi riuscì totalmente di ridurre allo stato suo naturale di sottigliezza, flessibilità, e morbidezza la pianta stessa del piede. Ragion vuole perciò, che se si riguarda la malattia umorale, riporre si debba la causa della pedionalgìa nel ristagno, ed acrimonia dell' umore reumatico.

§. 13.

Che se poi vogliasi ragionare sopra le acrimonie specifiche, e cercarne la loro origine, provarne la esistenza, e la loro differenza, e se fra esse reputar si debba la reumatica, dirò schicttamente, ch' io sono del parere di Eusebio Valli, cioè, che le acrimonie degli umori sono una alterazione loro prodotta nella loro secrezione per vizio morboso del viscere secernente, reso tale da qualunque causa o congenita, od accidentale, che ne muti la sua naturale disposizione, ed intima struttura, lo che spesso dipende dalla sbilanciata situazione del sistema nervoso o parziale, od universale (f). In questo senso tante possono essere le acrimonie, quanti sono gli umori che si separano dal sangue nel corpo umano, e tanto varie quanta esser può variata la struttura intima dell' organo che li separa. Quando poi si cerchi ragione sopra la causa delle malattie nervose, così dette, senza materia, trovo difficoltà di assentire al sentimento del Sig. With, ed a quello del Sig. Potteau, che comunque impercettibile ai sensi possa essere il liquido qualunque, ch' eglino incolpano sempre mai siccome causa attuale delle medesime, e de' suoi periodi, esista questo umore separato, e ristagnante fuori del sistema della circolazione del sangue annicchiato nel tessuto cellulare, ripugnando una tale ipotesi all' improvviso modo d' invadere delle medesime, ed alla impercettibile loro risoluzione. Confesserò però con tanti altri d' ignorarne la loro vera essenza senza arrossirne, concependo nulla meno coll' esimio Toaldo quanto grandi effetti nascere possano da' moti piccoli. (g)

§. 14.

(f) Ved. *Saggio sopra alcune malattie di Eusebio Valli*. Pavia 1792. Ved. *Les vapeurs ec. de M. Whistt. Paris.* 1767., *et Melanges de Chirurgie par M. Potteau. Lion.* 1760.

(g) *Saggio meteorologico*. Padova 1770. *presso Gio. Manfrè*. part. 1. artic. 1.

§. 14.

Ma che prò dopo tali premesse riguardo alle indicazioni della cura dell' ultima successione morbosa permanente, cioè a dire della pedionalgìa, e della sua affine di cui si tratta. Anche Fottergil, che riponeva la causa della prosopalgìa nella cachessia cancerosa, non potè sempre ottenere di domarla coll' uso costante de' più scelti rimedii fra gli anticancerosi, e distrarne col fomite gli effetti (h). Trovo io registrato nelle mie osservazioni un solo caso di prosopalgìa avvenuto in una vergine di mezza età di vita onesta, e saggia, saranno ormai più di trent' anni. S' eccitarono in questa quasi improvvisamente senza previa alterazione nell' universale sistema acerbissimi dolori lancinanti, terebranti, e fulminanti nella mascella, che ora sembravano partire dalle diramazioni de' nervi che si distribuiscono all' orecchio destro, ed ora da quelle che tendono agli alveoli de' denti della mascella superiore destra, e si fissavano per lungo tempo ne' muscoli deducenti la mascella inferiore onde impedirle d' aprire la bocca. Comparvero in quel tempo alcuni tumoretti indolenti delle ghiandole del collo di quella parte, i quali furono attribuiti alla irritazione d' un vessicante appostole dietro l' orecchio destro in considerazione della pretesa odontalgìa, e la serie di tali tumoretti ghiandolosi propagossi gradatamente dal collo alla mammella; restarono per più mesi indolenti, in fine alcuno d' essi cominciò a dolere, e prurire, ad elevarsi, a rompersi, ed a degenerare in un' ampia piaga cancerosa. Non si sono certamente risparmiati i più validi anticancerosi rimedii, fra' quali l' estratto di cicuta lungamente continuato, senza mai ritrarne il menomo sollievo, sia riguardo all' ulcere, sia riguardo alla prosopalgìa, che continuò incessantemente a travagliarla acerbamente in sino alla morte, la quale succes-

---

(h) Ved. Mem. de l'Acad. de Med. de Paris L. C.

se dieci mesi circa dopo la prima invasione de' dolori, i quali mai si poterono calmare altrimenti che con dosi egregie di oppio. Ed ecco una osservazione, che non confassi, nè quadra colle due rapportate una dal Weisse, e l' altra dall' Huffelandio già riferite, dalle quali risulta, che dall' erpete farinoso comparso, e dalla scabie suscitata per mezzo de' rimedii praticati fu superata la prosopalgia, quando che nel mio caso allegato la prosopalgia nacque anche prima della manifestazione della cachessia cancerosa, e la manifestazione di questa, e l'espurgo dell'ulcere; ed i rimedii diretti alla sua correzione nulla valsero a domarla, non che a superarla.

Quanto difficile impresa ella sia la investigazione delle cause prossime delle malattie a cui va soggetta l' umana natura, lo ha dimostrato l' immortale Morgagni nel suo aureo Libro delle sedi, e delle cause delle medesime. Elleno non sono sempre suscettibili di precisa cognizione, e non sarà sempre errore imputabile all' arte ristretta in limiti circoscritti l' abbaglio, e l' inganno, che ne forma il giudizio, quando non à per base che la sola congettura. Chi non avrebbe creduto nel caso della iscuria di trentatre anni nella giovane riferito dal celebre nostro Collega Leviani di rinvenirne la vera causa nella sezione del suo cadavere? Eppure al riferire dell' attento, ed esperto Antonio Manzoni dalla sezione del medesimo non si potè cosa alcuna raccogliere, che in luce ponesse la cagion vera di una si costante soppressione. Il suo corpo spargeva un odore acinoso per tutta la camera, e le sue camicie, e vesti ne erano sempre infette. In tutto il corso della malattia prese più di dugento libre d' oppio, essendo arrivata a prenderne dugento grani per giorno, i quali si amministravano con utilità per sedare gli acerbi dolori de' lombi, e del ventre, che tormentavanla soventemente, e calmavano ancora la rabbia interna, che la opprimeva. (*i*)

§. 15.

(*i*) Ved. observ. patolog. Auctore Ant. Manzoni. Veronæ Typis Moroni. Mictionis vitia.

§. 15.

Premessa questa breve digressione, ch' io non credo disparata dal soggetto di cui si tratta, parliamo ora della possibilità della cura della pedionalgìa ribelle sempre, comparata a quella della prosopalgìa. Ella non cedette nel corso di più di trenta sette anni alla forza non indifferente di moltiplicati, e variati rimedii tutti indicati, tanto riguardo alla causa primaria reumatica, da cui pareva dipendere, quanto relativamente alla paralisi succedanea alla stessa, e finalmente per ciò che spettar potesse alla mobilità nervosa, od alla aberrazione del suo fluido, qualora esista, tutti specificati nella storia della malattia. Anzi che la pertinacia dell' asma spasmodico, che mi travagliò per ben quattro anni continui periodicamente mi somministrò occasione, e motivo di non ammetterne alcuno fra quelli, che parevano indicati dalla causa d' ambe le malattie, che spesso si congiunsero, od alternarono (*k*). Questo in fine superossi in conseguenza d' una cura corroborante unita alla distrazione di mente da ogni seria meditazione, ed applicazione favorita dall' esercizio campestre, quando che la prima sussiste tutt' ora, sebbene in gran parte moderata, e si risveglia ad ogni alterata sensazione o fisica, o morale di qualche riguardo, e forza. Dovrà dirsi perciò, che la costituzione del nervo siasi di maniera alterata nella sua sensibilità a riscotersi preternaturalmente ad ogni emozione dissonante ad un certo grado, onde ne abbia contratta l' abitudine incorrigibile, ed insuperabile? (*l*) M' induce a pensarlo l' esempio d' una gran parte delle malattie nervose, e l' inefficacia de' rimedii, che si praticano in esse.

(*k*) Ved. Gior. Fis. Med. di Pavia L. C.

(*l*) Ved. Zimmerman. della sperienza in Medicina.

§. 16.

Ma se frustranea riesce la cura eradicativa delle malattie nervose rese confermate, ed abituali, possiede l' arte almeno a sollevamento degli afflitti dalle medesime nel suo maggior numero il modo di alleviarne i dolori, e le angoscie, e qualche volta di troncarne gli accessi, di sminuirne la ferocia, o di abbreviarli. Se non è riuscito ne' casi della prosopalgìa, o se nel mio della pedionalgìa non ha corrisposto alla mia aspettazione l' uso dell' oppio, in cui solo consiste una tale virtù sedativa, io penso di non ingannarmi se credo, che abbi mancato il suo effetto per difetto di dose proporzionata alla intensità della causa pendente il periodo, o di non averne prevenuto l' accesso coll' anticipato uso del medesimo. Se io così la discorro, si è perchè dall' oppio solo fra tutti i praticati rimedii ricavai un evidente sollievo, sebbene per la mia connaturale costituzione non ne abbia potuto tollerare le dosi proporzionate al grado dell' intensità della causa per le maggiori turbazioni che si eccitavano nell' universale sistema, qualora volli tentarle. L' oppio si è il più potente diffusivo eccitante capace di recare la calma ne' dolori, in qualunque modo si consideri la sua azione, od il suo effetto. Io non mi estenderò quivi nella disamina della Dottrina di Brown riguardo alla sua azione, e modo di agire nelle malattie asteriche fra le quali riporre dovrebbesi e la prosopalgìa, e la pedionalgìa, per lo stesso motivo, che giudicai bene di sorpassarvi nella disamina della teoria delle loro cause. Io conosco il pregio, ed i difetti d' un tale sistema, e lo considero sin' ora quale l' Autore lo ha presentato, cioè, siccome una statua informe ancora, e rozza, che vuole essere forbita, e ripulita, e non dubito, che col tempo, e col mezzo di attente, e replicate osservazioni, e misurate riflessioni se ne ricaverà quel maturo frutto, che si spera, ed a cui aspira il commendevole zelo dell' Autore dei preliminari di pace fra Brown, ed i suoi Avversarj.

§. 17.

Ma prima di far passaggio alla esposizione della cura della prosopalgìa proposta dal Weisse, e confermata da tre sue osservazioni, delle quali mi restringerò a darne l' estratto, amerei, che meco si convenisse, che ad onta di tutte le teorie umorali riguardo alla maggior parte delle malattie nervose, non poche, e non raramente contrar si possono per mezzo della sola simpatìa inesprimibile, e inconcepibile del sistema nervoso, e confermarsi per la forza dell' abitudine a segno di eludere ogni sforzo dell'arte, se altrimenti si guardano, o si curano. Ne sono numerosi gli esempi presso la storia medica, ma fra tutti riuscirà sempre mai singolare quello delle epileptiche ragazze dell' orfanotrofio di Harlem riferito da Her: Boheraave da tutti conosciuto, siccome ammirabile è la sagacità del mezzo con cui risanolle l' immortale Boheraave suo Suocero. Sono pochi anni da che nell' orfanotrofio di questa Città eccitossi fra una considerevole parte delle Zittelle, che si trovavano in esso raunate, e custodite, una periodica affezione nervosa indotta simpaticamente dal solo improvviso aspetto di una fra esse sorpresa da una specie di Eclampsia nella sala comune del travaglio. Nove gradatamente, fra venticinque di esse in pochi giorni spettatrici delle compagne invase dall' accesso, e nell'ora precisa del primo contrassero la stessa malattia, e bastava in ciaschedun giorno a suscitarla, che una fra le medesime cominciasse a sbadigliare, a contorcersi, ad urlare, che dalle altre spettatrici veniva immantinente imitata, e cadevano in convulsioni, ed in spasmo. Si sarebbe moltiplicata la malattia sicuramente in tutte, se dopo un consulto tenuto col medico ordinario dell' opera non si fosse convenuto, ed eseguito il progetto di separarle ognuna fra loro dalle affette, di minacciarle severamente, e di prevenirle con distrazioni, ed improvvise occupazioni verso l' ora sospetta dell' ingruenza del parosismo. Con questo mezzo unito a qualche profilatico rimedio adattato allo stato, ed alle circostanze individuali s' ottenne in fine la guarigione delle affette, e la preservazione delle sane.

Non è nuovo quanto vaglia la distrazione di mente a superare, od a resistere alle fisiche abituali alterazioni morbose nelle malattie nervose, se ne' suoi principii si ha forza di praticarne i mezzi. Non sono rari i casi, che furono notati dagli Autori, e specialmente dal celebre Zimmerman nel suo Trattato dell' esperienza volume terzo, ove tratta delle cause rimote delle malattie, e mi sovvengo che ne' primi anni dell' invasione mia della pedionalgìa, allorchè, come di sopra scrissi, gli accessi non erano di una certa data forza eccessiva siccome si fecero in progresso, mi riuscì non poche volte di superarli, e fugarli col mezzo di seria applicazione a qualche Libro d' interessante soggetto, e nuovo, al giuoco, al passeggio, od anche improvvisamente sorpreso da affare serio, e pressante.

§. 18.

„ Questa malattia, scrive il Weisse, s' ella è locale, si
„ deve trattare con rimedii topici, e fra questi il più pres-
„ sante si è l' unguento napoletano. Questo unguento facil-
„ mente si assorbisce, e risolve i ristagni, e per mezzo della
„ irritazione indotta ne' vasi sottilissimi li eccita ad espellere
„ la materia nocevole; oltre a ciò, il mercurio accresce tut-
„ te le secrezioni, quindi è, che gli umori acri, e fluidi
„ di già attenuati possono espellersi dai loro nicchi, e così
„ liberati i vasi delle vagine nervose da' suoi ristagni, e li-
„ berati dal soggiorno della materia acrimoniosa, ragion
„ vuole, che cessi anche il dolore. Che se liberati i vasi dai
„ ristagni, ritengano ancora nulla meno la debolezza in pri-
„ ma contratta, nascer ne può un nuovo ristagno, e rinno-
„ varsi la malattia, onde fa d' uopo che la debolezza,
„ per quanto si può, si tolga col mezzo de' corroboranti ester-
ni,

„ ni , ed interni . Riguardo agli esterni giovano sopratutto i „ bagni freddi applicati alla parte . Che se poi la malattia „ non è semplicemente locale , si deve aver riguardo alla „ costituzione universale . Gli umori , per quanto è in potere „ del Medico , si debbono correggere , se viziati , siccome an„ che le acrimonie si vogliano emendate .

Prescinderò dall' esame della teoria dell' Autore sopra l' azione generale del mercurio applicato al corpo umano infermo , la quale nel caso concreto , e speciale della prosopalgìa riguardata come malattia locale, potrebbe essere soggetta a severa censura , e lo seguiterò nella prova , che somministra della sua reale efficacia nelle tre sue osservazioni seguenti , delle quali mi restringerò a darne un breve estratto .

OSSERVAZIONE I.

„ Nella prima si tratta di una Donna sterile , in cui , in „ seguito ad estraneo concubito dopo la morte del marito , al „ cessare de' suoi mestrui nel suo quadragesimo quinto an„ no di età si sostituì la Leucorrea (era ella forse sifilitica) , „ indi poi sorpresa da dolori ai denti , ed all' orecchio su„ scitossi la prosopalgìa , la quale non cedette all' estrazione „ de' denti sospetti di carie , agli evacuanti , ai revellenti , „ ed ai sudorifici . Sminuì poscia il dolore dopo l' uso d' una „ decozione di legno di ginepro , e d'erba di mille foglie uni„ tamente ad una polvere composta di gommi-guajaco , fiori „ di zolfo , radice d' iride , semi di finocchio , e zuccaro , a „ cui si aggiungeva alla sera una tenue dose di mercurio „ dolce ! ! ! Ma rinvigorendo poscia di nuovo il dolore , l' illu„ stre Starkio che la curava , tentò di sedare l' irritazione „ nervosa coll' oppio puro , coll' estratto di jusquiamo , e „ con quello di napello , ma invano , ed anzi con aumento „ del morbo . Quindi proscritto ogni altro rimedio passò alla „ fregagione della parte fatta con una dramma in circa d' un„ guento napoletano con olio di succino . Ciò fatto svanì in

,, breve ogni dolore, e ne visse immune per il corso di tre
,, anni. Rinnovossi poscia il dolore, e forse in conseguenza
,, di una infreddatura, e col mezzo di un consimile unguen-
,, to composto di manteca pomacea al peso d' un' oncia, e
,, due scrupoli di Calomelano dopo alcuni giorni cessò in-
,, teramente il dolore, nè mai più in poi si fece sentire
,, avendogli l' egregio Medico curante prescritti alcuni rimedii
,, corroboranti per compimento di cura.

Siami lecito il riflettere, che se l' unguento mercuriale adoperato e la prima volta, e la seconda non ha una virtù specifica contro tutti i dolori nervali locali, difficile impresa sarà quella di volere spiegare la teoria della sua azione in questo caso, ossia che si risguardi la prima causa della malattia, che si potrebbe sospettare per sifilitica, o la seconda apparentemente reumatica.

OSSERVAZIONE II.

,, Questa seconda osservazione si raggira sopra alcuni in-
,, fermi travagliati da similissimo morbo avente la sua sede
,, nel processo mazzoideo, e sue pertinenze, il quale aveva
,, luogo ad ogni movimento delle parti, e muscoli adiacenti
,, pendente il giorno, e cessante nella notte nel totale ripo-
,, so del corpo. Durava alle volte per dieci, o dodici giorni,
,, ed anche per altrettante settimane. Fu accompagnato al-
,, cuna fiata da febbre, e specialmente in alcuni soggetti di
,, fibra irritabile, e cessava altre fiate spontaneamente, od
,, alla comparsa di qualche foruncolo, od ulceretta sopra il
,, collo. Non giovarono i diaforetici, le fregagioni volatili, i
,, vessicanti, nè la stessa elettricità. Cedette in fine al solo
,, uso d' un unguento composto d' un' oncia di quello di
,, altea, di mezza dramma d' olio di succino, ed uno scru-
,, polo di Calomelano, con cui una volta nello spazio di
,, due, o tre ore si fregava la parte affetta, e più presto
,, ancora cessava il dolore, se alla stropicciatura s' aggiugne-

„ va l' uso interno della polvere composta di guajaco, e di „ etiope minerale, o mercurio dolce.

Avrebbe dovuto, a me pare, l' Autore di questa osservazione riferire il numero delle persone affette da tale malattia, il loro sesso, età e temperamento, siccome non obbliò di fare nella prima. Una tale deficienza lascia dubitare della sincerità del fatto, od almeno porge motivo e sospetto della causa forse non in tutti eguale. E riguardo alla cura, l'unione del rimedio interno all'esterno snerva non poco l' idea dell' azione specifica locale dell' unguento mercuriale, in cui sembra che l' Autore la voglia collocare.

OSSERVAZIONE III.

„ La terza osservazione viene somministrata da una „ Donzella d' anni venti d' età, sana di corpo, e regolata „ ne' suoi mestrui anche pendente il lungo periodo della „ prosopalgìa sofferta. Questa Zittella fu sorpresa nel mese „ di Dicembre dell' anno 1795. da un dolore, che occupa„ va la mascella inferiore del lato destro, il quale a poco „ a poco siccome negli altri casi riferiti crudelmente la tor„ mentava per ore continue, e specialmente s' esacerbava „ nella sera per più d' un' ora nel coricarsi. Lo stesso „ avveniva masticando, o bevendo sia caldo, sia freddo, „ ed alla pressione della parte affetta se presente, e rinno„ vavasi se assente. Nulla compariva di alterato eccettua„ tane una appena visibile elevazione, che di leggieri scom„ pariva. Nessun rimedio giovolle pel corso di dodici set„ timane. Il solo unguento di Homio aveva raddolcito, ed „ indi sopito il dolore per il corso di diciotto giorni, ma „ indi poi risvegliatosi nella parte opposta dopo mezz' ora „ trasferissi alla prima, e dalla parte esterna all' interna e „ di giorno, e di notte coll' aggiunta d' un senso di ghiac„ cio nelle articolazioni inferiori, che contribuiva a privar„ la del sonno. Passò ella in questo crudelissimo stato sei

,, mesi continui a fronte d' ogni rimedio, e dell' uso della
,, cicuta, e dell' oppio, da cui si accrescevano i dolori.
,, Finalmente col mezzo di piccola quantità d' unguento na-
,, poletano non maggiore della grossezza d' un pisello stro-
,, picciata sopra la parte affetta per due volte nella giorna-
,, ta, dopo la terza operazione cessò il dolore nel lato si-
,, nistro, sminuì nel destro, e dopo la sesta trovossi piena-
,, mente guarita. Non ebbe ptialismo nella continuazione
,, del rimedio. Continuò col medesimo l' uso de' diaforetici,
,, e la tintura volatile di guajaco, ed un vitto nutriente,
,, e corroborante, con cui ristabilissi l' inferma nel suo pri-
,, miero stato di sanità, in cui conservossi sino al tempo,
,, che ne pubblicò l'Autore la Storia, cioè nell' anno 1796.

Io avrei desiderato, che l' Autore di queste osservazioni fosse stato nella precisa circostanza di sperimentare la forza dell' unguento mercuriale senza previa preparazione di alcun rimedio, e senza la combinazione d' ogni altro, e solo solo avesse adoperata la strofinazione della parte dolente coll' unguento istesso. Allora sicuramente la cura ottenutane si sarebbe potuta attribuire allo specifico senza sospetto, che i rimedii interni specialmente avessero potuto contribuire alla medesima, e si avrebbe aumentata la fiducia nel suo valore, sebbene vi vorrebbero certamente più numerosi favorevoli esempii per costituirlo tale.

§. 19.

Spiace a me, che dopo la lezione della dissertazione del Weisse non mi si sia presentata occasione di tale malattia, che fra noi sicuramente è rarissima, poichè non avrei mancato di esplorare l' efficacia di un tale topico rimedio anche con confidenza.

Nel caso mio analogo, siccome dimostrai, immaginar potete, Egregi Soci, se fui tardo a farne lo sperimento dopo l' inutilità provata d' ogni altro per tanti anni di sofferenza . Ma per mia sventura , ossia , che provenga dalla diversa distribuzione delle diramazioni nervose nel piede da quelle della faccia , ossia perchè la pelle sovrapposta alle medesime più compatta , e quasi callosa, a differenza di quella della faccia soffice , e tenue , o pure perchè le ramificazioni nascono da un tronco più vicino alla loro origine , quando le prime provengono da un tronco nascente dalla midolla spinale, vana fu fin' ora la sperienza , nè corrispondente a quanto ardentemente desideravo . S' aggiunga poi , che la brevità in me , e la fugacità de' parosismi presentanei , i quali non sogliono ora oltrepassare le otto , o dieci ore , ed anche con qualche non rara intermittenza , la distanza degli intervalli fra loro di più mesi possono confondere la spontanea cessazione del parosismo morboso colla presunta azione calmante del rimedio .

Questo equivoco ebbi più volte occasione di rettificarlo, quando avendo cessato il dolore del piede poco tempo dopo che era stato strofinato d' un qualche topico unguento , o spirito , o balsamo anodino , m' era persuaso che l' efficacia d' alcuno fra loro cooperato avesse a superarlo . Ma cessò la lusinga ben cento altre volte , dacchè mancò l' effetto desiderato anche dopo replicate fregagioni dello stesso rimedio , semprecchè l' avido naturale desìo di procurarmi un pronto sollievo mi induceva a praticarlo nel principio del parosismo , e prima forse del tempo necessario alla risoluzione per via di quella crisi impercettibile , che fin' ora mi resta ignota . Debbo però quivi avvertire , che siccome nell' ingresso del parosismo , e lungo il corso del medesimo la pelle del sottopiede resta secca , ed arida , non si risolve mai il dolore senza che la medesima si faccia umida , e morbida . Che se debbo attribuire a qualche mezzo dell' arte la cessazione del dolore in ogni tempo , non saprei a quale se non se all' orizzontale positura del corpo in letto, alla previa slacciatura d'ogni veste, e d' ogni legaccia , alla privazione della luce , alla rimozione , e lontananza d' ogni benchè piccolo rumore , ed alla sospensiosione mia dal favellare, e dal sentire le altrui voci, siccome alla libertà di prorompere in grida, e lamenti.

§. 20.

Tentai, sono due anni ora trascorsi, allor quando numerose osservazioni corredate da sublime chimica teorìa si pubblicarono sopra la solubilità di non pochi specifici, e rimedii, promossa, e compita col mezzo della digestione loro nel succo gastrico specialmente de' carnivori, di farne lo sperimento. Feci preparare la manteca coll' oppio, e la ritenni per l' occasione. Presentatasi questa con un parosismo di pedionalgìa, tardai alcune ore nell' adoperarla. Infine incalzato dal dolore la posi in opera; e non passò mezz' ora, che dopo la prima strofinazione cessò il dolore, m' addormentai, e mi svegliai guarito. Ripigliò, un mese dopo, la pedionalgìa, e prima che s' invigorisse, mi accelerai di praticare la manteca. La stropicciatura fu prolungata, e fu replicata, ma senza frutto, e sollievo verano, se pure non si rese perciò più lungo, ed intenso il parosismo.

Così successe infaustamente replicate volte, onde proscritto indi poi ogni qualunque topico rimedio, m' attenni costantemente all' uso interno dell' oppio, e specificatamente della polvere anodina del Dower composta coll' estratto acquoso dell' oppio giusta la preparazione de' SS. Lassone, e Thouret, la quale da più anni a quest' ora non manca mai in breve tempo di qualche ora di calmare, di abbreviare, e di sciogliere il parosismo presa alla dose di cinque grani per volta, e replicata sino alle tre, o quattro fra il termine di due ore senza recarmi turbazione di mente, o sconvolgimento di stomaco. Sono persuaso perciò, che più pronto, e maggiore ne risulterebbe l' effetto vantaggioso, se la mia eccessiva sensibilità nervosa tollerar ne potesse le dosi maggiori, o più approssimate.

Ecco terminato il mio Saggio, o egregj Socj, ch' io sottotometto alla vostra disamina. Io non credo l'intenzione mia sprezzevole, ma temo di non avere soddisfatto alla vostra aspettazione, m'iscuserò con Orazio scrivendo . . . . . .

Fungor vice cotis, acutum
Reddere quae ferrum valet, exsors ipsa secandi.

Savigliano 24 Agosto 1800.

FORMULE PER CORREGGER LE DEVIAZIONI D' UN ISTROMENTO DE' TRANSITI

Di Antonio Cagnoli

Ricevute il dì 26 *Marzo* 1801.

Li miei pregiati amici, Lalande (*Astron.* 2607), e Lambre (*Con. des Temps*, 1792) han prodotto ad uso publico formule e tavole per emendare le deviazioni d' un Istromento de' passaggi, supponendolo senza errore al zenit. Io mi propongo un problema più generale: *Determinare le deviazioni d' un cannocchiale, il qual descriva un circolo massimo, tagliando il meridiano in qualsivoglia punto.*

Intraprese a risolverlo Bernoulli (*Recueil pour les astronomes*, Tom. I); ma per essersi avvenuto in espressioni avviluppate, ed in parte illusorie, lasciò aperta la speranza a migliori successi. Qualunque siano i miei, m' incoraggia ad esporgli lo scopo; il qual certamente non parmi di poca importanza ed utilità. Imperocchè l' astrignere un tubo astronomico a girar nel piano d' un cerchio massimo dipende in vero da operazioni meccaniche agevolissime, con chiarezza insegnate dal Lalande (2600). Ma non sono, a mio credere, ugualmente facili e sicure quelle altre, ch' Egli addita (2602, 2603), per conseguire che il detto cerchio sia un verticale.

Anzi ad esse antepongo, se pur non manchi per avventura un quadrante mobile, le altezze corrispondenti d' una stella, che passi da presso al zenit; le quali hanno anche il pregio di poterlesi compiere senza interruzione, e con grand' esattezza (Aubert, *Philosophical Transactions*, 1776). Checchè ne sia, la deviazione al zenit ben potrà meccanicamente ridursi tenue, ma non sarà mai così agevole da evitare del tutto, come da correggere dopo svelata a puntino dalle mie formule.

Distinguo il problema in tre casi, che abbracciano ogni occorrenza: ed assumo sempre, che niun errore ne' transiti o nelle loro differenze, ecceda 4 minuti di tempo; talchè gli angoli al polo, costituenti gli errori, permettano sostituir l'unità ai loro coseni, e sè medesimi ai loro seni.

PROBLEMA I.

Trovare l'error del passaggio osservato d'un astro, relativamente a due stelle, delle quali sia nota la differenza d'ascensione retta.

Sia P il polo (*Fig.* 1 e 2); PMER il meridiano dell'osservatore, FIL il cerchio descritto dal filo vertical del cannocchiale; FM, EI li paralleli delle due stelle, passate per F, I; LR il parallelo dell'astro comparato ad esse: quindi FPI l'error dell'osservazione nella differenza data d'ascensione retta; IPL, o FPL l'error che si cerca.

$$\text{Ora} \quad \text{tang.FIP} = \frac{\text{sen.FPI}}{\text{sen.PI cot.PF} - \text{cos.PI cos.FPI}} = \frac{\text{FPI}}{\text{sen.PI cot.PF} - \text{cos.PI}} = -\,\text{tang.PIL} = -\frac{\text{sen.IPL}}{\text{sen.PI cot.PL} - \text{cos.PI cos.IPL}} = -\frac{\text{IPL}}{\text{sen.PI cot.PL} - \text{cos.PI}}.$$

$$\text{Però} \frac{\text{FPI sen.PF}}{\text{sen.PI} \text{cos.PF} - \text{cos.PI} \text{sen.PF}} = -\frac{\text{IPL sen.PL}}{\text{sen.PI} \text{cos.PL} - \text{cos.PI} \text{sen.PL}};$$

$$\text{o vero} \frac{\text{FPI sen.PF}}{\text{sen.(PI} - \text{PF)}} = -\frac{\text{IPL sen.PL}}{\text{sen.(PI} - \text{PL)}} = \frac{\text{IPL sen.PL}}{\text{sen.(PL} - \text{PI)}}.$$

$$\text{Similmente si trova} \frac{\text{FPI sen.PI}}{\text{sen.(PI} - \text{PF)}} = \frac{\text{FPL sen.PL}}{\text{sen.(PL} - \text{PF)}}.$$

Adunque dicendo e l'error noto FPI; z l'ignoto IPL o FPL; D la declinazion della stella, rispetto a cui vuol sapersi l'errore z; d la declinazione dell'altra stella; δ la declinazione dell'astro ad esse paragonato; sarà

$$(A) \ldots\ldots z = \frac{e \cos.d\ \text{sen}.(D \backsim \delta)}{\cos.\delta\ \text{sen}.(D \backsim d)};$$

la qual formula si riduce anco, per cui piacesse più, (*Trigonom.* Tav. II, form. 24^a)

$$z = e \times \frac{\text{tang}.D \backsim \text{tang}\,\delta}{\text{tang}.D \backsim \text{tang}.d}.$$

Il segno $\backsim$, significante *differenza positiva*, diventa $+$, quando le declinazioni siano di nome diverso, cioè l'una boreale, l'altra australe: o quando i passaggi siano stati osservati, un di sopra, l'altro di sotto del polo.

E' manifesto che quanto più grande sia la quantità $(D \backsim d)$, tanto più fia sicuro il valore di z.

Niun potrà poi sbagliare nell'applicarlo, poichè dall'esser la differenza data, nell'ascensione retta, maggiore o minore dell'osservata, intenderà ciascun di leggieri, se il piano del cerchio descritto dal cannocchiale passi a ponente o vero a levante del polo. Per esempio, *il piano del cerchio descritto dal cannocchiale passa a occidente del polo, se la stella più vicina al polo precede la più lontana, e se la differenza data d'ascensione retta è maggiore della osservata:* quest'è il caso delle figure 1 e 2. All'incontro *passa ad oriente del polo*, se delle due condizioni ora espresse una sola si muti: e questo sarebbe il caso delle stesse figure, guardate di dietro per trasparenza. Conosciuta la giacitura del piano in cui s'aggira il cannocchiale, sarà tosto patente col favor delle regole stesse, se al transito dell'astro paragonato debba detrarsi od aggiungersi la quantità z: ne darò degli esempj. Che se la stella fosse una sola, osservata di sopra e di sotto al polo, allora la prima delle due condizioni cesserebbe, e sarebbe operativa unicamente la seconda.

Le mie formule sussistono, quand'anche non siavi deviazione al zenit. Di fatti sia questo il punto C della fig. 2: non per ciò va soggetta a cangiamento veruna quantità contenuta in esse formule. Sono dunque, per la loro generalità, degne d'un posto sopra tutt'altre ne' Trattati d'Astronomia.

PRO-

PROBLEMA II.

Dato l' error del passaggio in due punti, determinare la deviazione al zenit, e quella nell' orizzonte.

Sia P il polo (*fig.* 3), Z il zenit, PZH il meridiano, H la sua intersecazione con l' orizzonte, FIL il cerchio descritto dal cannocchiale. Sono dati due errori di transito, quali IPM, LPE. Se nell' arco FIL si piglia un punto F distante 90° dal punto H, e se li due punti si uniscono col quadrante FBH; la deviazione al zenit è misurata dall' angolo H, e quella nell' orizzonte dall' angolo F.

Ora $\text{IPM} = \frac{\text{MI}}{\text{sen.PM}} = \frac{\text{BM} + \text{BI}}{\text{sen.PM}}$; e poichè $\text{BM} = \text{H} \times \text{sen.MH}$, e $\text{BI} = \text{F sen.BF} = \text{F cos.MH}$; quindi $\text{IPM} = \frac{\text{H sen.MH} + \text{F cos.MH}}{\text{sen.PM}}$. Allo stesso modo, $\text{LPE} = \frac{\text{DL} + \text{DE}}{\text{sen.PE}} = \frac{\text{F cos.EH} + \text{H sen.EH}}{\text{sen.PE}}$.

Adunque fatto $\text{F} = x$, $\text{H} = y$, $\text{IPM} = m$, $\text{LPE} = n$, l' altezza maggiore $\text{MH} = A$, la minore $\text{EH} = a$, la declinazion dell' astro più elevato $= D$, la declinazion dell' altro $= d$, abbiamo

$$(\text{B}) \ldots . m = \frac{y \,\text{sen.}A + x \cos.A}{\cos.D},$$

$$(\text{C}) \ldots . n = \frac{y \,\text{sen.}a + x \cos.a}{\cos.d}.$$

Dalle quali equazioni si trae, per soluzion del problema,

$$(\text{D}) \ldots . y = \frac{m \cos.a \cos.D - n \cos.A \cos.d}{\text{sen.}(A - a)}$$

$$(\text{E}) \ldots . x = \frac{n \,\text{sen.}A \cos.d - m \,\text{sen.}a \cos.D}{\text{sen.}(A - a)}$$

Cangiando in queste il segno di m o di n, quando l' osservavazion respettiva sia più tarda del computo, le deviazioni y, x saranno a ponente del meridiano, se riescano negative.

COROLLARIO I.

Se si voglia conoscere l' errore z del transito per qualunque altro punto, dove α sia l' altezza della stella, δ la declinazione; bisogna sempre trovare in prima i valori delle x, y: quindi ci si offre, come nelle formule (B), (C),

$$z = \frac{y \text{ sen.} \alpha + x \cos. \alpha}{\cos. \delta}.$$

COROLLARIO II.

Che se bramate sapere, in qual punto il cerchio descritto dal cannocchiale taglia il meridiano, ponete $z = 0$, e conseguirete

$$\text{tang.} \alpha = - \frac{x}{y}.$$

COROLLARIO III.

Ma se la deviazione al zenit fosse nulla, allora $y = 0$, e per valutare x basta conoscer l' errore del transito in un punto solo; traendosi dalle formule (B), (C)

$$x = \frac{m \cos. D}{\cos. A} = \frac{n \cos. d}{\cos. a}.$$

Di qui piglia Lambre le mosse.

COROLLARIO IV.

Se stando $y = 0$, niun errore assoluto di transito fosse dato, ma solamente la differenza IPL $= m - n$, di due errori (quest' è l' unica ipotesi di Lalande, e di Lambre); in tal caso le formule (B), (C) danno $m - n = \frac{x \cos. A}{\cos. D}$

$$-\frac{x\cos.a}{\cos.d}=x\times\frac{\cos.A\ \cos.d-\cos.a\ \cos.D}{\cos.D\ \cos.d}\ ;\ \text{donde}$$

$$x=\frac{(m-n)\cos.D\ \cos.d}{\cos.A\ \cos.d-\cos.a\ \cos.D}.$$

Quest' è la formula di Bernoulli (pag. 54).

Si converte in quella più semplice di Lalande (2607), nominando λ la latitudine dell' Osservatore, e introducendola in vece delle altezze. Imperocchè A = MH = PH — PM = 90° + PZ — (90° — D) = PZ + D = 90° — λ + D = 90° — (λ — D); laonde $\cos.A = \text{sen.}(\lambda - D) = \text{sen.}\lambda\ \cos.D - \cos.\lambda\ \text{sen.}D$. Similmente $\cos.a = \text{sen.}(\lambda - d) = \text{sen.}\lambda\ \cos.d - \cos.\lambda\ \text{sen.}d$. Sostituendo questi valori nell' equazion Bernulliana, e riducendo, emerge quella di Lalande

$$(\text{F})\ \ldots\ x=\frac{(m-n)\cos.D\ \cos.d}{\cos.\lambda\ \text{sen.}(d-D)},$$

o pur la seguente di Lambre

$$x=\frac{m-n}{\cos.\lambda\ (\text{tang.}d-\text{tang.}D)}.$$

E' da mutare il segno alle declinazioni australi, e per conseguenza alle loro tangenti; non che da far negativo $\text{sen.}(d-D)$, qualunque volta $(d-D)$ sia quantità negativa: e così sempre in progresso.

COROLLARIO V.

Che se con li dati del Corollario IV si voglian determinare le deviazioni assolute; posto in equazione il valore (F) della x con quelli del Corollario III, si cava

$$(\text{G})\ \ldots m=\frac{(m-n)\cos.A\cos.d}{\cos.\lambda\,\text{sen.}(d-D)}=\frac{(m-n)\ \text{sen.}(\lambda-D)\ \cos.d}{\cos.\ \lambda\,\text{sen.}(d-D)};$$

$$(\text{H})\ \ldots n=\frac{(m-n)\cos.a\ \cos.D}{\cos.\lambda\ \text{sen.}(d-D)}=\frac{(m-n)\,\text{sen.}(\lambda-d)\cos.D}{\cos.\lambda\ \text{sen.}(d-D)};$$

alle quali equazioni, comuni al Lalande, giunge anche Bernoulli con molta fatica (pag. 50 a 56).

COROLLARIO VI.

Se il cannocchiale deviasse al zenit e non deviasse all' orizzonte, allora $x = 0$, e l'equazioni (B), (C) somministrano $m = \frac{y \text{ sen.} A}{\text{cos.} D}$, $n = \frac{y \text{ sen.} a}{\text{cos.} d}$; quindi $m - n = y \times \frac{\text{sen.A cos.} d - \text{sen.} a \text{ cos.} D}{\text{cos.} D \text{ cos.} d}$: donde tratto il valore della y ed introdottavi λ come nel Corollario IV, sorge

$$y = \frac{(m-n) \text{ cos.} D \text{ cos.} d}{\text{sen.} \lambda \text{ sen.} (D-d)};$$

la qual formula fa conoscere la deviazione al zenit, data la differenza d'error di due transiti.

Che se si domandi l'errore assoluto in ciascuno di questi, convien surrogare nelle due prime equazioni del presente Corollario il valore or trovato della y, e tosto ne nasce

$$m = \frac{(m-n) \text{ sen.} A \text{ cos.} d}{\text{sen.} \lambda \text{ sen.} (D-d)} = \frac{(m-n) \text{ cos.} (\lambda - D) \text{ cos.} d}{\text{sen.} \lambda \text{ sen.} (D-d)};$$

$$n = \frac{(m-n) \text{ sen.} a \text{ cos.} D}{\text{sen.} \lambda \text{ sen.} (D-d)} = \frac{(m-n) \text{ cos.} (\lambda - d) \text{ cos.} D}{\text{sen.} \lambda \text{ sen.} (D-d)};$$

formule ben più semplici e comode di quelle di Bernoulli pag. 58).

SCOLIO.

L' Autore testè nominato pretende (pag. 62) risolvere il Problema II, *date le differenze dell' errore di tre passaggi*; dati, per esempio, gli angoli FPI, IPL (*fig.* 1); e cade in formule involutissime, che a nulla poi giovar possono, stante che allora il problema è indeterminato. Quante si vogliano differenze d' errore ne' transiti non condurranno mai a scoprire niun errore assoluto, qualor non suppongasi nulla la deviazione al zenit, o pur quella nell' orizzonte. E' cosa chiara, che l' angolo LPR e gli angoli FPI, IPL non hanno alcuna dipendenza reciproca, quando non sia conosciuto il punto d' intersecazione del meridiano PR col cerchio FIL descritto dal cannocchiale .

Poteva il citato Autore accorgersi dell' indeterminazion del problema anche per la strada analitica da lui battuta . Imperocchè , detto p il terzo errore assoluto , oltre m , n, il suo valore sarà della forma (B) , (C) ; vale a dire $p = \frac{y \text{ sen.} \alpha + x \cos . \alpha}{\cos . \delta}$. Adoprando questo , e gli altri valori simili di m, n, fo per brevità $m - n = X$, $n - p = Y$, $m - p = Z$. Li primi membri di quest' equazioni son dati , ma nè da due di esse , nè da tutte tre si potranno mai ricavare i valori delle due quantità ignote x , y ; poichè la terza equazione essendo uguale alla somma delle due altre, da ogni pajo d' equazioni uscirà sempre la terza , e le tre non saran mai che una , cioè $X + Y = Z$.

TEOREMA.

Gli errori de' due passaggi delle stelle circompolari sono come le tangenti delle declinazioni .

Sia HPB il meridiano (*fig.* 4 e 5) , FGE il cerchio descritto dal cannocchiale , C la loro intersecazione in qualsivoglia punto del meridiano , P il polo ; GM , AD il parallelo d' una stella circompolare ; FH , BE il parallelo d' un' altra : GPM ± DPA è l' error dei due transiti della prima ; FPH ± BPE l' error dei due transiti della seconda : spettando il segno + al caso della fig. 4 , il segno — al caso della fig. 5 .

Dico essere FPH ± BPE : GPM ± DPA : : cot.BP : cot.AP .

Di fatti FPH $= \frac{FH}{\text{sen.}PH} = \frac{C \text{ sen.}CH}{\text{sen.}BP}$. Similmente BPE $= \frac{C \text{ sen.}CB}{\text{sen.}BP}$. Dunque (*fig.* 4) , FPH + BPE $= \frac{C}{\text{sen.BP}}$ (sen.CH + sen.CB) . Ma CH = CP + BP, e CB =

$CP - BP$; poi $\text{sen.}(CP + BP) + \text{sen.}(CP - BP) = 2\ \text{sen.}\,CP\ \cos.\,BP$. Per conseguente $FPH + BPE = 2\,C\ \text{sen.}\,CP\ \cot.\,BP$. Nel modo stesso si trova $GPM + DPA = 2\,C\ \text{sen.}\,CP\ \cot.\,AP$. Dunque $FPH + BPE : GPM + DPA :: \cot.\,BP : \cot.\,AP$; come dovea dimostrarsi.

Pel caso, in cui le deviazioni sian da parte contraria del meridiano, come nella fig. 5, col medesimo metodo si rinviene $FPH - BPE : GPM - DPA :: \cot.\,BP : \cot.\,AP$; il che ec.

COROLLARJ.

Questo Teorema, comechè semplice e nuovo, non è d' utilissimi servigi infecondo.

I. Serve a criterio della bontà delle osservazioni circompolari: percioccchè il tempo della semirivoluzione essendo notissimo, le differenze da questo esser debbono proporzionali alle tangenti delle rispettive declinazioni.

II. I due transiti d' una sola stella circompolare bastano per correggere il passaggio unico d' ogni altra stella, circompolare o no. Imperocchè sia $FPH \pm BPE$ (*fig.* 4 e 5) l' errore osservato nella semirivoluzion d' una stella circompolare. L' analogia del teorema paleserà l' error $GPM \pm DPA$ per qualunque altra declinazione. Sottraendo l' uno dall' altro, abbiamo $GPM \pm DPA - (FPH \pm BPE) = GPF + DPE$. Ma questi due angoli sono uguali. E vaglia il vero; $PE = PF$, laonde $PED = PFG$: similmente $PD = PG$, conseguentemente $PDG = PGD$; e quindi $PDE = PGF$. Sono dunque due triangoli, GPF, DPE, che hanno uguali uno all' altro due lati e i due angoli opposti. Sarà uguale anche il terzo angolo (*Trigonom.* 409); salvo l' unico caso a noi quì non appartenente, che ciascun de' due angoli rispettivamente uguali fosse retto. E' dunque dimostrato $GPF = DPE$. Per tanto se piglisi la differenza dall' errore osservato ($FPH \pm BPE$) all' error ($GPM \pm DPA$) valutato mediante il teorema, la metà d' essa differenza sarà l' error DPE, o pur

GPF

CPF, del passaggio d' un astro osservato in E ovvero in F, relativamente al transito d' una stella osservata in D ed in G. A ciò riescono anche le formule del Problema I, facendovi $D = d$.

III. I due transiti d' una stella circompolare, uniti al conoscimento d' una deviazione assoluta in qual che siasi punto, conducono a discoprirla in ogni altro punto. Siano in E ed in F li due passaggi osservati, DPA la deviazione nota; il teorema porge il valore di (GPM ± DPA) : se ne conchiude la deviazion GPM; ed ogni altra, col mezzo del Corollario antecedente, il qual somministra le differenze di deviazione.

SCOLIO.

All' osservazion dei due transiti d' una stella circompolare obbietta il Lambre : 1.° che rare volte si può mandarla ad effetto; 2.° che nell' intervallo di dodici ore potrebbero e pendolo e cannocchiale patir qualche variazione. Rispondo al primo; che giova praticarla più spesso che si può. Al secondo; che ogni altra osservazione, paragonata separatamente a ciascun dei due transiti, non lascierà occulte, col divario de' risultamenti, le irregolarità succedute per avventura negl' istromenti.

ESEMPJ.

La notte dei 7 Novembre 1783 ho preso in Parigi le altezze corrispondenti della 80 del Cigno, ed osservati li due passaggi, così di questa, che di quattro altre stelle circompolari. Detratta la variazion semidiurna del pendolo, gli errori congiunti del doppio transito al filo del cannocchial meridiano uscirono in tempo, come segue.

Stel-

Stelle.	*Declinazione.*	*Errori.*	*Calcolati.*
80 del Cigno	50° 13′	1″, 2	1″, 20
10 di Cefèo	60 8	1, 7	1, 74
5	61 41	1, 5	1, 86
8	69 37	2, 6	2, 69
77 del Dragone	77 14	5, 2	4, 41

Supponendo buone le osservazioni della prima stella, perchè il suo moto più rapido ammette in quelle maggior precisione, e perchè men si sconciano le altre; la proporzione delle tangenti, secondo il teorema, dimanda gli errori scritti nella quarta colonna. Lievi appariscono quindi le mancanze dell' Osservatore; montando insieme ne' due transiti, a 0″, 36 per la 5 di Cefèo; a 0″, 8 per la 77 del Dragone; ed essendo di niun rilievo per le altre due stelle. Ecco, a tenor del Corollario I del Teorema, assicurata la bontà di tre osservazioni, e resa probabile quella delle due men perfette, qualor si correggano i respettivi eccessi, metà nell' uno, metà nell' altro passaggio.

La deviazione assoluta per la 80 del Cigno, manifestata dalle altezze corrispondenti, fu in tempo 1″, 88 a levante. Dunque stata sarà sotto il polo 0″, 68 a ponente; affinchè le due insieme compongano l' errore osservato 1″, 2 relativo al caso della fig. 5. Si può conchiuder le deviazioni assolute in qualunque punto, a tenor del Corollario III del Teorema.

Verbigrazia, la somma degli errori, per la 77 del Dragone, corretta, è 4″, 41. Ora 4″, 41 — 1″, 20 = 3″, 21; la cui metà 1″, 605 sommata con 1″, 88 deviazione orientale, dà 3″, 485 per deviazione assoluta sopra il polo, parimente orientale; e sottratta da 0″, 68 deviazione occidentale, produce — 0″, 925 deviazion negativa, cioè a parte opposta, per conseguenza orientale, sotto il polo.

Sempre si dee sommare di sopra al polo, e sottrar di sotto: purchè si cominci l' operazione col diffalcare la somma delle deviazioni note dalla somma delle ignote. Inoltre alle de-

deviazioni assolute si cangino i segni, volendo correggere i transiti sotto il polo.

Mettiamo alla prova queste regole, indagando le deviazioni al zenit e nell' orizzonte. La declinazione del zenit è 48° 52′, cioè la latitudine della mia Specola Parigina. Abbiamo dal teorema 1″, 14 per somma delle due deviazioni ignote, a quella declinazione. Per tanto 1″, 14 — 1″, 20 = — 0″, 06; la cui metà — 0″, 03 aggiunta a 1″, 88 deviazione orientale produce 1″, 85 deviazione in tempo al zenit, parimente orientale. Lo stesso si trae dalla 77 del Dragone, poichè 1″, 14 — 4″, 41 = — 3″, 27; la cui metà — 1″, 635 sommata con 3″, 485 dà appunto 1″, 85. Questa deviazione in tempo, moltiplicata per 15 volte il seno della distanza dal polo 41° 8′, riesce in secondi di grado 18″, 3.

La declinazione dell' orizzonte è 41° 8′ australe. Dunque, in vigor del teorema, la somma delle due deviazioni è — 0″, 87. Quindi — 0″, 87 — 1″, 20 = — 2″, 07; la cui metà — 1″, 035 aggiunta a 1″, 88 deviazione orientale, porge 0″, 845 per deviazione in tempo nell' orizzonte, del pari orientale. Moltiplicandola per 15 sen. 131° 8′, si trova esser ella 9′, 5 in secondi di grado. Si vedrà comparir tantosto col segno contrario per la plaga settentrionale.

Sperimentiamo questi computi con le formule del problema II. A cagion d' esempio per la 80 del Cigno, $m = 1'', 88$; $n = -\,0'', 68$ deviazione a ponente; $D = d = 50°\ 13'$; e dalla latitudine 48° 52′ derivano a settentrione $A = 88°\ 39'$, $a = 9°\ 5'$; quindi $A - a = 79°\ 34'$. Tosto, secondo la formula (D), la deviazione al zenit $y = \frac{15\ \text{cos.}\ 50°\ 13'}{\text{sen.}\ 79°\ 34'}\ (1'', 88\ \text{cos.}\ 9°\ 5' + 0'', 68\ \text{cos.}\ 88°\ 39') = 18'', 3$ deviazion positiva, per conseguenza orientale, qual s' è rinvenuta sopra: e secondo la formula (E), la deviazione all' orizzonte $x = \frac{15\ \text{cos.}\ 50°\ 13'}{\text{sen.}\ 79°\ 34'}$ $(-\,0'', 68\ \text{sen.}\ 88°\ 39' - 1'', 88\ \text{sen.}\ 9°\ 5') = -\,9'', 5$ deviazione a ponente, ma settentrionale, che in fatti star deve da banda opposta alla meridionale trovata sopra.

Or vò sapere la deviazione per 16° 21′ di declinazione australe, qual era quella del Sole in tal dì. Ho dal teorema — 0″, 293 per somma de' due errori. Per conseguente — 0″, 293 — 1″, 20 = — 1″, 493; la cui metà — 0″, 7465 sommata con 1″, 88 dà 1″, 1335 per deviazione assoluta a levante nel punto proposto. Io aveva già prese in quel giorno le altezze corrispondenti del Sole, ed osservato il suo transito al cannocchial meridiano: donde la deviazione a levante m' era apparita 0″, 7. La differenza 0″, 4 dipenderà da errori d' osservazione, che tutti attribuisco a quelle del Sole; sempre inferiori di sicurezza e di precisione, per mia sperienza ed avviso, a quelle di stelle non troppo piccole.

Rimane da cimentare la formula del problema I, e le regole susseguenti. La differenza 1″, 605 tra le deviazioni della 77 del Dragone, e della 80 del Cigno, costituisce l' error conosciuto nella differenza de' loro transiti. Mi propongo scoprire l' error del passaggio del Sole per rispetto alla prima delle mentovate stelle. E' dunque $e = 1'', 605$; $D = 77° 14'$; $d = 50° 13'$; $\delta = 16° 21'$ australe; quindi $D \backsim \delta = 93° 35'$, e $D \backsim d = 27° 1'$. E però $z = \frac{1'', 605 \cos. 50° 13' \operatorname{sen}. 93° 35'}{\cos. 16° 21' \operatorname{sen}. 27° 1'}$ $= 2'', 352$. Per sapere, se questa quantità debba aggiungersi o togliersi al transito del Sole, onde avere la giusta distanza fra esso e la 77 del Dragone, osservo: che questa precede la più lontana dal polo, la 80 del Cigno, e che la differenza delle loro ascensioni rette è minore della osservata; donde conchiudo, giusta le regole date, che il piano descritto dal cannocchiale passa ad oriente del polo. Da questa condizione, e dall' altra, che la 77 del Dragone seguita il Sole, s'inferisce, con le regole stesse, che la differenza de' loro transiti vuol esser minore del giusto, e che per conseguenza il valor di z si dee togliere al primo transito, cioè del Sole, affinchè la differenza de' passaggi s' allunghi d' altrettanto. E

che

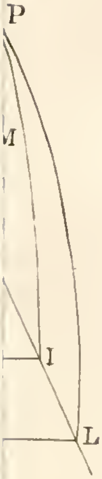


Fig. 3.

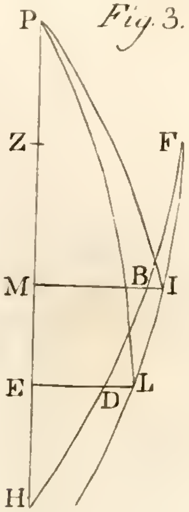
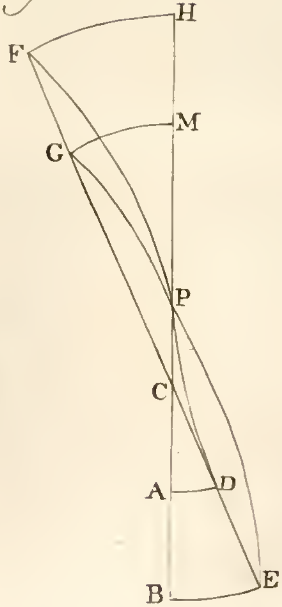

P
Z
F
M
B
I
E
L
D
H

Fig. 5.


H
F
M
G
P
C
A
D
E
B

G. Gajani sc.

Fig. 1.

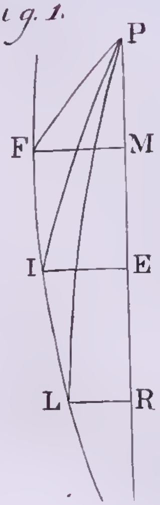


Fig. 2.

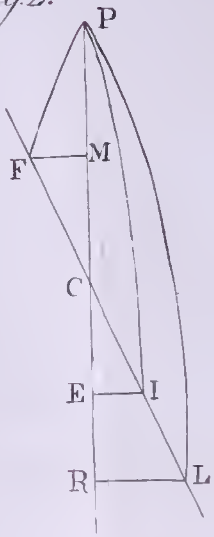


Fig. 3.

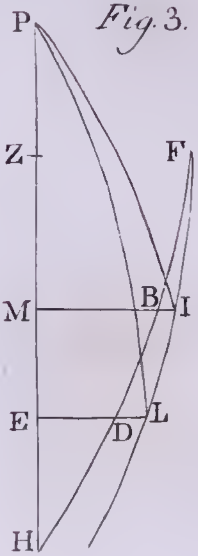

P
Z
F
M
B
I
E
D
L
H

Fig. 4.

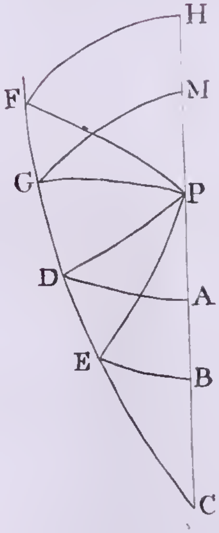
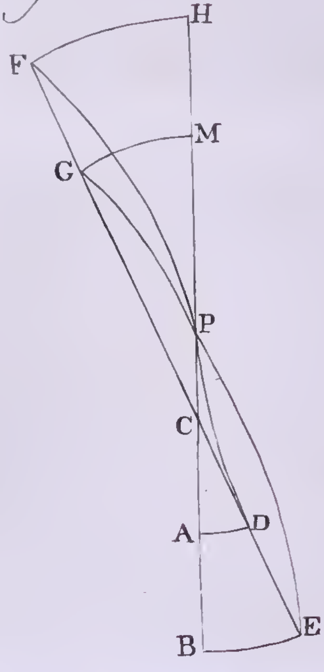

H
F
M
G
P
D
A
E
B
C

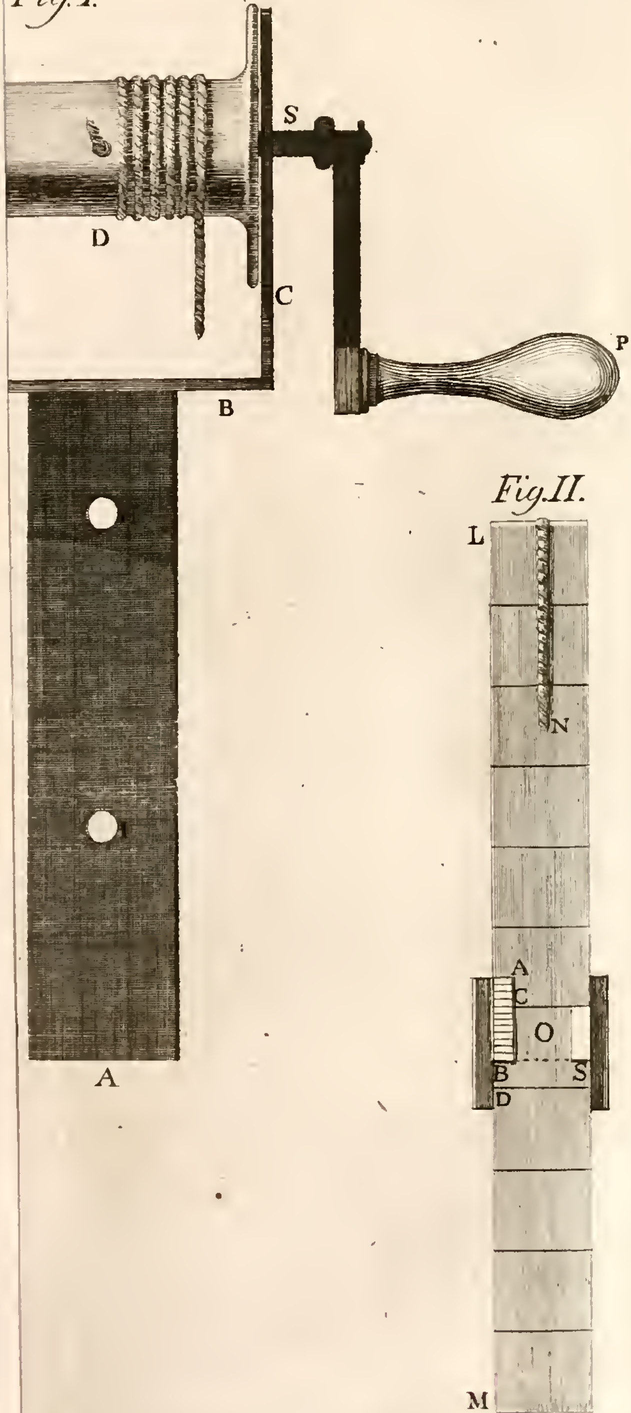
Fig. 5.


H
F
M
G
P
C
A
D
B
E

G. Gajani sc.

Fig. I.

Fig. II.


S
D
C
P
B
A
L
N
A
C
O
B
S
D
M

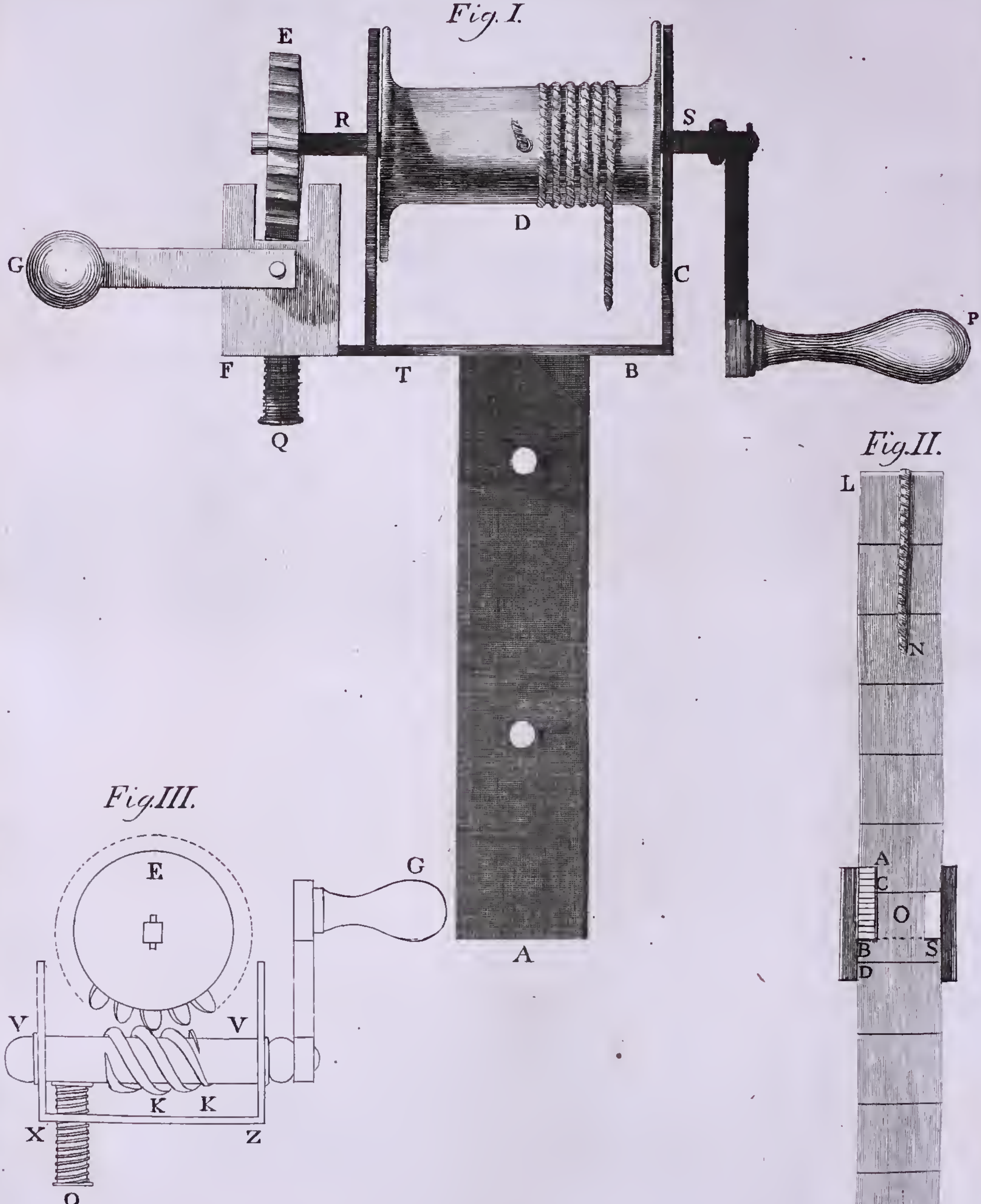


Fig. I.
E
R
S
D
G
C
P
F
T
B
Q
A
Fig. II.
L
N
A
C
O
B
S
D
M
Fig. III.
E
G
V
V
K
K
X
Z
Q

Gajani sc.

che ciò sia ben fatto, basta considerare, che la deviazione della 77 essendo a levante, siccome in I della fig. 3 nella quale sopprimasi colla mente la lettera Z; se il transito del Sole è avvenuto in L, cioè più tardi del dovere relativamente al meridiano PI della stella, bisognerà diffalcare IPL $= z$ dalla deviazione MPI della 77, per ottenere la deviazione EPL del Sole. Per tanto, sottratto 2″, 352 da 3″, 485; il residuo 1″, 133 è appunto la deviazione del Sole, qual ci è già nota per altra via. Dalle tre deviazioni, della 77 del Dragone, della 80 del Cigno, e del Sole, si possono ricavare cinque altre maniere per dar la prova alla formula ed alle regole del problema I.

MEMORIA SOPRA UNA MACCHINA PER FACILITARE IL MOVIMENTO DELLO SCOPO DELLE ASTE NELLE LIVELLAZIONI

DI ANTONIO LOMBARDI

Presentata alla Società Italiana da Pompilio Pozzetti
delle Scuole Pie Segretario della medesima.

Ricevuta il dì 4. Giugno 1801.

Una delle operazioni più difficili da eseguirsi dagli Ingegneri è certamente quella della Livellazione nei tratti molto lunghi, nei quali conviene replicare le stazioni. La squisitezza però degli Istromenti che ci fornisce l'Inghilterra, e che lavoransi al presente anche in Italia, scema in gran parte le difficoltà che si incontrano in questa operazione, e la speditezza con cui maneggiansi i Livelli a bolla d'aria unita alla loro esattezza nel tracciare la linea di Livello, è una invenzione degna, a dir vero, di quel secolo in cui le arti e le scienze fisiche in modo particolare ànno fatti così rapidi e maravigliosi progressi. Sembrava perciò che con Istromenti così esatti potessero gli Ingegneri livellare con tutta precisione i terreni senza commettere errori almeno sensibili; ma avendo io dovuto diverse volte assistere, o intraprendere una tale operazione, ò veduto che potevansi commettere notabili errori, non già a motivo del Livello, ma bensì dello scopo che si fa erigere nei diversi punti delle stazioni.

Ognuno sa che per muovere lo scopo delle aste usasi ordinariamente fra noi di affiggere dietro di lui una molla, la quale introdotto che sia lo scopo nell'asta, preme contro di lei, e tien fermo lo scopo in qualunque luogo si vuole permettendo di poterlo muovere lungo l'asta; ma come facilmente si rileva, molti sono gli inconvenienti ai quali va soggetgetto questo meccanismo di movimento, fra i quali uno dei maggiori si è quello della disuguaglianza del moto dello scopo, e la difficoltà di poterlo muovere lentissimamente, allorchè egli arriva ad essere prossimamente tagliato in mezzo dal filo orizzontale del Micrometro. Per evitare li suddetti inconvenienti io vi ò sostituito la seguente macchinetta che passo a descrivere. Questa consiste (fig. I) in un telajo di ferro ABC, ne' cui due lati perpendicolari è inserito il Cilindro di legno D che à un piccolo foro nel mezzo, ed è mobile intorno all'asse di ferro RS, il quale dalla parte sinistra R prolungasi alquanto per ricevere la ruota dentata E. Il lato orizzontale inferiore BT del suddetto telajo prolungasi poi dalla medesima parte, e si unisce all' altra lastra orizzontale F posta trasversalmente ad angolo retto con la prima BT. La figura III. rappresenta la lastra F veduta di fronte, la quale ripiegata nelle sue estremità X, Z sostiene un Cilindro di ferro VV, su cui avvolgonsi le spire KK di una vite semplice od anche doppia, il che sarà meglio per la speditezza della operazione. Questa vite ingrana i denti della ruota E, e si fa girare per mezzo del Manubrio G posto all' estremità del Cilindro, come vedesi nella suddetta figura III. Nella lastra A sonovi due fori H, I, che servono per introdurvi due viti onde unire la macchina all'asta LM (fig. II). Questa deve esser fornita nella sua estremità L di una piccola Carruccola per cui passi il sottile cordone N, che sostenga lo scopo O con uno de' suoi capi dalla parte che esso presentasi all' Osservatore, mentre l' altro capo si introduce nel foro del Subbio D (fig. I), onde abbassare od alzare lo scopo. Dietro di questo sono fermati due riporti di legno B, S, che servono ad abbracciare l' asta, e sono distanti fra loro in modo, che lasciano passare liberamente lo scopo nel luogo dell' asta dove è fissa la macchinetta, la quale perciò resta alquanto distante dall' asta. L'asse del Cilindro D (fig. I) intorno a cui avvolgesi la cordicella che sostiene lo scopo, è prolungato ancora dalla parte destra in S in modo da ricevere un altro

Manubrio P. Il Cilindretto poi intorno a cui (fig. III) avvolgesi la vite KK, è sostenuto da un'altra vite Q che passa per la lastra XZ; abbassandosi questa vite Q si disimpegnano i denti della ruota E dalla Coclea KK, ed alzandosi si ingranano di nuovo li denti suddetti con le spire della vite.

Dall' ispezione della macchina si rileva facilmente come essa debba adoperarsi. Si unisca questa all' asta per mezzo di due viti che si introducono nei fori H, I, le teste di cui per non impedire il moto dello scopo, si possano incastrare nell' asta, la quale deve avere la sua Carruccola con il cordone preparato come abbiamo detto. Quando si vorrà alzare lo scopo, basterà girare il Manubrio G a destra, ed al contrario allorachè si vorrà abbassare. Ciò si potrà sempre fare, perchè tale è la proprietà della Coclea d' Archimede che le è bensì comune con li Rocchetti, ma che à l' altra tutta sua propria, che lo scopo cioè non iscorra abbasso allorchè si cessa di girare il Manubrio, nel che consiste tutto l' artifizio della macchina.

Succede però sovente, quando il terreno che si livella è molto inclinato, di dovere alzare, o abbassare lo scopo per due o tre braccia ancora, al che fare si richiederebbe molto tempo se ciò si dovesse eseguire per mezzo del solo Manubrio G. Per rimediare a questo incomodo da me non preveduto da prima, ma poi sperimentato più volte in pratica, ò aggiunta la vite Q, ed il secondo Manubrio P sopra-descritto. Quando dunque si debba muovere rapidamente la biffa, si prenda con la destra il Manubrio P, e con la sinistra si abbassi la vite Q finchè i denti della ruota siano disimpegnati dalle spire, allora si giri il Manubrio P mettendo lo scopo a quel punto incirca che si crede opportuno, e si alzi di nuovo la vite Q, e per conseguenza anche il Cilindretto VV che ritorna ad ingranare i denti della ruota, così si impedirà allo scopo di scorrere abbasso. Ciò fatto si presenti lo scopo all' Osservatore, perchè indichi il segno preciso a cui poscia si deve condurre col mezzo dell' altro Manubrio G: per non perder tempo nella operazione si fa eseguire il movimento rapido dello scopo , mentre che l' Ingegnere , o l' asta cambia luogo .

Per ottenere l' esattezza possibile nella difficile operazione del livellare, non mi sono limitato a correggere li difetti che incontransi ordinariamente nel movimento dello scopo , ma ò fatta qualche mutazione all' asta ed allo scopo insieme.

Ordinariamente si usa di dividere l' asta in tante braccia ed once , e le once in punti 12 ; ma spesso succede che le divisioni dei punti fatte sulle aste sono inesattissime, il che può produrre una grande alterazione nelle misure : io spero di avere con un mezzo semplicissimo rimediato a questo non piccolo inconveniente . Divisa che sia l' asta in braccia ed once esattamente , si applichi ad uno dei riporti B dello scopo (fig. II) una piccola scala di legno duro AB lunga un' oncia divisa in punti dodici , la parte inferiore della quale rada esattamente la linea BS marcata dietro lo scopo , la quale serve per indicare l' altezza della linea di livello . Con questa piccola scala si misureranno le parti aliquote di qualunque oncia dell' asta. Sia a cagion di es. lo scopo nella posizione che indica la figura; egli è chiaro che al numero delle braccia e delle once debbo aggiungere l' altezza BD . Per sapere quanti punti è questa linea BD , io rifletto che tutta la AB è uguale ad un' oncia , e perciò uguale a CD che si suppone indicare la lunghezza di un' oncia ; levando perciò la porzion comune BC, rimarrà la linea AC = BD. Ricavo da ciò la regola seguente; segno le braccia e le once che mi indica il punto D , poi conto i punti cominciando da A fino in C, ed aggiungendo questi punti all' altezza MD ritrovata , determino l' altezza precisa dello scopo . Chi desiderasse una maggior esattezza , potrebbe suddividere ogni punto dell' oncia AB in due parti .

Mi lusingo di avere tolti con questa macchina tutti gli inconvenienti che ò descritti . Imperocchè con questo meccanisnismo si rende equabile il moto dello scopo, e si accelera e rallenta quanto si vuole senza pericolo che esso cambi di posizione, il che è l' oggetto principale. Diffatti quando l' Osservatore avvisa che lo scopo è vicino a tagliare il filo del Micrometro, allora basta muovere lentamente il Manubrio G, e lo scopo si muoverà lentissimamente, giacchè vi vorranno sei o sette girate del Manubrio, affinchè la ruota E, e perciò anche il Subbio D ne faccia una sola. Finalmente io non tralascierò di far osservare che con questa macchinetta si può adoprare un'asta di qualunque lunghezza, giacchè basterà allungare il cordone che si avvolge intorno al Cilindro D; laddove usando della molla affissa dietro lo scopo, non si può adoprare che un'asta lunga poco più di quattro braccia, essendo questa l' altezza a cui può ordinariamente alzare un uomo la mano.

DE' MOSTRI UMANI DE' CARATTERI FONDAMENTALI SU CUI SE NE POTREBBE STABILIRE LA CLASSIFICAZIONE E DELLE INDICAZIONI CHE PRESENTANO NEL PARTO

LEZIONI ACCADEMICHE

DI VINCENZO MALACARNE

Ricevute il dì 5. Giugno 1801.

INTRODUZIONE.

Che fino ad ora siano stati poco felici gli sforzi de' Naturalisti più celebri, e de' maestri più esperti e ingegnosi delle cose ostetricie, nel dedurre dalle osservazioni loro diligenti, e ripetute, la spiegazion della generazione de' *Mostri*, non è punto da stupire, posto che nella ricerca più assidua e sollecita della origine degli animali, che dalla comune degli uomini si dicono perfetti, sudarono fino ad ora inutilmente ancor essi Fisiologisti provveduti di quanto la notomia può mai somministrare di più esatto, forniti di genio, e di talenti opportunissimi per ben riescire in qualunque laboriosa impresa, padroni di sterminate raccolte d'animali, e de' necessari più delicati instrumenti. Maggior maraviglia bensì sembra, che debba recare l'ignoranza, in cui siamo tuttavia non tanto delle classi, a cui que' *Mostri*, che sono stati veduti, e descritti, si avrebbono da ridurre, quantunque oggetto di qualche importanza per abbreviar le operazioni, e alleggerir le fatiche di coloro, che corrono alla stessa meta; quanto delle indicazioni, che i *Mostri* differenti debbono presentare nel parto: e sopra tutto la crudeltà de' partiti a' quali suole pur tuttavia appigliarsi il vulgo degli ostetricanti relativamente a' parti mostruosi. Ho meditato seriamente questi quattro punti, e mi è paruto di poter concepire qualche speranza d' esito vantaggioso se non per chi tentasse audacemente il primo d' aprir questa carriera, almeno per chi generosamente vi si spingesse oltre, già trovandola aperta, e vi portasse que' lumi, quella vista penetrante, e quella lena, ch' io non ò sortito dalla natura, nè acquistato con l' arte. Presento quì il risultato de' miei tentativi: piaccia al cielo che questo inviti altrui ad imitare con ventura migliore il mio coraggio.

LEZIONE PRIMA

Origine de' Mostri.

È conosciuto appieno, ed universalmente ammirato il valor sommo nell' osservare, per cui s' acquistarono tanta rinomanza un Allero, un Arveo, un Artmanno, un Artsechero, un Bacchio, un Bianchi, un Brendelio, un Buffone, e il Ceseldenio, il Cigna, il Duvernei, Garmanno, Graafio, Jennio, Kerchringio, La Motte, Leeuvenohecchio, Malpighi, Lemerì, Littre, Levretto, Maupertuisio, Muralto, Redi, Ruischio, Sbaraglia, Vallisnieri, Vercelloni, e Winslovio. Sono e saranno eternamente in gran pregio le scoperte sul nostro argomento fatte da' celebri maestri miei Ambrogio Bertrandi Chirurgo Torinese, Carlo Bonneto Ginevrino, e Lazzaro Spallanzani Modenese. Si sa che non ànno lasciato via, nè sentier intentato per arrivar alla cognizione de' mezzi da natura impiegati nella propagazion delle specie diverse degli animali: eppure, con tutte le industriosamente variate, le ingegnose, le eroiche fatiche loro, ardiremo noi dire, che ànno troncato il nodo, e svelato l' arcano? Abbiamo, è vero, negli esperimenti, e nelle opere d' alcuni moderni naturalisti, e forse più sensibile e brillante in quelle de' prelodati Malpighi, Redi, Vallisnieri, Bertrandi, Bonneto, e Spallanzani, qualche raggio di luce da farsene conto, particolarmente intorno a' volatili, agl' insetti, agli animali di sangue freddo:

ma ohimè! Quanto siam tuttavia lontani da quella evidenza, che deriva da numero sufficiente di dati, e di cose certe; da numero di cognizioni incontrastabili per cui ci possiamo gloriar d' avere sotto gli occhi spiegato e sciolto il problema della generazion degli animali, e degli altri corpi organizzati?

In mezzo a tanta dovizia d' osservazioni fatte da persone invecchiate nell' arte d' interrogar la natura, di spiarne per ogni verso le maniere più arcane d' operare, di scoprirne i fenomeni più reconditi, confessar dobbiamo, che questo mistero non ci è ancora svelato, e contentarci della soave lusinga, che perseverando i Naturalisti viventi con fervor uguale a quello, che v' impiegarono con tanta lode i trapassati, nella ricerca, e nello sviluppamento di quanto ce lo nasconde, si squarcierà pur una volta quel velo, che per la corta nostra vista ci sembra impenetrabile; e con tutto il suo splendore la maravigliosa operazione ci sarà di spettacolo instruttivo, e consolante; e all' ottimo esito de' felici tentativi di quell' osservator infaticabile, e fortunato, con vera compiacenza applaudiremo.

I. Intanto per ciò, che spetta all' origine degli animali tenuti in conto di più perfetti dall' orgoglio nostro perchè si rassomigliano di più a noi nella disposizion delle parti ond' è costrutto il corpo loro, siaci permesso di supporre, che la materia del Feto nell' ovaja s' appartiene più direttamente alla Madre: e non si nieghi che in quell' organo è contenuto il *rudimento* principale, imperfetto ed inerte, se piace così, ma pure *rudimento*; il quale stante, dee nell' *atto della fecondazione* ricevere quel moto, quell' anima, in somma quella vita attiva, di cui senza quell' atto non avrebbe gioito giammai; nè d' altro avrebbe goduto fuorchè della vita comune con quella delle altre parti materne, per conseguenza incapace di produrre in quel *rudimento* lo sviluppo graduato, regolare, stupendo, che d' un nonnulla fa con recondito magistero un *embrione*, successivamente d' un *embrione* quasi informe, tronco, mozzo, un vezzoso vaghissimo *bambolino*.

II. Tal *Rudimento* da' latini stato detto con apposito vocabolo *Genitura* è però d'indole così fatta, che se nell' *atto* voluttuoso *della Fecondazione* già ricordato non riceve altra materia dal maschio, o dalla virtù prolifica mascolina, gli si aggiunge senza dubbio per lo meno una proprietà analoga alla forza riproduttrice della madre. Proprietà, e aggiunta, cui mediante, prende forma *l' embrione* già in atto di passar alla condizione di *Feto*, e di bambino per *uomo* divenire, e propagator novello della propria specie.

III. Ma che cosa dobbiam noi pensare di questo *rudimento* in ordine alla sua produzione? Provien egli dall' apparizione, e dal successivo accrescimento il principio della generazione insensibile, perchè tale principio fin dall'istante della creazione fatta là negli orti di Eden, delineato nel germe, passa per diversi gradi di grandezza, per varie serie di svolgimenti prima che si renda sensibile, evidente, manifesto?

Per verità la mia immaginazione in abisso così profondo si smarrisce. Si appaga bensì con molto maggior compiacenza il mio intelletto della opinion di coloro, che delle *Geniture*, de' *Rudimenti* opportuni alla propagazion della specie suppongono fornirsi il corpo d' ogni donna, d' ogni femmina a misura che gli altri organi dell' individuo si van provvedendo della necessaria estensione, figura, ed attività. In tal guisa da' palmiti della vite adulta mentre che nella gemma si preparano le foglie e i pampani, son preparati a prorompere i grappoli, che prima si veston di balsamici fioretti, dal polviglio degli anteri de' quali fecondato il germe si va di tenerissima sucosa polpa vestendo, alla quale serve di custodia buccia or pallida, or dorata, or pavonazza, or nera, che farà le delizie de' nostri palati, il ristoro delle nostre forze quando ne sarà il multiplice germe a maturità pervenuto.

IV. Nè cessa d' esser parte il *germe* del corpo femminile infin a tanto che per via della *Fecondazione* si producano e nella ovaja, e nel *Rudimento* stesso quelle mutazioni, o alterazioni, per cui e quella se ne sgrava quando ciò è possibile, e il *Rudimento* fecondato per la Tromba Faloppiana dall' ovaja si fa strada verso la cavità dell' utero, sia per lo movimento, che gli è stato impresso, sia per lo peso maggior acquistato, sia per la lubricità, sia per lo sbarbicamento suo dalle radici, nascente dal moto e dal maggior volume acquistati.

V. Non contradice a questa verità l' uscita delle uova non fecondate dal corpo delle femmine ovipare, nelle quali è legge di natura, che riesca precoce (senza che sia indispensabile il concorso della *Fecondazione*) lo sviluppo, e l'accrescimento delle uova stesse; è conseguentemente necessaria la discesa di queste fuori del corpo, atteso l' aumento del peso, lo sbarbicamento derivatone, e la lubricità loro naturale.

VI. In tal guisa l' uomo, e qualunque altro animal novello, viene per così dire prodotto dal concorso armonico delle sostanze prima femminina, e poi maschile, e dal moto impresso nel *Rudimento* dalla sostanza del maschio spermatica, pervenuta all' ovaja della femmina per le vie dalla natura preparate: ciò è a dire, che risulta dall' utile, simultanea, contemporanea azione degli organi alla grand' opera della generazione in amendue i sessi destinati.

VII. Queste sostanze nel moto e nelle azioni loro ubbidiscono alle sovrane Leggi dal Creatore stabilite affinchè in tali organi si plasmi l' uomo in circostanze determinate: Leggi che però non le costringono a plasmarlo nè sempre nell' istesso luogo, nè sempre nella medesima situazione; nè con figura, struttura, volume, nè con numero e disposizion di parti sempre uguali.

VIII. Variano talvolta le circostanze relative soltanto agli organi materni; altre fiate variano quelle, che risguardano la *Genitura*, il *Rudimento* apprestato dalla madre, e talor eziandio lo sperma del padre; e da simili varietà derivano le *gravidanze* ora *tubali*, or *ovajali*, ora *ventrali*; per le medesime leggi invariabili, date queste altre circostanze derivan pure la *multiplicità*, e le *mostruosità de' Feti*.

Per la qual cosa mentre che dobbiamo francamente asserire, che le sostanze genitali, e spermatiche, messe in movimento da leggi invariabili e costanti, possono dar luogo a questa maravigliosa produzione, non proviamo ribrezzo a confessar ingenuamente la nostra ignoranza intorno a tali leggi, a tali prodigiosi movimenti, non fidandoci di veruna ipotesi, nemmen di quella tanto speciosa degli *sviluppamenti*; e ci contentiamo d'ammirare gli effetti della forza operativa della Generazione senza pretender di capirne la meccanica, e di comprender nulla di quanto concerne l'indole, e la maniera con cui tal forza suol operare.

IX. Espressa in brevi termini la nostra docile opinione intorno alla *Generazione degli animali* in generale, ci sembra d' aver indicato ciò, che pensiamo di quella de' *Mostri* di qualunque forma, specie, e figura. Vale a dire. Le stesse leggi, che militano per la *Generazione*, e il *perfezionamento degli animali* secondo l' ordine più comune e consueto, militan per la *produzione de' Mostri*, cioè d' *animali differenti dall' ordinario in quanto alla figura, al numero, e alla disposizion d' alcuna delle parti loro*. Di fatti chiunque à osservato con qualche curiosità, come abbiamo potuto far noi, varj de' *Mostri*, che tratto tratto vengono alla luce, e ne à fatto come noi il paragone, non può non essersi avveduto, che sono per lo più similissimi nelle deformità, che gli costituiscono *Mostri della medesima classe*, gli *Acrani*, gli *Aëncefali*, gli *Acefali*, gli *Abrachi*, gli *Atoraci*, gli *Amiocelij*, gli *Asceli*, gli *Apodi*, i *Monoculi*, i *Monobrachi*, i *Monosceli*, gli *Amicteri*, in somma tutti i *Mostri* umani così detti *per difetto*: cioè le mancanze loro sono quasi sempre, e quasi tutte a un modo, e al più così poco differenti nel totale, che visto un *Acranio*, un *Monoculo*, un *Amictero*, un *Monobrachio*, un *Monoscelo*, un *Amiocelio*, si può giudicare che similissimi comparirebbono nove di dieci altri *Mostri*

stri della medesima categoria, se dieci se ne parassero dinanzi agli occhi nostri, come possiamo assicurare d'aver trovato in tutte le varietà de' *Mostri* fin ora da noi rammentate, delle quali abbiam potuto esaminare minutamente più d' un esemplare, se non farne di tutti scrupolosa notomia.

X. Date poi circostanze opposte a quelle che favoriscono la produzione de' *Mostri per difetto*, le stesse leggi sulla *Genitura eccedente in quantità*, su i *rudimenti che sovrabbondano*, e sul moto loro promosso dallo sperma del maschio, opereranno affatto consimilmente: Sicchè se ne avrà l' effetto indubitabile della produzione de' *Mostri per eccesso*, i quali verranno a formare le specie de' *Dicefali*, de' *Dicrani*, de' *Ditoraci*, de' *Disomi*, de' *Tetroti*, de' *Tetrasceli*, de' *Tribrachij*, degli *Exadattili* e simili, quando il medesimo corpo avrà due capi, due crani, due toraci, quattr' orecchi, quattro gambe, tre braccia, sei dita.

LEZIONE SECONDA

Delle Classi a cui si potrebbono ridurre i Mostri de' quali è stato conservato notizia fino a' dì nostri.

I. Debbo con qualche mio rossor confessare il torto, che ò fatto per tempo assai lungo a Plinio, a Licostene, al Pareo, al Lemnio, al Liceto, al Lancelotto, e a quanti altri ànno scritto de' *Mostri*, senza eccettuarne lo Schenchio, i Bartolini, e lo stesso Bianchi di Torino, giudicandoli teste deboli, credenzoni, impostori; e per far loro pur qualche grazia mi venìa immaginando, che nelle descrizioni, nelle figure loro si fossero trascritti, copiati buonamente l' un l' altro per mero desiderio di far inarcar le ciglia al vulgo de' contemporanei loro, e di trasmettere qualche cosa di sorprendente, di stupendo alla posterità. In progresso di tempo però mi sono con gli occhi propri disingannato, ed ò contemplato a mio bell'agio bensì, e con ammirazione, ma con profitto e mio e d'altrui, non pochi de' *Mostri* de' quali abbiamo l' immagine o incisa, o scritta nelle opere de' mentovati Autori, e ne ò potuto distender io stesso con l' esemplar tra le mani le rassomiglianze, e le differenze caratteristiche esistenti in que' corpi, ragguagliandole con quanto n' era già stato da' padri nostri e da' più antichi raccoglitori pubblicato.

II. Quindi ò imparato a non giudicar contraria a' progressi della Fisiologia intorno alla cognizion de' *Mostri*, nè punto ridicola quella division, che ne ànno trasmesso gli antichi in varie classi, nella I. delle quali comprendevano tutte le *Nazioni Mostruose* per difetto, qual' era quella degli *Arimaspi* appresso di Plinio, celebri perchè portavano un sol occhio in mezzo della fronte, de' quali nacquero tre in Piemonte nello spazio di due mesi dello stess' anno, ed uno nel territorio Pavese contemporaneo de' precedenti, collocato da noi nel Museo dell' Università di Pavia, simile affatto a quelli de' quali ci à conservato la figura Gerardo Blasio nella sua bella edizione del *Trattato de' Mostri* di Fortunio Liceto, similissimo poi nel campanello di pura cute in luogo del naso, e nella doppia pupilla dell' unic' occhio a quello de' tre da prima mentovati, che mi fu mandato col disegno in pittura al naturale dal Marchese San Giorgio di Brassicarda, Gentiluomo dotto e cortese di Casale di Monferrato. Io ne ò fatto la dissecazione, e su questa la descrizione; indi ne ò spedito le ossa della testa, e l' immagine di tutto il corpo, con l' esposizione latina, alla R. Imp. Accademia Giosefina Medico-Chirurgica di Vienna, a cui avea l' onore d'esser ascritto fin dalla sua primiera fondazione. Segue la Nazion degli Acefali, che privi di capo, e di collo, aveano gli occhi negli omeri. La terza comprendeva i Blemmii, *Acefali* anch' essi, ma con gli occhi al petto. Seguono i Tibij, nazione di Ponto, di cui ognuno degli occhi avea due pupille. La IV. gli Antropofagi Sciti, che non ostante la strana direzion delle piante, di cui le dita erano pel verso pel quale le abbiamo noi le calcagna, aveano velocità maravigliosa nel corso. La V. gli Sciopodi stupendamente agili a' salti benchè non avessero che una gamba sola; difetto con cui ò veduto ancor io un esemplare esposto per danaro alla contemplazion de' curiosi. La VI. appartenea agli Astomi (*), cioè senza bocca, viventi del solo inspirare per le narici gli effluvii de' corpi odorosi. S' ignora se avessero o no le intestina, e la loro inferior apertura, di cui mancando parecchi individui della specie umana, non mancan però di bocca. Egli è certo però, ch' io conservo un cagnolino, comprato morto a Voghera del 1790, che à quattr' orecchie, e quattro picciole narici, otto palpebre, e nissun globo degli occhi; nissuna bocca, eppur à pienissimo il ventre, e manifesto l' orificio dell' ano. La VII. Nazione era riserbata ai Nomadi, privi di naso, non già de' fori; che dal di là della volta del palato rendeano comunicanti colle narici interne le fauci.

III. Alcuni individui costrutti nelle foggie accennate, e portati in giro da' ciurmadori, veduti in Roma da Plinio, e dal Popolo, non meno che altrove, come frequentemente avviene anche a' nostri giorni, chi non capisce, che ànno dato origine all' opinion vulgare dell' esistenza di Nazioni intiere d' uomini in quelle diverse mostruose guise costrutti? Ma perciò, che i men filosofi dedussero da qualch' esemplare darsene popolazioni intiere (il che forse non è stato di veruna giammai), ne dedurremo noi ancor meno filosoficamente, che son tutte favole, tutte chimere le relazioni e le imagini di *Mostri* di tali maniere, che ne' libri d' ingenui scrittori troviamo?

IV. La seconda Classe degli Antichi abbraccia i *Mostri*, i corpi de' quali sono stranamente più grossi dell' ordinario, o lo sono almeno in qualche membro. Comprende pure i contrapposti, cioè i molto più piccioli, e minuti, sia nel tut-

---

(*) Si dissero anche Astonomi.

to sia in qualche parte, del consueto. Tali sarebbono i *Pumilioni*, e i *Giganti*, e i *Pigmei*, e i *Macrocefali*, e i *Microsceli* de' quali non mancano anche al tempo nostro quà e là gli esemplari.

V. Nella Terza Classe aveano luogo i mancanti di qualche membro, e i provvisti di qualche organo, o membro di più dell' ordinario. Classe, che si potrebbe aver diviso comodamente in due ordini, e comprendere:

VI. Nel prim' ordine i *Moltimembri*, che grecamente sarebbero stati detti *Polimeloti*, cioè forniti di più capi, di più occhi, orecchi, o mani, o piedi, o vagine, del consueto. Vi sarebbon entrati per conseguenza i tanto disputati e celebri *Androgini*, o *Ermafroditi*, i *Dicauli*, le *Dimetre*, e simili.

VII. Nell' ordine secondo si sarebbe collocato quegli animali, che mancano di qualche membro, di qualche organo, tra i quali noi medesimi parecchi ne abbiamo esaminato fin dalla nascita mancanti d' un occhio intiero; d' amendue i globi sebben fossero a suo luogo, e naturalmente separate le quattro palpebre; com' è manifesto in quella bambina Pavese, di cui ò lasciato la testa preparata nel Museo di quella Università; del naso, com' erano i due *Monoculi;* della bocca, com' è il cagnolino appresso di me; quale delle ossa del cranio; quale del cervello; e quale di tutto ciò ch' è sopra alla volta delle orbite, alle orecchie, e al corpo, di porzion notabile delle vertebre tanto cervicali quanto dorsali: esemplare veramente strano d' una bambina nata nelle mie mani in Pavia l' anno 1791, che conservo tra le poche mie preparazioni patologiche: dove custodisco altresì gelosamente un esemplare assai raro, di cui quì piacemi che rimanga special memoria.

VIII. E' un Feto maturo, che, oltre alla totale mancanza de' musculi retti, e di tutte le porzioni anteriori degli altri musculi dell' abdomine, pel qual difetto aveva un ernia congenita orribile a vedersi del fegato, e delle intestina, mancava di tutti i due pezzi inferiori dello sterno, e dal canto destro del torace di tutta la porzion anteriore, e delle cartilagini delle coste spurie, e vere, eccettuate le due prime superiori. A sinistra avea quattro coste superiori, ma prive di cartilagine, e il corpo delle seguenti andava mancando fino all' ultima, di cui v' è appena un picciol tubercoletto affisso alla colonna vertebrale stravolta, e flessuosa a guisa di serpente. Mancava la pleura sul lobo destro del pulmone, ch' era a nudo in antro angustissimo, e rannicchiato, lasciava apparente il cuore avvolto nel sottilissimo trasparente sacco del pericardio. Questo, e una continuazion della pleura spessa e opaca nascondevano il pulmon sinistro.

Il fegato è vizioso in più luoghi: la milza è doppia, e delle due una è quasi globosa, l' altra bislunga, ovale, e collocata col maggior diametro verticalmente: il timo in due lobi grossissimo. Le intestina lunghissime, sottilissime, vote fuorchè d' un meconio tenace aderente come glutine alle pareti loro: voto il ventricolo e pallido: il mesenterio bianco e robusto. La vescica dell' orina grande, di tuniche dense biancastre; i testicoli nell' abdomine alti assai; il pene grosso perchè edematoso al prepuzio mostruosamente fesso per tutta l' altezza, che avrebbe dovuto esserne occupata dal freno. Il corpo è mostruosamente inclinato a destra di maniera, che quì lo spazio tra l' omoplata e l' osso ilio è appena un quarto di quel che v' à tra l' ilio a l' omoplata sinistra.

Ne presento quì tre immagini differenti, affinchè si capisca meglio con le figure davanti la serie delle mostruosità, e delle alterazioni, che abbiamo accennato, e appunto ogni cosa è rappresentata nelle sue dimensioni naturali scrupolosamente.

TAVOLA I.

Le lettere della prima Tavola

AA rappresentano il petto mostruosamente scoperto degli integumenti fino alla radice del collo, e sulla spalla sinistra. Tutta la superficie scorticata era di color rosso di fegato, e la pelle aveva i margini accartocciati e callosi.

BBB L' estensione del voto lasciato nel petto dalla mancanza de' due terzi inferiori dello sterno, e delle coste, e delle cartilagini sterno-costali esposta poco sopra.

C Il cordone umbilicale da cui pende un largo lembo del peritoneo pellucido, e si nasconde nella grande scissura del Fegato senza aver comunicazione con la vescica orinaria per l' uraco mancante affatto, nè per le arterie umbilicali, che non vengono dalle iliache per due tronchi; bensì v' à un tronco solo arterioso, che vien dalla faccia anteriore dell' Aorta discendente poche linee al di sotto della celiaca, per raggiugner la vena umbilicale alla sua immersione nella scissura suddetta.

DDD Il Fegato.

E Il Pene, il di cui Prepuzio è spaccato.

F Il medesimo Prepuzio edematoso.

G La vescica orinaria piegata a sinistra e in giù, affatto sciolta dal peritonèo, e mancante d' uraco.

HHH Gli Intestini.

I L' Intestino cieco.

K Il Ventricolo.

L Una parte della Milza.

M Una Idatide biancastra sulla faccia convessa del Fegato.

* Curvatura e brevità morbosa del fianco destro.

TA-

TAVOLA II.

Questa figura rappresenta lo stesso *Mostro Amiocelio* veduto di fianco dal lato sinistro, col Fegato spinto dal proprio peso a destra, e le intestina tratte a man sinistra.

A Gl' Integumenti rovesciati ad arte un poco più di quel ch' eran nel Mostro.

B Comunicazione della cavità del Torace con quella dell' Abdomine per mancanza mostruosa del Diaframma.

C Base del Pulmon sinistro biancastro apparente nella cavità mostruosamente aperta del Torace.

DDD Il Fegato.

D* Il Lobo Spigeliano del Fegato assai grosso in proporzione col resto.

E Lo scroto.

F Il Pene.

G La vescica orinaria.

H* Gli Intestini.

H L' Intestino cieco.

H** Porzione dell' Intest. Colon, e principio dell' Intest. Retto.

I Gl' Intestini tenui sommamente angusti, e lunghissimi.

KK Il Mesenterio.

L L' altra porzion della Milza.

M Il ventricolo.

* Il Mento, e parte della Testa.

TAVOLA III.

Lo stesso Mostro di cui si à tratto a basso il Fegato NNN, con la Idatide N*, e con la porzion posteriore del Diaframma L, e si à spaccato il petto fino alla radice del collo scostandone

BB le clavicule, e

C Le

C	Le poche costole del lato sinistro affin che restino apparenti .
AA	Le due cavità del Torace .
B*	Il margine destro mancante di tal cavità .
D	Il margine della cavità sinistra fatto dalla 3. costa .
E	Il timo grossissimo diviso in due lobi distinti biancastri .
F	La Trachea .
G	Il Pulmon destro .
G*	Il Pulmon sinistro .
H	L' orecchietta destra del Cuore .
I	La faccia anterior superiore del Cuore .
I	L' orecchietta sinistra del Cuore .
K	L' Aorta al suo principio .
M	Il Tralcio Umbilicale .
O	La porzion principale della Milza .
P	Porzione del Vèntricolo .
*	Il Nervo Diaframmatico destro .

IX. Si danno poi moltissimi altri Mostri mancanti quale di tutto il capo , o d' un braccio , quale d' una mano con parte dell' avambraccio sinistro , qual era una giovinetta incurabile nello Spedal di S. Giovanni di Torino l' anno 1770. (*) Quale d' una gamba ; qual di tutte quattro le estremità , simile a quell' adulto Novarese , che abbiam' esaminato , e descritto in Torino l' anno 1786. il celebre naturalista ed entomo-

---

(*) Al moncone dell' avambraccio di quella giovine era affissa una picciolissima manina non maggior delle zampe davanti d'una talpa, più bassa di tutto il resto, capace di nissun movimento parziale alle picciolissime dita, tonde cortissime, senza unghie, bensì d' un po' di flessione sul punto della sua giuntura col moncone . Il vulgo attribuiva al solito questa mostruosità alla paura, e al ribrezzo d' una talpa veduta dalla madre mentre che n' era incinta .

mologo SPIRITO GIORNA, ed io. Quale finalmente di tutto il corpo dalle prime vertebre lombari in alto, come assicura d'aver veduto in Bologna il Sig. VOGLI nel suo Trattato del fluido nerveo, e come ò veduto, e descritto io l'anno 1791. in Pavia in un Agnelletto mancante dall'umbilico in su, fornito de' soli organi uropoietici, e genetici, con poche intestina cieche all'alto, aperte all'ano, che visse anche dopo che fu portato a casa mia, e che notomizzai per lasciarne la pelle, e le zampe di dietro al Museo Pavese, conservandone io stesso anche oggi tutte le parti molli, e le ossose, a istruzione mia, e appagamento altrui.

X. La Quarta Classe presso degli Antichi era limitata a que' *Mostri*, che col corpo d'Uomo portavano congiunte parti, organi, membri simili a quelli d'altri animali o d'altri corpi anche inanimati: oppure a' corpi de' bruti, nati da bruti con membra, organi, e parti umane, e rassomiglianti a quelle di corpi d'altra specie.

A questa classe per vero dire potrebbono riferirsi que' *Mostri*, che dal BLASIO, da NICOLÒ BLEGNY, dal LICETO, dal PAREO, dal RUFFO ec. ec. sono stati descritti, e con figure opportunamente rappresentati. Dovrebbe pur comprendere i Fauni, i Satiri, i Centauri, i Lemuri, i Tritoni, le Sirene, le Arpie, in somma tutti i prodotti mostruosi, che si pretendono risultati dall'accoppiamento nefando d'animali di specie diversa, rammentati dagli scrittori, qualor ne venisse meglio confermata la passata, e la possibile esistenza.

XI. Alla quinta classe finalmente riducevano que' Feti, che in un parto solo vengono alla luce più numerosi del solito; di modo che i *Trigemelli*, i *Quadrigemelli*, sebben ottimamente costrutti, appresso di cotali classificatori riescian mostruosi. Tanto più poi se maggior numero di Feti fosse stato il frutto d'una sola gravidanza, come accaddemi di vederla in quella contadina di Saluzzo mia patria, che fu in un sol parto madre felice di cinque bambolini viventi, della qual fecondità ò fatto cenno nel mio trattatello della *Esplorazione* (*).

XII. Se anch' io per genio fossi inclinato alle classificazioni, confesso, che non poco mi scosterei da quella, che abbiamo esposta; perciocchè l' accidente, e la curiosità, m' ànno dato agio di confermarmi nelle idee già spiegate sull' andamento regolar e uniforme della natura nella produzion de' *Mostri*, e nella disposizion delle parti, delle membra, e degli organi, che dà luogo a tutte le varietà de' medesimi. Tanti mi se ne presentarono, di cui ò potuto far diligente esame, e tanto più oltre in questo mi sono potuto inoltrare di quello che non àn fatto nè il WINSLOWIO, nè il LITTRE! Ora dalle mie osservazioni risulta, che malissimo si potrebbero collocare nelle cinque classi dagli antichi stabilite le varietà de' MOSTRI che mi sembrano più notabili ed essenziali. Siami dunque permesso di proporre liberamente i capi principali a cui m'è paruto comodo e instruttivo il ridurle, e si lasci per me a' Naturalisti, e a' Fisiologi la cura di dar loro il nome di classi ove lor piaccia così, e di aumentarne il numero quando ne' capi quì sotto disposti non sembri che nè si debbano, nè si possano più comprendere.

CLASSI PRINCIPALI A CUI SI RIDUCONO I MOSTRI STATI DA NOI OSSERVATI.

I. *Microsomìa*.

Picciolezza mostruosa di tutto il corpo.

II. *Micromelìa*.

Picciolezza mostruosa di qualche membro.

III. *Macrosomìa*.

Grossezza o Grandezza mostruosa di tutto il corpo.

IV. *Macromelìa*.

Grandezza mostruosa di qualche membro.

(*) Milano 1791. Barelle. 8. pag. 118.

V. *Polieschìa ,*

Deformità mostruosa di tutto il corpo .

VI. *Eschomelìa .*

Deformità mostruosa di qualche membro .

VII. *Atelìa .*

Mancanza mostruosa di qualche membro .

VIII. *Metathesìa .*

Trasposizione mostruosa di qualche membro .

IX. *Polisomìa .*

Multiplicità mostruosa di corpi in uno .

X. *Polimelìa .*

Multiplicità mostruosa di membri in un corpo .

XI. *Androginìa .*

Mostro umano con i due sessi .

XII. *Diandrìa .*

Uomo col sesso maschile doppio .

XIII. *Diginìa .*

Donna col sesso femminile doppio .

XIV. *Andralogomelìa .*

Uomo, che à membri di bruto .

XV. *Alogandromelìa .*

Bruto, che à membri umani .

XVI. *Aloghermaphroditìa .*

Bruto, che à i due sessi .

Quando sarà più ricca, e più matura presenterò in una Tavola la serie de' *Mostri* relativi a cadauno de' Capi sovra espressi, nella quale non ò voluto dar luogo nemmeno a que' *Mostri*, che avrei potuto vedere, e che per accidente non ò veduto, o non ò con bastevole diligenza esaminato prima che mi applicassi alla mia professione: e non ò compreso quelli, che dal regno de' vegetabili avrei potuto ricavare in assai buon numero.

XIV. Inoltre prevengo, che non ò mai considerato come *Mostro* verun corpo stato benchè stranissimamente alte-

ra-

rato dalle malattie, o mutilato dal caso, o dall' arte: bensì tutti quelli, che uscirono alla luce con quelle difformità, mancanze, o sovr' abbondanze, dalle quali riscontrate, e paragonate in più individui, o sia esemplari, ne ò dedotto le sedici precedenti categorie.

Cadauna specie di que' *Mostri*, lo ripeto, che vi son nominati, e che comprende più individui, porta seco una così evidente uniformità nella struttura, e nella disposizione delle parti anche minime mostruose osservabile in tutti gli esemplari, che crederei mancar del buon uso della ragione, se dubitassi ancora che alla produzion de' medesimi *Mostri* la natura non si serve della costanza, e della proprietà delle leggi medesime, di cui si serve per la produzion degli animali figurati più regolarmente, e più secondo il consueto naturalmente costrutti.

Di questo serbo le prove più convincenti a quando mi si darà tempo e agio a ridurre in ordine le notomie, che ne ò fatto; tanto più che mi preme di passar alle viste, che diverse categorie, e diverse specie di *Mostri* debbon offrire a' Raccoglitori de' Parti, e alle Levatrici, sicuro che facendone la convenevole applicazione, tali lumi ne caveranno da render il parto di que' *Mostri* men laborioso anche per essi, e meno alle puerpere fatale. Argomento di tal importanza è pur troppo stato con tanta leggierezza e infelicità fino ad ora trattato, che non può non aggradire a' Filosofi, non appagare i Naturalisti, non riescir vantaggioso all' Arte ostetricia, e alla Società.

LEZIONE TERZA.

Viste, che i Mostri debbono presentare agli ostetricanti nel parto.

I. Se è *mostruoso* il parto d' un Feto fornito di membra più numerose, assai più voluminose, molto differenti per figura, situazione, e disposizione, dalle ordinarie; se è *mostruoso* quello, in cui il bambolo è privo d' alcune membra, o parti essenziali; se lo è pure quello in cui la secondina è costrutta differentemente dal solito: non ne viene in conseguenza, che tutti i parti *mostruosi* riescan *laboriosi*, o *difficili*.

II. Egli è vero che alcune *mostruosità* de' Feti possono derivar da vizj accidentali dell' utero, che servì loro di stanza; e che tal utero (essendo uguali tutte le altre cose) può non essere così atto ad espeller da se con la facilità consueta il Feto *mostruoso*: però il potersi dare qualche volta simile difficultà non implica necessità, che diasi sempre. Noi pertanto a dilucidazion del nostro assunto sceglierem soltanto quelle *mostruosità*, che non posson far a meno di render il parto difficile, quali sono la *Macrocefalìa* (*1), e la *Microcefalìa* (*2), secondo ch' è *mostruosamente* grosso, o picciolo il capo del feto, che sta per nascere.

2.° La *Dicranìa* (*3), l' *Acranìa* (*4), e l' *Aëncefalia* (*5), cioè il cranio doppio, e l' eccesso, o il difetto nel numero delle parti o dure o molli, che compongono il cranio, o si trovano in esso.

3.° L' *Acefalìa* (*6), o mancanza totale del capo.

(*1) Nella nostra distribuzione appartiene alla Classe IV.

(*2) Classe II.

(*3) Spettano alla nostra Classe X.

(*4. 5) Alla Classe VII.

(*6) Alla Classe VII.

4.° La *Dicefalia* (*1), o due Teste, sieno esse sopra un solo tronco, o sopra due tronchi per qualsivoglia parte insieme congiunti.

4.° L' *Acheirìa* (*2), e l' *Apodìa* (*3), che sono la mancanza delle braccia, che dicesi pure *Abrachìa* (*4), e quella delle gambe detta anche *Ascelìa*, non che delle sole mani, e de' piedi.

5.° La *Tricheirìa* (*5), e la *Tripodìa* (*6), la *Tetracheirìa* (*7), e la *Tetrapodìa* (*8) ec., vale a dire Feti con tre braccia o tre piedi, con quattro braccia o quattro gambe, e con l' uno e l' altro eccesso in uno stesso individuo.

6.° Finalmente la *Didimosimfisìa* (*9), ossia il *Mostro Bicorporeo*, o *Disomo*.

III. *INDICAZIONI OSTETRICIE*

presentate dalla *Macrocefalìa*, dalla *Dicranìa*, e dalla *Dicefalìa*.

Quanto più è *facile* e *pronto* il *parto* in cui il Feto si presenta con la sommità del capo naturale all' orificio dell' utero, tutte le cose trovandosi disposte a norma delle savie leggi della natura, altrettanto difficile e penoso riesce quando quella testa, che pur si presenta, è difettosa di maniera, che tal difetto ne impedisce l' uscita, sebben si presenti nella miglior situazione, e direzione possibile. In tal caso all' Ostetricante abbisogna molta cognizion e giudizio, molta carità e franchezza, molta pazienza, e sopra tutto sperienza, destrezza, e fermezza per condurre a buon termine il parto.

Supponiam solamente più voluminosa del convenevole la testa del Feto e riduciam tal eccesso a sole quattro, otto, o do-

---

(*1) Classe X.

(*2, 3, 4) Classe VII.

(*5, 6, 7, 8) Classe X.

(*9) Appartiene alla IX. Classe.

dodici linee parigine, e vedremo le conseguenze, che applicherem poi agevolmente alle altre mostruosità differenti dalla *Macrocefalia*.

IV. Per buona sorte l' eccesso nella testa de' Feti non è tanto frequente quanto s' immagina il vulgo, a cui l' imperizia delle Ostetrici suol imporre, attribuendo la lentezza, e le difficultà del parto a tal eccesso, benchè dipenda o dalla cattiva situazione, o dall' obbliquità di quella. Ad ogni modo siane tre linee maggiore dell' ordinario il volume, ci sarà lecito abbandonar questo parto alla natura.

1. Ogni volta che le doglie saranno abbastanza forti per ispinger fuori dell' utero quel capo: 2. ogni volta che cadauno sforzo, o premito, lo farà allungarsi, e inoltrarsi giù per l' escavazion del catino, e avvicinarsi alla vulva, 3. ogni volta che nel termine di ventiquattr' ore dall' insorgenza delle doglie vere sta per aver compimento il parto, purchè la puerpera non sia nè primipara già attempata, nè rachicacica; perchè in tali due circostanze il termine può essere più lungo, e il parto terminar felicemente.

V. Anzi vedendo noi, che le stesse doglie perseveran con energia, e che non v' è triste accidente: osservando il sempre maggior allungamento del cocuzzolo, capace alcune volte d' eguagliarsi al diametro traversale del capo intiero, dobbiamo contentarci d' umettare, d' ingrassare il cocuzzolo stesso, e le vie, che dee percorrere, per altre dodici, sedici, ventiquattr' ore, che il parto si ultimerà senza danno della madre, o del Feto: soltanto converrà promuovere con i mezzi opportuni le evacuazioni delle intestina, e della vescica a tempo a tempo, e salassar la partoriente, quando la pienezza e l' urto del polso indichi minaccia d' infiammazione alle parti contuse, e complesse dal capo del Feto. Sarà pur cosa prudente raccomandar alla futura madre di sostener le doglie con pazienza, di secondarle con dolcezza, e d' astenersi dagli sforzi, da' premiti violenti, infino a tanto che questi sieno per essere fruttuosi. Del che l' Ostetrice si accorge sententendo il molle margine della bocca dell' utero a indurirsi, a tendersi come strettissimo collaretto intorno a quella parte del capo del Feto, che vi s' è già insinuata, la quale diventa allora molto più tesa e dura. Nelle doglie, ne' premiti inutili accade il contrario sì nel capo del Feto, che nell' orificio dell' utero.

VI. Qualora il diametro della testa eccede d' otto linee il diametro maggiore delle fauci del catino materno, e le doglie vigorose e costanti la fanno inoltrar nella escavazione, e verso la vulva, le parti molli della puerpera si posson distendere, e assottigliarsi a segno, che dopo sforzi, e patimenti gravissimi vengasi pur a ultimare il parto: ma il collo dell' utero, la vagina, il perinèo, in somma tutte le parti naturali s' infiammano d' un infiammazione spuria, che in breve tempo le dispone alla gangrena, o produce pericolosa febbre puerperale, onde la femmina che non ne muore riman soggetta all' incontinenza dell' orina, a spurghi purulenti, o a perdita involontaria delle feci, per tempo indeterminato.

VII. La stessa matrice può squarciarsi a cagion degli sforzi violenti che inopportunamente si fanno dalle madri inesperte, o crudelmente si promuòvono dalle Levatrici ignoranti, impazienti; il che suol far perire o subitaneamente, o qualche breve tempo dopo la donna, come in altro *discorso sulla rottura dell' utero nelle partorienti* amplamente dimostriamo. Il Feto suol morire fra tante angustie; che se sopravvive, gli integumenti del cranio ne sono gravemente alterati del pari che le funzioni del cervello, e del sistema nerveo, come si ricava poi dalla fatuità, dall' epilepsìa, dalla rachicace, e dal cretinismo che ne possono procedere.

VIII. Stimolata la donna al parto con doglie costanti vigorose pel tratto di trentasei, di quarantott' ore, senza che il Feto *macrocefalo* sia espulso, quella rimane spossata, e il capo cessando d' allungarsi resta inchiodato ora nello stretto superiore, or nell' escavazione, or nella fauce inferiore del catino, secondo che à potuto esservi spinto dalla possanza delle doglie , de' premiti secondati dall' arrendevolezza delle vie, e dalla pieghevolezza delle ossa del capo stesso. In questa specie di *paragomfosi* sono in pericolo tanto la madre quanto il *Macrocefalo* , di cui non si dee punto ritardar il *Battesimo* da chi à Religion cristiana , e prudenza .

IX. In tale stato di cose , non essendo possibile trar vantaggio dalla *Forcipe* , e potendo riescire più presto fatale l' *operazion Cesarea* , perchè non s' intraprenderebb' egli la *Sinsiseotomìa* al pube ?

Comprendendo nel taglio delle parti molli la commessura anteriore della vulva, quest'operazione ben eseguita salverà tanto più sicuramente due vite, quanto più basso troverassi, e immobilmente inchiodato il *Macrocefalo* . Resi con tal mezzo mobili e cedenti i parieti del catino , la *Forcipe dello* Smellie' potrassi adoprare con esito pronto e felice , quando si conosca le parti gonfie e convulse far una resistenza troppo salda e lunga alle mani dell' Ostetrice già stanche ed inerti .

X. La testa del Feto , che à un pollice e più di diametro che non ne comporta quello delle fauci del catin materno , s' arresta al di sopra della superiore non potendovi neppur discendere quanto basta per inchiodarvisi . Ci convincono dell' insuperabilità d' ostacolo sì fatto 1. la dilatazion sufficiente della bocca dell' utero : 2. la facilità di spinger le dita fin superiormente a tale stretto ne' momenti di calma : 3. di fare scorrer a destra , o a sinistra , o di respinger alquanto la testa di cui le dita nostre arrivano a calcolar la mostruosa estensione : 4. l' inefficacia delle doglie più violente , che persistono già da due o più giorni : 5. l' inutilità de' premiti più generosi, e delle agitazioni straordinarie della puerpera , anche nel tempo delle doglie , che sarebbono in altre circostanze le più determinanti , ed efficaci , senza che il *Macrocefalo* siasi punto inoltrato verso l' escavazion del catino .

XI. A quest' epoca noi abbiamo ragion di temere che se la matrice non si squarcia, sarà per lo meno (ad onta de' salassi, de' fomenti, de' linimenti, de' clisteri, de' cordiali) assalita da gravissima infiltrazione, e da quell' astenia ch' è inevitabile dopo scosse tanto numerose, lunghe ed energiche di contrazioni convulsive, dopo sì gagliarda contusione sofferta dal capo, e dal corpo del *Macrocefalo*. Infiltrazione e atonìa specialmente al collo dell' utero, che sarà presto seguita dalla gangrena, di cui saranno vittime la gravida e il Feto, se non avrassi a tempo opportuno eseguito giusta le regole dell' Arte la *Isterotomotochìa*.

XII. La Levatrice, che si è trovata presente dal principio della funzione fino all' estremo descritto in cadauna delle tre esposte circostanze, e che a dispetto di tutti i rimedj, e gli ajuti a lei cogniti vi si vede condotta; ella, che osserva di più come le forze della partoriente sono esauste; non debb' ella avvisare gli astanti e i parenti del rischio, affinchè si voli in traccia d' un ostetricante? Non dovrebb' ella chiamarlo prima che si arrivi a sì terribili frangenti?

Giunto l' operatore debb' ella informarlo del sito dov' è il vertice del *Macrocefalo*; del tempo dacchè lo trovò immobilmente colà fissato; de' progressi che fece dacchè sgorgarono le acque; dello stato della vescica orinaria, e dell' intestin retto; del momento dacchè si elevarono quelle tumidezze, le quali talvolta impediscono all' ostetricante l' esplorazione, gli vietano di scoprir bene la situazione, e la direzione della testa del *Macrocefalo* con quella prontezza, ch' è necessaria per fissare con sicurezza la indicazione, e determinarsi all' eseguimento della più salutar operazione.

XIII. I *Dicrani* (*) *monoprosopi*, cioè que' *Mostri* che ànno due cranj e una sola faccia, de' quali abbiamo esaminato due esemplari; I *Monocrani — diprosopi* (**), o *Mostri* a due faccie con un cranio solo, debbono collocarsi nella cate-

---

(*) Classe X.

(**) Classe X.

tegoria de' *Macrocefali* in quanto che n' è mostruosamente cresciuto uno de' diametri del capo con questa differenza, che sendo due cranj e una faccia sola, il maggior volume s' incontra più a tergo: sendovi due faccie e ún cranio solo, il maggior volume, e la maggior diseguaglianza di superficie, sta al davanti. In amendue però è assai più lungo il diametro da una tempia all' altra, che dalla fronte all' occipite. Sia pertanto il capo *mostruoso* in giù, discenderà più facilmente nell' escavazione di quel che non sarà per uscir dello stretto inferiore e della vulva, senza gagliardo ajuto, frequenti unture, sostegno costante alla forchetta, e al perinèo, e ingrassamento delle grandi labbra della vulva. Oltre a' quali ajuti farà pur mestiere della *Forcipe* dello SMELLIE' o della *Leva*.

XIV. Siccome però queste operazioni in simili casi riescono per lo più di grave danno alla madre, che ne rileva contusioni, lacerazioni, infiammazioni, gangrene; così converrà esaminar ben bene se la maggior e peggior parte di questi mali consecutivi si possa evitare con l' opportuno *voltamento del Feto* nell' utero, e con l' estrazione del medesimo per li piedi, prima che il capo deforme siasi impegnato in un degli stretti, tosto che per via dell' *Esplorazione* ci saremo assicurati, o messi in sospetto di tale *mostruosità*.

Tutto il corpo uscendo prepara le strade al capo, che suol essere piramidale; allora à la parte più acuta della piramide fuor dell' escavazione, quando le spalle ne sono fuor della vulva; sicchè piegandolo a destra, poi a sinistra alternativamente; ingrassando la vulva, e la cotenna, introducendo il dito nella bocca a guisa d' uncino con la flemma e la destrezza dovuta, il Parto del *Dicranio* (*) o del *Diprosopo* (*2) riesce.

XV. I *Dicefali* (*3) *monosomi*, che sopra un solo tronco

àn-

(*1, 2) Classe X.
(*3) Classe X.

ànno due teste, pervenuti a maturità non possono uscire del sen materno senza difficultà proporzionate al volume delle due teste, e all' ampiezza delle fauci del catino: maggiori però sempre allor ch' una delle teste già trovasi dall' Ostetrice impegnata nell' escavazione, perchè riesce quasi impossibile rispingerla nell' utero per andarvi in traccia de' piedi. Allor ci lusinghiamo d' estrar tutto il corpo mediante la Forcipe sentendo quella testa mobile, e non potendo convincerci che altra ve n' à; perciocchè in vece d' introdurre indarno quello strumento, abbandonando il parto alla natura e ajutandola colle unzioni, e gli altri ajuti innocenti, amendue le teste si faranno strada a poco a poco, e salveremo la madre almeno se pur il *Mostro* uscito alla luce sarà morto.

INDICAZIONI OSTETRICIE
Presentate dall' *Acranìa*, dall' *Acefalìa*, dall' *Amiocefìa*, e da altre simili mostruosità per difetto nel tempo del Parto.

XVI. Finora si considerò l' eccesso delle parti, che compongono il capo del Feto nella sua maggior semplicità, e vedemmo di qual ostacolo esser possa alla felicità e alla speditezza del venir alla luce alcuna delle principali mostruosità: ora convien vedere qual sogliane derivare dal difetto d' alcune parti ne' *Mostri*.

Nell' *Acranìa* (*), e nell' *Aëncefalìa* (**) manca la volta del cranio nella prima, e con tale volta manca tutto o per la massima parte il cervello. Supponiamo che si presenti col capo alla bocca dell' utero il *Mostro Acranio*: la mollezza delle sostanze con cui dovria dilatarla non n' è capace, si appiattisce piegando sotto le pressioni che soffre, e che fa, e il parto procede lentissimamente.

La

(*) Classe VII.
(**) Classe VII.

La Levatrice esplorando sente quella mollezza inusitata, e giudica tutt' altro essere fuorchè il capo ciò, che preme col dito. Spingelo più oltre, e arrivando alla bocca, al mento, al collo, alle orecchie, e s' è ammaestrata circa la possibilità de' *Mostri Acrani*, se ne persuade, e prende il partito di rivolger il Feto, ed estrarlo per li piedi: se ne ignora la possibilità, e non è avvezza ad esplorare, si confonde sempre più, e lascia languir la madre, e perir miseramente il Feto a forza d' aspettare, e di tardar a procacciarsi un Raccoglitore capace ed esperto.

XVII. Tanto i M. *Acrani* (*) quanto gli *Aencefali* (*2) soglion aver il collo molto breve, e questi ultimi si presentano con le irregolarità del fondo del cranio al dito esploratore, e rendon lento e difficile il parto. È vero, che presto, il dito che palpa ne può incontrar le spalle; e sembrerebbe pur che si potrebbon introdurre sotto le ascelle gli uncini ottusi, o i manici uncinati della *Forcipe del* LEVRETTO per far con essi l' estrazion del *Mostro*: ma è assai meglio spinger oltre la mano, abbrancarne i piedi, e voltatolo secondo i precetti ostetricj cavarlo per essi dalla matrice. La picciolezza, e la pieghevolezza di tali teste ci dispensa dalla fatica di trarne fuori le braccia, sicchè l' operazion è presto terminata.

Non è frequente ch' escan vivi tali *Mostri*, ed è raro che aspettino il nono mese ad eccitar le doglie del parto; altrimenti non si dovrebb' esitar un momento a battezzarli, comunque il vulgo gli paragoni a rospi, a rane, ad altri oggetti favolosi, e gli supponga temerariamente castigo del peccato.

XVIII. Da' *Microcefali* (*3) sembra che non si dovrebbon aspettare difficultà nel parto, essendo naturale il credere che

---

(*) Clas. VII.
(*2) Clas. VII.
(*3) Clas. I.

un corpo picciolo sia per uscire assai più presto e facilmente da una cavità, che darebbe uscita a corpo assai più voluminoso: ciò nulla ostante la meccanica del parto è tale, che se l'orificio dell' utero non è aperto fino a un certo segno da un conio proporzionato al bisogno, il corpo non se ne contrae, l' istmo così ben descritto dal Calza non (*) cede, e il fondo non preme con vigor sufficiente. Dunque fa d' uopo che la Levatrice dilati co' movimenti opportuni de' suoi diti quell' orificio, e co' soliti pinguedinosi dolci linimenti ne favorisca la dilatazione. Anzi un capo picciolo suol essere piantato fra spalle larghe, e queste incontrar difficultà non lieve a tener dietro al capo già disceso nell' escavazione: se la Levatrice s' impegnasse di voler estrarre il Feto senza proceder oltre con le dita, e servirsene a guisa d' uncino cacciato sotto le ascelle, o con miglior consiglio prender i piedi per voltar il Feto, ed estrarnelo, lo ucciderebbe, e forse con sua vergogna gli svellerebbe la testa dal busto.

XIX. S' è intercetta la via dell' utero alla mano, e il parto ritardato è accompagnato da emorragia pericolosa, per accelerarlo converrà far uso degli uncini ottusi cacciati destramente sotto le ascelle per far l' estrazione del *Microcefalo*.

XX. Gli *Acefali* (*2) esigon le medesime attenzioni, cioè il *voltamento* destinato a far il parto agrippino se già non presentano i piedi. La diagnosi n' è imbrogliata per le inesperte Levatrici, e gli ostetricanti vulgari: ma posto un tratto per sempre, che quando col mezzo della *esplorazione* resta dubbioso qual sia la parte che s' affaccia alla bocca dell' utero, sempre giova portar subito la mano in cerca de' piedi, prescinderemo da tutto il rimanente, e darem compimento

---

(*) Se ne leggano le due belle dissertazioni sulla struttura della Matrice, e sulla Meccanica del Parto, ne' volumi dell'Accademia di Scienze, Lettere, ed Arti di Padova.

(*2) Classe VII.

to al parto. Un Raccoglitore istrutto, quando l'*Acefalo* si presentasse con una spalla, o con la sommità del tronco, farebbe scorrer il dito esploratore su quella, sentirebbe le scapule, e la colonna vertebrale per un verso, le coste, le clavicule, e le ascelle dall' opposto verso, e non si lascierebbe confondere, ma s' industrierebbe subito per abbrancare i piedi e trarnegli fuor della vulva.

XXI. Così è stato adoprato nel caso del M. *Amiocelio* (*), di cui abbiam dato quì la descrizion e le figure. Presentava il ventre con tutte quelle irregolarità di superficie, e quel viluppo d' intestina, di fegato, e col difetto essenzialissimo delle coste, e dello sterno al petto. La mano esploratrice trovò verso le vertebre della madre una coscia intersecata dal ginocchio dell' altra gamba; l' indice a guisa d' uncino penetrato pel poplite spiegò quella gamba, intanto le altre dita strisciando per la coscia nominata la abbrancarono, piegaron la gamba per tirarla a diventar paralella con la predetta, e i piedi furono estratti, e seguiti dal rimanente del corpo.

La testa oppose qualche difficultà; però nel maneggio del corpo mostruoso si ebber i dovuti risguardi al pessimo stato del ventre; si applicarono al Feto nascente le acque battesimali, e il parto fu terminato felicemente con la sopravvivenza della creatura per molti minuti.

Mi lusingo che gli avvisi fin quì raccolti sieno per bastare a lume di chi esercita l'Ostetricia, e a compimento del nostro assunto. Passiam ora a considerare le vie tenutesi da' Maestri dell' arte per agevolar il parto de' *Mostri* a dilucidazione, o a correzione di quanto venne da noi proposto su tal argomento.

LE-

(*) Classe VII.

LEZIONE QUARTA.

Crudeltà de' partiti presi in Ostetricia relativamente a' Parti Mostruosi.

I. I partiti, che gli scrittori più moderni e più accreditati di Ostetricia propongono ne' parti mostruosi, sono poi egli dettati, non dico dalla Cristiana pietà, nè dalla Umanità filosofica, ma dalla cognizione anatomica, e patologica delle parti del Feto, e della madre, dall' esperienza della forza, e della convenienza degli instrumenti, che c' incoraggiano di adoprare? Per verità ci sembra, che tutti d' accordo abbian soverchia fiducia nell' Arte, mentre che *la sola natura alle volte supera tutti gli ostacoli prodotti dalla mostruosa superfluità delle membra, le quali in tal caso vengono talmente compresse dalla forza dell' utero, e dall' energia de' premiti, e delle doglie, che passan felicemente per un amplo catino.* (*) Così dicea GIORGIO ROEDERER alla metà del secolo passato. Ma poi soggiungeva, per mio avviso poco prudentemente: (*2) *Nel caso, che un feto abbia due teste, s' apra quella che si presenta prima col perforatorio per diminuirne il volume: indi si conduca l' altra alla bocca dell' utero e vi si faccia la medesima operazione. Ciò basterà perchè amendue questi capi possano esser compressi, e spinti fuori dell' utero dalla forza de' dolori.*

Se il feto s' estrarrà per li piedi, converrà prima diminuir il volume delle due teste. (*3)

Quando tal feto à i colli molto lunghi se ne termina il parto con togliere, amputandola, l' impedimento d' una delle teste, che subito s' estrarrà, e la seconda facilmente sarà per uscirne. (*4)

II.

(*) Elementi di Ostetricia §. 569.

(*2) Ivi §. 570. A.

(*3) Ivi §. 570. A.

(*4) Ivi B.

II. Appoggiati a tal autorità i moderni, altro mezzo più soave di soccorrer la Partoriente non inventarono, dimentichi fin delle seguenti parole del Roederer istesso, che avrebbon dovuto far impressione assai più consolante nell' umano cuor loro: *ovvero si respinga il capo indietro; si volti il corpo abbrancandone i piedi, e si estragga fino alle ascelle per disimpegnarne quindi le teste una dopo l' altra*. (*)

III. Il Camper nella *Dissertazione* premessa al trattato di Francesco Mauriceau *Delle Malattie delle Donne gravide, e di quelle che di fresco àn partorito, che comprende anche diverse osservazioni sulla Gravidanza e il Parto*, propose, quando un *Feto Dicefalo* (*2) presenta una testa fuor della vulva rimanendo l' altra nell' utero, d' amputar la prima perchè non si può più respinger in esso eccetto quand' è molto picciola, il che dà luogo a terminarsi il Parto per la via ordinaria: soggiunse di poi doversi tanto meno esitare a far tale operazione, quanto più di raro nascono vivi i *M. Dicefali*, e più sovente muojono appena usciti alla luce.

IV. Noi ci determineremo difficilmente a così barbara operazione prima d' aver battezzato il feto, e tentato con la *sinfiseotomìa* di dar esito a tutto il feto, non essendo certissimi della sua morte: e mai non ci adatteremo al crudel suggerimento di G. B. Jacobs, il qual vuole che la testa già fuoruscita si svelga dal tronco torcendola; ed esalta la facilità con cui fassi tal separazione, adducendone in prova gli esempi, che ne forniscono i parti laboriosi. Anzi dà come precetto essenzialissimo, *che non si separi la testa col gamante come usavasi fin ora, nè con le forbici, per non offender la madre, il che mai non succede quando si svelle il capo del Feto, o qualunque articolo a forza di torcerlo* (*3).

Re-

(*) L. cit. B.

(*2) Class. VII.

(*3) Ecole Pratique des Accouchemens. A Gand. Vander Schueren. in 4.° M. DCC. LXXXV. avec figures. pag. 252.

Reca maraviglia tal asserzione uscita dalla penna d' uomo di così lunga e vasta esperienza, qual vanta il Jacobs, essendo difficile, che da' torcimenti proposti non risultino squame, spine, angoli nelle ossa sfragellate, dalle quali è molto più malagevole difender le parti materne, che non dal gamante regolato dalla mano d' un Chirurgo destro, e paziente.

V. Ma degli avvisi del Jacobs non sarà tentato verun di valersi ne' casi complicati e difficili, quand' osserverà, che in altri luoghi dell' opera citata raccomanda buonamente la stessa operazione, e quando leggerà dove tratta della difformità del corpo del Feto, (*) che *quando la testa n' è uscita naturalmente per la vulva, se il torace, e il ventre ne saranno grossi a segno di non potersi ultimar il parto, si dovrà tosto esaminar se il Feto è vivo per intraprender immediatamente l' operazion cesarea*. Come se di leggieri si potesse far retroceder il capo per la vagina nell' utero ond' estrarlo dal taglio del ventre; e se non fosse per giovare molto più sicuramente per la madre e per lo feto la sinfiseotomìa!

VI. Trattandosi d' un M. Bicorporeo, che diciam *Dicefalo-disomo* (*2) se à pur anco due teste, o *Monocefalo-disomo* (*3), se una sola testa è appiccata su due tronchi, la maggiore, o minor difficultà del parto dipende non solo dalla maniera di presentarsi alla bocca dell' utero, o d' uscire dalla vulva, ma specialmente dal modo dell' union de' corpi stessi, la quale può essere petto con petto, o dorso con dorso, o fianco con fianco; ora ventre con ventre, ed or catino con catino. Nè mancano esempi di teste unite tempia con tempia, o fronte con fronte, o nuca con nuca, il rimanente de' due corpi trovandosi affatto diviso.

VII. Queste notizie generali bastano per servirci di regola nell' esplorazione, cui mediante, potremo indicare se non esat-

---

(*) L. c. pag. 256.

(*2) Class. IX.

(*3) Class. IX., e VII.

esattamente la qualità del *Mostro*, almeno le difficultà possibili del Parto dedotte dalla cognizion tratta dal volume del Feto, della situazion che à, e della proporzionale capacità delle vie per cui à da passare venendo alla luce; finalmente della vita, o della morte del medesimo.

VIII. Il *Feto Disomo* picciolo presentatosi con un de' quattro piedi, o con due, alla vulva, dee determinar l'ostetricante a cercargli tutti quattro per condurre i corpicciuoli a poco a poco fuori dell' utero, guardando bene di non confonder tal *Mostro* col parto gemello naturale, sebben è molto raro, che i gemelli si trovin nella stessa borsa, e non sieno divisi da membrane atte ad avvertirne l' ostetricante, che esplora con diligenza, e buon criterio.

IX. Si danno *Mostri Disomi-trisceli* (*), vale a dire due corpi e tre gambe sole, più o meno regolarmente collocate: si capisce che sarebbe tempo perduto il cercarne assolutamente la quarta. Ad ogni modo tirando le tre gambe anche d' un mostro che ne avesse quattro, lo estrarremmo.

Avendo tutt' e quattro le estremità del M. o almeno tre de' piedi nelle sue mani, l' ostetricante esamina le due, che s' appartengono al medesimo tronco, e tirando obbliquamente a se prima queste, dopo aver unto le parti genitali materne, e le contenute, tira poi obbliquamente quelle dell' altro dal canto opposto, ed esplorando, sempre dalla parte dell' osso sacro della madre, osserva attentamente quali incontrino minor resistenza ad uscire per continuare a tirar queste, giacch' è probabile, che si trarranno dietro il resto del corpo, e il capo, o i capi stessi.

X. Altrimenti appena uscito uno de' tronchi fin al petto, converrà rintracciarne le braccia prima che se ne veggano le ascelle, e se le angustie impedissero all' ostetricante d'arrivarvi colle dita, si serva pur degli uncini ottusi facendogli scorrer un dopo l' altro sul petto del tronco maggiormente dis-

---

(*) Questi appartengono alle due Classi VII, e IX.

disceso, strisciandovelo rasente fin al collo, indi rivolgendone la punta fral collo, e il braccio sollevato allora oltre al capo, e faccia discender quella punta giù pel dorso del Feto, scosti l'uncino dal collo sempre strisciando in giù, e traendo a se, e verso l'osso sacro della madre; la faccia ondeggiare perchè il braccio compreso nell'arco dell'uncino si smuova, che così il gomito discenderà per la parte della escavazione del catino materno verso il perinèo, d'onde egli introdotto il dito per la forchetta potrà prenderne facilmente la mano e cavarla.

La stessa diligenza impiegando coll'altr' uncino sull'altro braccio prontamente sarà seguita dal medesimo effetto. Così darà spazio alla testa del feto più avanzato da uscir alla luce; e così seguirà ben presto di tutto l'altro corpicciuolo del *Mostro*.

XI. Il Jacobs parla di certi *M. Disomi* (*) *uniti soltanto per gl' integumenti, e per un picciolo spazio,* de' quali propone *la separazion colle dita*, *o il taglio se quelle non bastano;* avvertendo che *colle dita si possono separare quand' anche le ossa ne fossero unite* (*2), *la qual possibilità esclude l' uso d' ogn' istrumento tagliente*. Noi per verità non abbiam esempio di Feti uniti tanto superficialmente da poterne sciorre l'adesione col dito, e senza rischio di quegli, o eccidio loro; nè gettiam tempo a formar chimere per gettarne altrettanto a combatterle.

XII. Non ci arresterem nemmeno di nuovo a esaminar la premura, che mostra di *squarciar, e di svellere a brani con i già* da lui *encomiati torcimenti delle tenere membra, e mutilar que' corpi quando si suppongono privi di vita,* e quando non si à fatta l' *Isterotomìa alla partoriente sul feto ancor vivo*.

XIII. Torna a decantare la facilità, con cui si fanno quelle violente mutilazioni, e la superiorità di tal carnificina so-

---

(*) Class. IX.

(*2) L. cit. pag. 257, e 258.

sopra il metodo de' padri nostri, che procuravano a buona ragione d' amputar, nella dura necessità di separarle dal corpo, le membra de' Feti nel Parto con forbici, e coltelli ben guidati, diffidando egli dell' abilità de' Chirurghi nel maneggiar gli instromenti da taglio là dove non si penetra con l' occhio.

XIV. In simili circostanze Lorenzo Nannoni Chirurgo fiorentino infaticabile, e grave scrittor d' Ostetricia, propone anch' egli che si disgiungano i due feti (*), che gratuitamente suppone attaccati insieme soltanto per una parte degli integumenti; e si venga all' amputazione d' uno de' capi, e alla disarticolazione di qualche altro membro, quando l' union è fatta per mezzo della colonna vertebrale. Nelle pagine precedenti (*2) però avea già recato esempj e osservazioni di Parti riesciti felicissimamente per le sole forze della natura non disturbata dalla sollecitudine inopportuna, dalla perniciosa officiosità delle Mammane, e de' Raccoglitori impazienti, benchè i Feti fossero *mostruosi Dicefali*, *Disomi*, e d' altre maniere per eccesso.

XV. Il Baudelocque (*3) schivò le difficultà in tutto il suo grosso libro non facendone mai parola. Prudenza altrettanto lodevole in un maestro per ogni altro verso tanto minuto e scrupoloso, quanto poco lo è la manìa di dar leggi tanto crudeli, e irragionevoli degli altri professori, che abbiamo nostro malgrado avuto da citare per distrugger dalla radice loro i mali, che nella pratica degl' incauti principianti si sarebbero potuti multiplicare.

XVI. I Feti *Acheiri* (*4), cioè mancanti delle mani, o delle braccia; i *Monocheiri* (*5), che ànno un braccio solo,

---

(*) Trattato di Ostetricia e di lei rispettive operazioni. Siena 1786. 8.° Parte IV. Lezione VIII. §. 95. pag. 249 250.

(*2) Ivi dalla pag. 245 alla 249.

(*3) L'Art des Accouchemens. Paris 1799. 8.° Volumi due, di pagg. 1350 e più, carattere assai minuto.

(*4) Class. VII.

(*5) Class. VII.

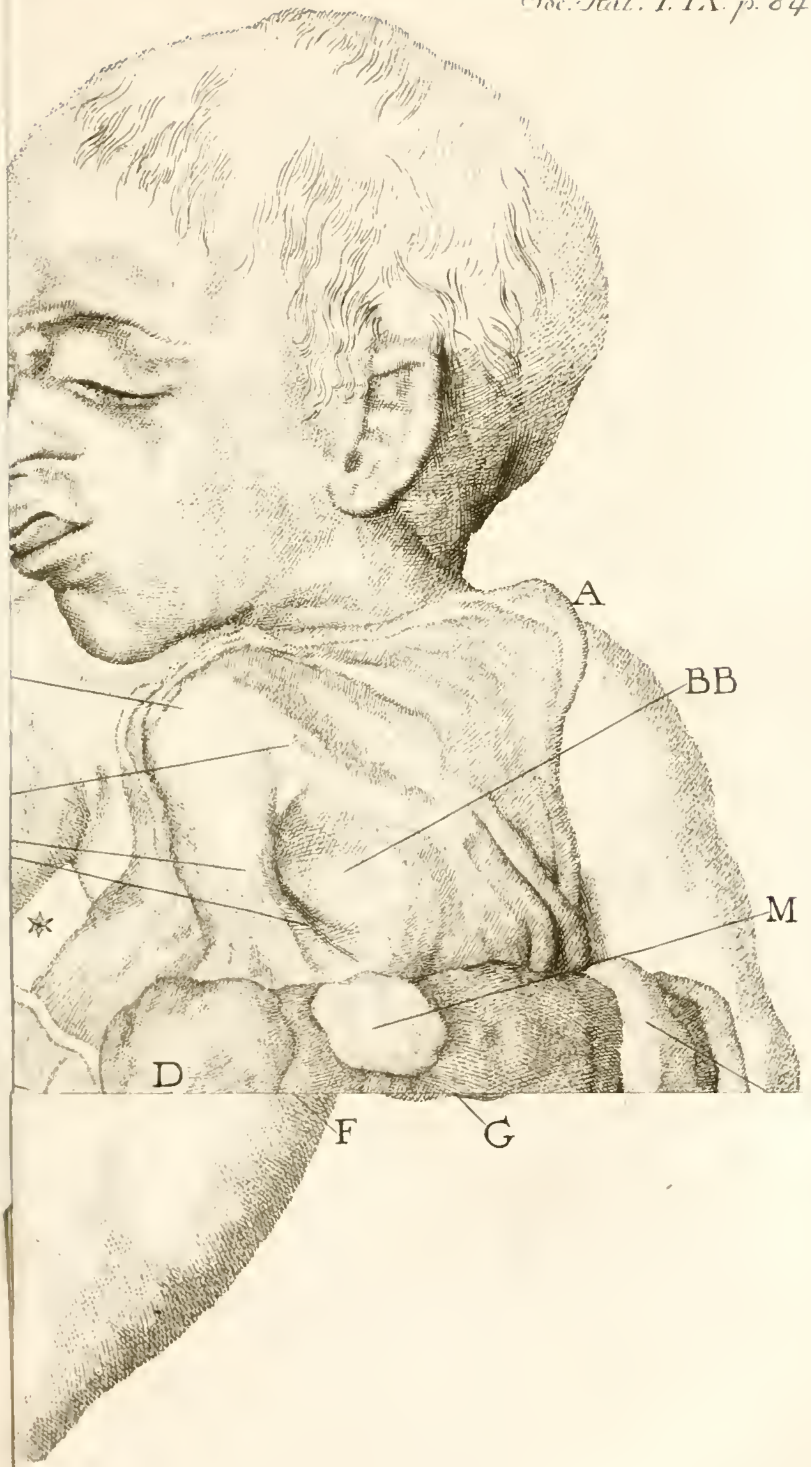
o una sola mano, non recano disturbo nel Parto; Gli *Apodi*, gli *Asceli* (*), o privi delle gambe, e delle cosce non che de' piedi, possono veramente imbrogliare allorchè presentano all' orificio dell' utero la parte inferiore del tronco o il podice, e quando sono attraversati; perchè l' esploratore che dee per le regole dell' arte andar in traccia de' piedi, ve gli cerca indarno, e può impegnarsi in tal ricerca a danno della madre e del feto, ritardando la scelta d' altri mezzi opportuni. Se non è avvisato della possibilità dell' esistenza di *Mostri* così fatti, non gli si presenterà alla mente i vantaggi che può trarre per abbreviar questa penosa funzione dall' introdurre la mano in guisa, che si conosca dalle parti genitali del Feto il sito verso di cui è rivolto il podice, e là guidar la *Leva*, e industriarsi con essa di far che il podice stesso corrisponda all' orificio dell' utero. Allora le forze della matrice termineranno il Parto. Che se fossevi emorragia minacciosa, o altra premurosa pericolosa circostanza, la *Forcipe* del Levretto ben applicata su i lati del catino, e su i fianchi del *Mostro* ne dovrebbe far l' estrazione.

XVII. I *Mostri Monosceli* detti pur anco *Monopodi* (*2), che presentano l' unica gamba loro alla vulva, sogliono esser conici, come abbiam osservato in un adulto vivo, e sano, e in due bambolini imbalsamati, che si mostravano per le fiere, e i mercati da' ciurmadori; e non presentano veruna difficultà all' uscita spontanea, o all' estrazione, che pur se ne debbe fare in caso di troppa lentezza, o d' emorragia.

NUO-

(*) Class. VII.

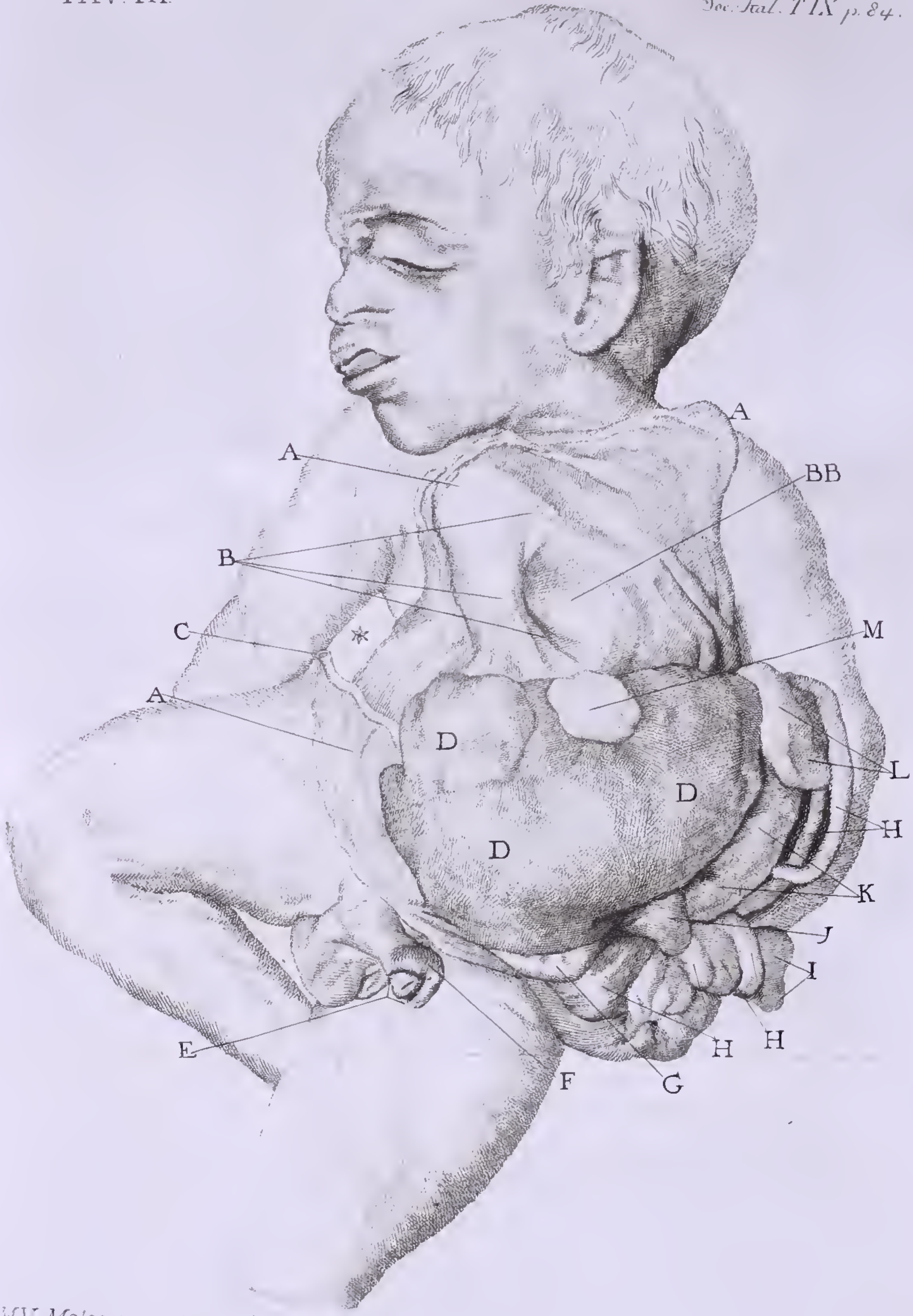
(*2) Da Plinio Sciopodi. Classe VII.



Ant: Bunafoco del. et in.

TAV. III.

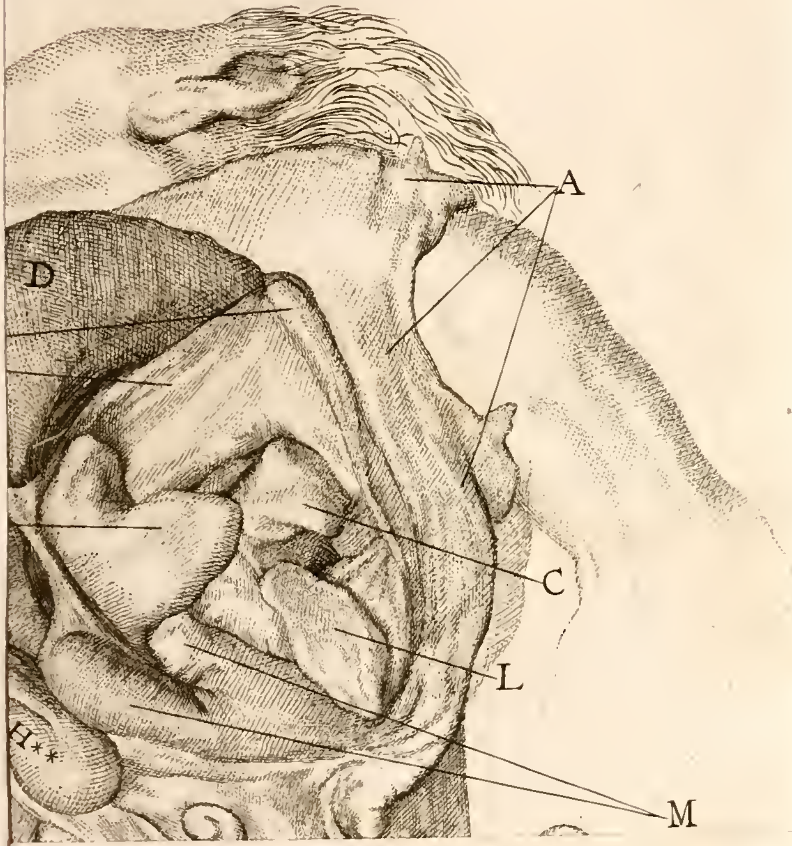
Soc. Ital. T IX p. 84.


A
A
BB
B
*
M
C
A
D
L
D
H
D
K
J
I
E
H
H
F
G

M.V. Malacarne notomizzò
in Padova MDCCXCVIII

Ant. Buttafoco delet. in.

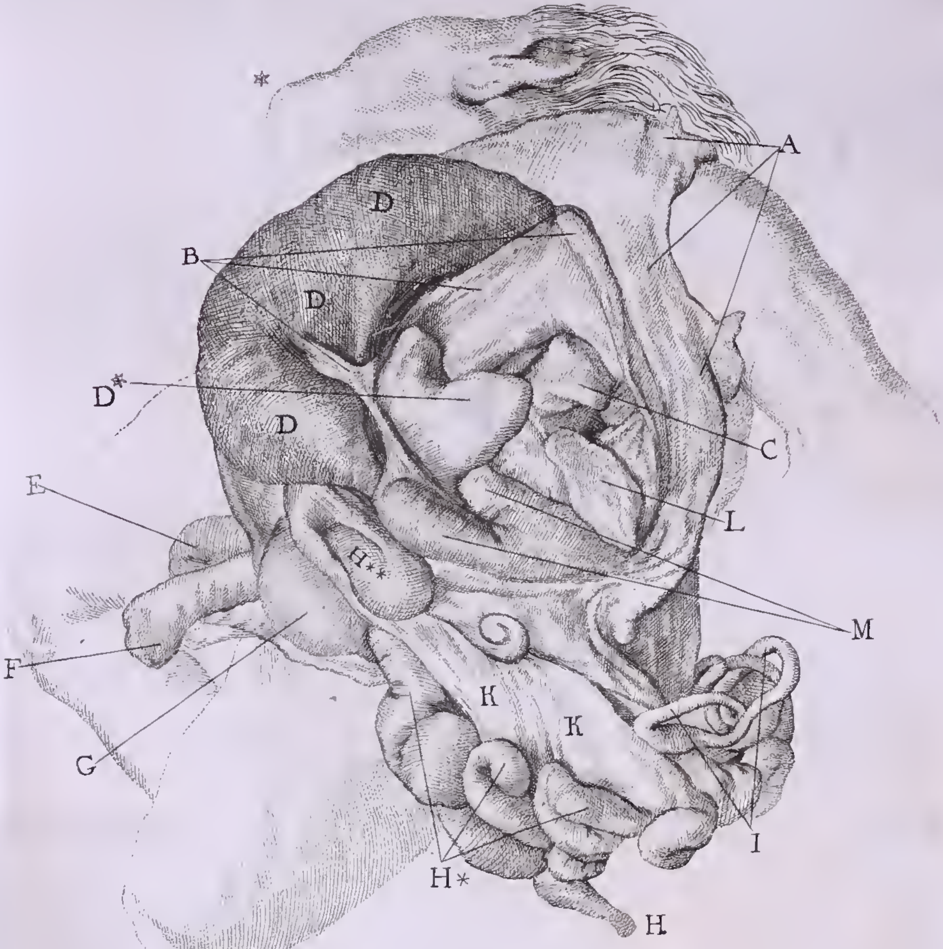
Soc. Ital. T. IX. p. 84.



Ant. Buttafocco del. et in:

TAV. IIII.

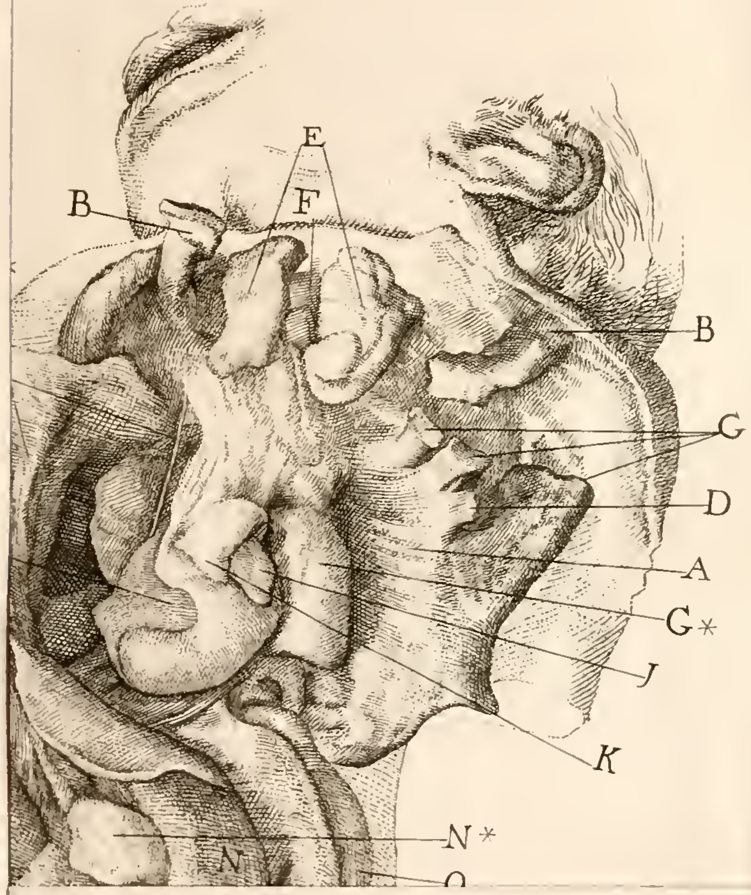
Soc. Ital. T. IX. p. 84.


*
A
B
D
D
D
D*
C
L
E
H**
M
F
G
K
K
I
H*
H

M. V. Malacarne notomizzo' in Padova MDCCXCVIII

Ant. Buttafocco del. et inc:

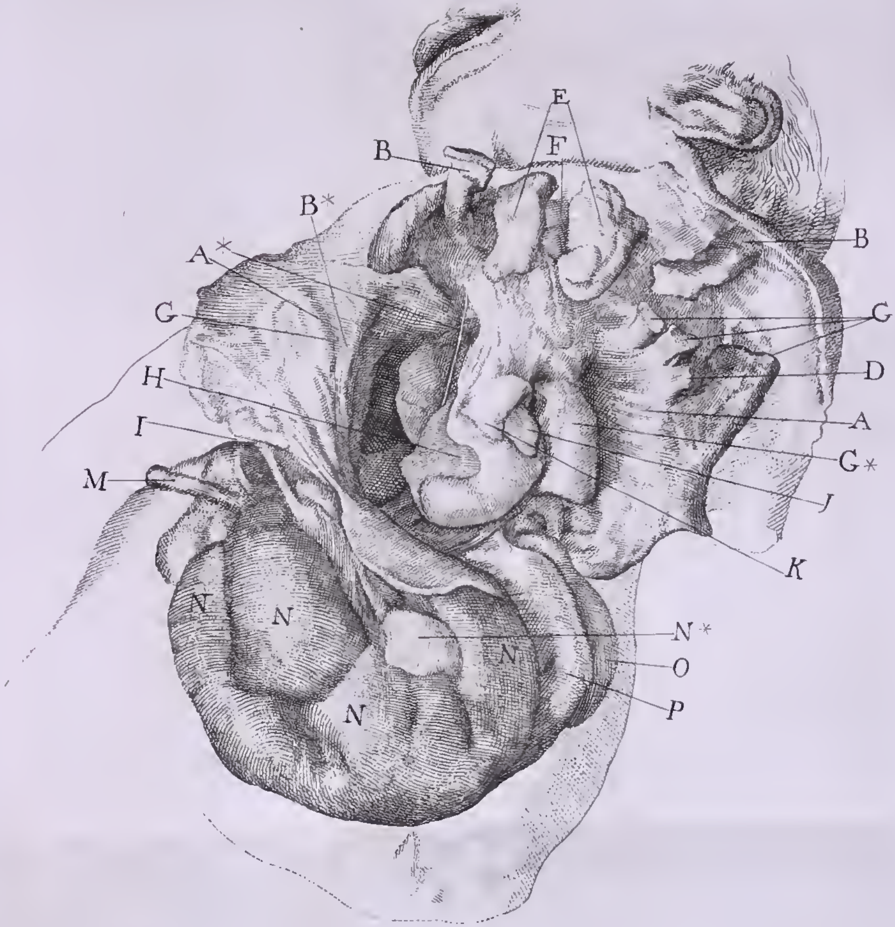
Soc. Ital. T. IX. p. 84.


E
F
B
B
G
D
A
G*
J
K
N*
N
O

Ant. Buzzafoco del. et inc.

TAV. IIII.

Soc. Ital. T IX. p. 84.


E
F
B
B*
A*
A
G
H
I
M
B
G
D
A
G*
J
K
N
N
N*
N
O
N
P

M V. Malacarne notomizzo
in Padova MDCCXCVIII

Ant. Buttafoco del. et inc.

NUOVA DIMOSTRAZIONE DI UN TEOREMA IMPORTANTE NELLA DOTTRINA DEI NUMERI

DI PIETRO PAOLI

Ricevuta il dì 9. Luglio 1801.

Il sommo Geometra Lagrange ha il primo dimostrato nelle Memorie dell' Accademia di Berlino dell' anno 1768., che la formola omogenea

$$Ax^n + Bx^{n-1}y + Cx^{n-2}y^2 \ldots + Ny^n,$$

ha, prescindendo dai segni, il più piccolo valore in numeri interi, quando $\frac{x}{y}$ è una delle frazioni convergenti nate dallo sviluppo in frazione continua delle radici reali, o delle parti reali delle radici immaginarie, che ha l' equazione

$$At^n + Bt^{n-1} + Ct^{n-2} \ldots + N = 0.$$

Il chiarissimo Legendre, giudicando questa dimostrazione astrusa, e difficile a comprendersi, ne ha data una nuova nella sua eccellente Opera, che ha per titolo *Teoria dei Numeri*. Ma poichè anche questa sembra ad alcuno assai oscura, ho pensato di esporre una nuova dimostrazione, la quale mi pare delle altre più facile e piana.

Data la formola omogenea

$$Ax^n + Bx^{n-1}y + Cx^{n-2}y^2 \ldots + Ny^n$$

ove non solo i coefficienti A, B, &c., ma anche le indeterminate x ed y siano numeri interi, se α, α', α'', &c. sono le radici reali, e $\beta + \gamma\sqrt{-1}$, $\beta - \gamma\sqrt{-1}$, &c. le radici immaginarie della equazione

$$At^n + Bt^{n-1} + Ct^{n-2} \ldots + N = 0,$$

essa potrà esprimersi sotto la forma

$$A(x-\alpha y)(x-\alpha' y)(x-\alpha'' y)\ldots[(x-\beta y)^2 + \gamma^2 y^2]\ldots$$

Supposte tutte le quantità α, α', α'', &c. β, &c. del medesimo segno, per esempio tutte positive, sia primieramente proposto di trasformare la formola data in un' altra

$$A(x'-\delta y)(x'-\delta' y)(x'-\delta'' y)\ldots[(x'-\varepsilon y)^2+\gamma^2 y^2]\ldots$$

ove le quantità δ, δ', δ'', &c., ε, &c. non abbiano tutte il medesimo segno.

Sia k un numero intero minore di alcune radici, per esempio di α e di α', e maggiore delle altre, e si faccia $x = x' + ky$, la formola data diventerà

$$A(x'+\overline{k-\alpha}.y)(x'+\overline{k-\alpha'}.y)(x'+\overline{k-\alpha''}.y)\ldots[(x'+\overline{k-\beta}.y)^2+\gamma^2y^2]\ldots;$$

ove le quantità $\alpha - k$, $\alpha' - k$ sono positive, $\alpha'' - k$, &c., $\beta - k$, &c. sono negative, e quindi il problema è risoluto.

Questa soluzione riesce sempre fuorchè nel solo caso, in cui tutte le quantità α, α', &c. β, &c. cadono tra due numeri interi consecutivi; ma in tal caso potrà usarsi il metodo seguente. Siano le frazioni $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ una maggiore, l' altra minore di una qualunque radice, per esempio di α, ma talmente prossime ad essa, che siano ambedue minori di tutte le radici maggiori di α, e maggiori di tutte le altre minori di α, lo che è sempre possibile, e si faccia $x = ax' + by'$, $y = a'x' + b'y'$. Sarà $x' = \frac{b'x - by}{ab' - a'b}$, $y' = \frac{ay - a'x}{ab' - a'b}$; ma acciò ai valori interi di x ed y corrispondano numeri interi per x' ed y', converrà che sia $ab' - a'b = \pm 1$, alla qual condizione soddisfaremo prendendo per $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ due frazioni consecutive convergenti verso α. Posto ciò, se facciamo

$$A' = A(a-a'\alpha)(a-a'\alpha')(a-a'\alpha'')\ldots(a-a'\beta)^2\ldots$$

la nostra formola diventerà

$$A'\left(x'+\frac{b-b'\alpha}{a-a'\alpha}y'\right)\left(x'+\frac{b-b'\alpha'}{a-a'\alpha'}y'\right)\ldots\left[\left(x'+\frac{b-b'\beta}{a-a'\beta}y'\right)^2+\left(\frac{a'x'+b'y'}{a-a'\beta}\right)^2\right].$$

ove la sola quantità $\frac{b-b'\alpha}{a-a'\alpha}$ è negativa, e le altre tutte

$b - b'\alpha'$

$\frac{b-b'\alpha'}{a-a'\alpha'}$, &c., $\frac{b-b'\beta}{a-a'\beta}$, &c. sono positive .

Questo metodo è generale per tutti i casi, e per mezzo di esso la data ſormola si potrà sempre trasformare nella seguente

$$A'(x'-\delta y)(x'+\delta' y')(x'+\delta'' y')\ldots\ (x'+\varepsilon y')^2+\zeta^2 y^2]\ldots .$$

ove le quantità δ, δ', δ'', &c. ε, &c. sono tutte positive, ed è

$$x'-\delta y'=\frac{x-\alpha y}{a-a'\alpha},\ x'+\delta' y'=\frac{x-\alpha' y}{a-a'\alpha'},\ \&c.,\ (x'+\varepsilon y')^2+\zeta^2 y^2=\frac{(x-\beta y)^2+\gamma^2 y^2}{(a-a'\beta)^2},\ \text{ec.}$$

Premessi questi principj si potrà adesso facilmente risolvere il problema, in cui si cerca il più piccolo valore in numeri interi della formola data. Sia essa in primo luogo del secondo grado, e risoluta ne' suoi fattori ci presenterà da considerare le tre forme seguenti

$$A[(x-\beta y)^2+\gamma^2 y^2]$$
$$A(x-\alpha y)(x+\alpha' y)$$
$$A(x-\alpha y)(x-\alpha' y)$$

secondo che i fattori sono immaginarj, o essendo reali le quantità α ed α' hanno il medesimo segno, o segni diversi .

Incominciando dalla prima siano p e q i valori di x ed y nel caso del minimo; la quantità $(p-\beta q)^2+\gamma^2 q^2$ sarà tale, che posti in luogo di p e di q de' numeri differenti, almeno fino ad un certo segno, essa acquisterà un valore maggiore . Ma se in luogo di p e di q porremo numeri un poco minori, il termine $\gamma^2 q^2$ riescirà minore; dunque converrà che divenga in tal caso maggiore la quantità $p-\beta q$.

Ciò posto io dico, che sarà $\frac{p}{q}$ una frazione convergente verso β; poichè se non lo fosse, siano $\frac{m}{n}$, $\frac{r}{s}$ quelle tali frazioni convergenti consecutive, nelle quali s è $> q$, ed $n < q$. E' noto dalla teoria delle frazioni continue, che facendo astrazione dai segni è $m-\beta n < p-\beta q$; dunque $(p-\beta q)^2+\gamma^2 q^2$ non sarebbe un minimo contro l' ipotesi .

Nel secondo caso, se x ed y hanno il medesimo segno, al-

allorchè la formola è minima, il fattore $x + \alpha' y$ sarà sempre minore, quando ad x ed y si danno valori più piccoli, e perciò dovrà essere in tal caso un minimo il fattore $x - \alpha y$; e quindi col discorso usato nel primo caso si proverà, che $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso α. Si vede egualmente, che quando x ed y hanno segni diversi, sarà nel caso del minimo $-\frac{x}{y}$ una frazione convergente verso α'.

Si trasformi la terza formola nella seguente

$$A'(x' - \delta y')\ (x' + \delta' y')$$

ed apparirà che, se nel caso del minimo x' ed y' hanno il medesimo segno, sarà un minimo il fattore $x' - \delta y' = \frac{x - \alpha y}{a - a'\alpha}$, cioè a motivo di $a - a'\alpha$ costante, sarà un minimo il fattore $x - \alpha y$, e quindi $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso α. Se poi x' ed y' hanno segni diversi, sarà un minimo il fattore $x' + \delta y' = \frac{x - \alpha' y}{a - a'\alpha'}$, cioè il fattore $x - \alpha' y$, e perciò $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso α'. Dunque nel caso del minimo $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso α o verso α'.

Se mai ad alcuno facesse difficoltà il passaggio dal fattore $x' - \delta y'$ al fattore $x - \alpha y$, potrà usare la seguente rigorosa dimostrazione. Se x' ed y' hanno nel caso del minimo il medesimo segno, è certo che sarà in tal caso $\frac{x'}{y'}$ una frazione convergente verso δ. Sia $\frac{r}{s}$ la frazione convergente, che precede $\frac{x'}{y'}$, e z il quoziente completo, che corrisponponde a questa, il quale sarà perciò >1; avremo $\delta = -\frac{b-b'\alpha}{a-a'\alpha} = \frac{x'z+r}{y'z+s}$. Quindi si deduce $\alpha = \frac{(ax'+by')z+ar+bs}{(a'x'+b'y')z+a'r+b's}$, e siccome $a'b - ab' = \pm 1$, ed $x's - ry' = \pm 1$, sarà ancora $(ax'+by')(a'r+b's) - (ar+bs)(a'x'+b'y') = \pm 1$. Onde a motivo di $z > 1$, sarà $\frac{ax'+by'}{a'x'+b'y'} = \frac{x}{y}$ una frazione convergente verso α. (Si veda Legendre *Essai sur la Théorie des nombres* a pag. 22., e seguenti.)

Se x' ed y' nel caso del minimo hanno segni diversi, $-\frac{x'}{y'}$ sarà certamente una frazione convergente verso δ', e se chiamiamo $-\frac{r}{s}$ la frazione, che precede quella, e z il quoziente completo corrispondente a $-\frac{x'}{y'}$, avremo $\delta' = \frac{b-b'\alpha'}{a-a'\alpha'} = -\frac{x'z+r}{y'z+s}$. Quindi si ricava $\alpha' = \frac{(ax'+by')z+ar+bs}{(a'x'+b'y')z+a'r+b's} = \frac{mz+n}{m'z+n'}$, se facciamo $ax'+by' = m$, $a'x'+b'y' = m'$, $ar+bs = n$, $a'r+b's = n'$. Ora, siccome possiamo prendere a piacere x' o y', r o s negative, prendiamole in modo, che siano m ed n positive. Ciò posto, io dico che saranno positive anche m' ed n'; perchè una di esse dev' essere necessariamente positiva, acciò ne risulti il valore di α' positivo, e se anche l' altra non fosse positiva, l' equazione $mn' - m'n = \pm 1$ non potrebbe sussistere. La medesima equazione ci avverte, che se m è $> n$, anche m' dev' essere maggiore di n'; onde nel caso di $m > n$, sarà $\frac{m}{m'}$ una frazione convergente verso α', ed $\frac{n}{n'}$ la frazione convergente, che la precede. Se $m < n$, ed in conseguenza $m' < n'$, sia cm il multiplo di m contenuto in n, e potremo dare ad α' la forma seguente $\alpha' = \frac{m(z+c)+n-cm}{m'(z+c)+n'-cm'}$; e siccome $m(n'-cm') - m'(n-cm) = \pm 1$, e perciò $n'-cm'$ positiva e $< m'$, sarà di nuovo $\frac{m}{m'}$ una frazione convergente verso α', ed $\frac{n-cm}{n'-cm'}$ quella, che la precede.

Passiamo alla formola del terzo grado

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3,$$

e consideriamo le tre diverse forme, che risoluta ne' di lei fattori può prendere

$$A(x-\alpha y)(x-\alpha' y)(x+\alpha'' y)$$
$$A(x-\alpha y)(x-\alpha' y)(x-\alpha'' y)$$
$$A(x-\alpha y)\left[(x-\beta y)^2+\gamma^2 y^2\right]$$

ove si omettono le altre, perchè o si riducono a queste presa y negativa, o non presentano difficoltà.

Riguardo alla prima, se nel caso del minimo x ed y hanno il medesimo segno, sarà un minimo la quantità $(x-\alpha y)(x-\alpha' y)$, e quindi, per ciò che abbiamo dimostrato di sopra, $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente o verso α o verso α'. Se x ed y hanno segni diversi, sarà un minimo il fattore $x+\alpha'' y$, e quindi $-\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso α''.

La seconda formola si trasforma nella seguente

$$A'(x'-\delta y')(x'+\delta' y')(x'+\delta'' y')$$

onde apparisce che, se x' ed y' hanno il medesimo segno, è un minimo il fattore $x'-\delta y'$, cioè $x-\alpha y$, ed $\frac{x}{y}$ è una frazione convergente verso α. Se poi x' ed y' hanno segni diversi, sarà un minimo la quantità $(x'+\delta' y')(x'+\delta'' y')$, cioè $(x-\alpha' y)(x'-\alpha'' y)$, e perciò $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso α' o verso α''.

Finalmente la terza formola diventa

$$A'(x'-\delta y')\left((x'+\varepsilon y')^2+\frac{\gamma^2}{(a-b\beta)^2}y^2\right)$$

e se nel caso del minimo x' ed y' hanno il medesimo segno, si vede che dovrà esser minima la quantità $x'-\delta y'$, cioè $x-\alpha y$; se poi x' ed y' hanno segni diversi, sarà un minimo la quantità $(x'+\varepsilon y')^2+\frac{\gamma^2}{(a-b\beta)^2}y^2$, o sia la quantità $(x-\beta y)^2+\gamma^2 y^2$. Onde $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso α o verso β.

Continuando il medesimo ragionamento vedremo in generale, che la funzione

$$Ax^n+Bx^{n-1}y+Cx^{n-2}y^2\ldots+Ny^n$$

otterrà il più piccolo valore in numeri interi, quando $\frac{x}{y}$ sarà una frazione convergente verso le radici reali, o verso le parti reali delle radici immaginarie della equazione

$$At^n+Bt^{n-1}+Ct^{n-2}\ldots\ldots+N=0,$$

avvertendo che si dovrà prendere x ed y col medesimo segno, o con segni diversi, secondo che le corrispondenti radici reali, o le parti reali delle radici immaginarie saranno positive o negative.

SUL PROBLEMA DEGLI APPOGGJ

Del medesimo

Ricevuta il dì 9. Luglio 1801.

Dopo la mia Memoria su di questo argomento pubblicata nel volume VI. della Società Italiana sono comparse alla luce tre altre Memorie sull' istesso soggetto, la prima delle quali è stata inserita nel Tomo VII. dal Sig. Cav. Lorgna, e delle altre due contenute nel Volume VIII. una appartiene al Sig. Delanges, che prima di me, cioè nel Tomo V., si era già occupato nella soluzione di questo Problema, e l' altra al Sig. Malfatti. La soluzione del Cav. Lorgna è appoggiata ad una ipotesi così capricciosa, che sembra impossibile sia per essere da alcuno abbracciata; onde si rende inutile qualunque esame di essa. Quella del Sig. Delanges formerà specialmente il soggetto delle mie riflessioni; poichè siccome essa contiene alcuni resultati, i quali sono affatto contrarj a quelli da me ottenuti e pubblicati nella mia Memoria, è certo che o Egli, o io ci siamo ingannati, ed io voglio tentare, se è possibile, di difendere le mie proposizioni. Questa discussione si rende facile ed evidente; perchè si tratta specialmente di un affare di calcolo, riducendosi quasi tutto a vedere, se io ho data una dimostrazione paralogistica, o se Egli si è ingannato in una prova particolare, con cui ha voluto confermare il resultato della sua soluzione, e farlo comparire diverso da quello, che avevo dimostrato dover essere.

Nella mia Memoria, in luogo di cercar le pressioni esercitate sopra i punti di appoggio da un corpo sostenuto sopra un piano immobile, avevo per più semplicità sostituite alle pressioni ne' punti di appoggio delle forze attive in senso contrario, e cercato l' equilibrio di un piano mobile spinto da una parte da queste forze attive, e dall' altra dal peso del corpo . Il Sig. Delanges convenendo meco sulla soluzione di quest' ultimo problema asserisce però, che esso è di una natura del tutto differente dal primo, il quale è sempre determinato, quando all' opposto il secondo non è determinato, che nel solo caso di tre forze, e queste non situate in diritto. Mi è molto facile di rispondere a ciò, che non ho io capricciosamente confuso un problema coll' altro, ma che sono stato autorizzato a farlo, dopo che il sommo Geometra Lagrange con la più evidente e rigorosa metafisica ha generalmente dimostrato nella sua Meccanica Analitica, che si potevano in ogni caso sostituire alle pressioni eguali forze attive in senso contrario, senza che ne venissero in alcun modo alterate le condizioni dell' equilibrio. Ed infatti, se applico il principio delle velocità virtuali al problema considerato nell' aspetto, in cui lo prende il Sig. Delanges, giungo a que' medesimi risultati, che ho ottenuti nella maniera contemplata da me .

Ma quello, che fa maraviglia, si è, che avendo trovato il Sig. Delanges le mie formole esser d' accordo con le sue nel caso di tre appoggj, neghi poi questo consenso nel caso di un maggior numero di appoggj, per esempio di quattro. Eppure, avendo io dimostrato, che si potevano assumere per assi di rotazione quei, che più piacevano, allorchè nel paragrafo VIII. della mia Memoria prendo quelli, che considera il Sig. Delanges, giungo nel caso di quattro appoggj alle medesime equazioni, che sono state da lui ottenute. Posto ciò, come mai può Egli accordare, che il problema è indeterminato nel mio senso, quando nel suo lo sostiene determinato? Io dichiarai il problema indeterminato, perchè dimostrai, che i moti di rotazione non potevano riferirsi, che a soli tre assi, e che l' equazione ottenuta dalla considerazione di un quarto asse era necessariamente compresa nelle altre tre. Il Sig. Delanges, siccome è nella persuasione, che abbiamo trattati due problemi diversi, in luogo di attaccare la mia dimostrazione, ha adesso voluto corroborare il suo sentimento calcolando un caso particolare di quattro appoggj, in cui risultano le pressioni dedotte dal suo metodo sotto una forma affatto determinata. Confesso, che sono stato per qualche tempo inquieto e dubbioso, poichè per una parte trovavo esatto il calcolo numerico del Sig. Delanges, per l' altra non incontravo alcuna difficoltà nella mia dimostrazione, la quale sapevo ancora essere stata approvata dal Sig. Malfatti. Finalmente per escir d' incertezza avendo ripresi da principio tutti i calcoli vidi, che era occorso uno sbaglio nelle formole generali date dal Sig. Delanges nella sua prima Memoria. Infatti trovai, che il denominatore comune ai valori delle quattro pressioni, invece di quello descritto nella citata Memoria, era il seguente

$(h\delta\omega + gp\lambda - lp\delta)m + (gh\gamma + ln\delta - gn\lambda)q + f\omega(n\lambda - h\gamma) + flp\gamma;$

e così pure sono diversi i numeratori, perchè quello per esempio, che corrisponde alla pressione sul punto A, si trova essere

$(dh\omega + cp\lambda - a\lambda\omega - dlp)\ m + (dln + ch\gamma - cn\lambda - al\gamma)q$
$b\omega(n\lambda - h\gamma) + blp\gamma.$

Avendo fatte le convenienti correzioni a tutte queste formole ho poi verificato, che non solo nel caso particolare contemplato dal Sig. Delanges, ma generalmente in tutti i casi i valori delle pressioni si riducono alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Ometto questo calcolo, perchè non ha altra difficoltà che la lunghezza, e non esige che un poco di diligenza nel ridurre a coseni di archi multipli i prodotti de' coseni, onde meglio comparisca l' estinzione dei varj termini.

Il problema, che è generalmente determinato nel caso di tre appoggj, cessa di esserlo, quando i tre appoggj sono situati in linea retta. Il Sig. Delanges però vorrebbe farlo comparire determinato nel problema V., il quale suppongo che si abbia avanti gli occhi insieme con la fig. IV., che vi ha relazione. Ma io non so, se i Geometri troveranno buone le ragioni, per le quali esclude dalla terza equazione il mo-

momento di rotazione dell' appoggio B; anzi mi sembra, che escludere questo momento sia lo stesso, che supporre in principio nulla la pressione in B. Poichè se questa pressione ha qualche valore, la di lei reazione sul vette AB deve necessariamente produrre un momento di rotazione, e qualora questo si trascuri, si viene a supporre ciò, che volevasi dimostrare, cioè che la pressione in B è nulla. Tutto ciò si oppone alla regola generale di sopra rammentata, per la quale alle pressioni si possono sostituire eguali forze attive in senso contrario.

Passiamo a dir qualche cosa della soluzione del Sig. Malfatti, la quale, per quanto contenga riflessioni molto acute, e calcoli assai pregevoli, mi sembra però che non oltrepassi di molto i confini di una ipotesi ingegnosa. Primieramente non so, se possa ammettersi senza prova quel sistema di vetti, col mezzo dei quali Egli determina le pressioni su i diversi punti di appoggio. Le leggi generali dell' equilibrio di qualunque sistema di corpi sono quelle, per le quali è impedito al sistema qualunque moto progressivo, o di rotazione, e da queste discende per corollario la regola dei vetti. Onde, quando esiste un dato sistema di vetti, è evidente che la Natura debba distribuire le sue pressioni secondo la legge di questi vetti. Ma allorchè questi vetti non esistono, il supporne un sistema, e immaginarsi che la Natura debba regolarsi nella distribuzione delle sue azioni, come se un tal sistema esistesse, è ciò che ha bisogno di dimostrazione. Infatti nella mia Memoria credei di dover provare, che combinava coll' equazioni generali dell' equilibrio lo ammettere quei vetti, che il Sig. Bossut supponeva nella sua soluzione.

In secondo luogo mi sembra, che il Sig. Malfatti abbia attribuito all' analogia infinitamente più di quello gli sia mai stato accordato. Per quanto in oggi si procuri di ottenere dimostrazioni generali e rigorose, pure in mancanza di esse non di rado succede, che dall' aver dimostrato, che la medesima legge regna costantemente in molti casi particolari, si deduce per induzione, che essa abbia luogo per tutti i casi, specialmente quando apparisca, che la dimostrazione usata per i casi contemplati possa applicarsi anche a ciascuno degli altri casi. Ma che da un solo caso dimostrato si deducano per analogia tutti gli altri, è questo un metodo di ragionare del tutto inusitato in Matematica, e di cattivo esempio, perchè potrebbe condurre a gravissimi errori. Infatti si osserva, che un caso solo di rado conduce a quella legge, che si cerca, la quale per lo più accade di rinvenire dal paragone di varj casi.

Tale è il metodo del Sig. Malfatti: avendo Egli dimostrato il valore delle pressioni nel caso di tre appoggj, a somiglianza di esse senza alcun'altra dimostrazione compone le funzioni, che rappresentano il valore delle pressioni nel caso di quattro, e più appoggj. Queste funzioni si riducono alle formole dimostrate, quando gli appoggj sono tre, e soddisfanno per altra parte ad alcune condizioni dedotte dal principio della ragione sufficiente. Ma è facile il comprendere, che la ricerca di queste funzioni è un problema indeterminato, e che se ne potrebbero formare infinite altre, le quali avessero le medesime proprietà, e soddisfacessero alle medesime condizioni. Ora per qual motivo se ne dovrà ammettere una forma a preferenza delle altre? Bisognerebbe, che il Sig. Malfatti adducesse almeno qualche ragione per escluderle tutte, fuorchè quella, che è stata da Lui adottata.

In conferma della indeterminazione di questo problema, io ne assegnerò una soluzione diversa da quella del Sig. Malfatti, alla quale giungo usando un discorso simile a quello tenuto da Lui. Osservo che nel caso di tre appoggj il numeratore della pressione sopra un appoggio è il prodotto delle due distanze dal peso agli altri appoggj moltiplicato nel seno dell'angolo da esse contenuto. Così per analogia posso pensare, che nel caso di quattro appoggj il numeratore della pressione sopra uno di essi contenga tutti gli ambi delle distanze dal peso agli altri appoggj, moltiplicati ciascuno nel seno dell' angolo da esse distanze formato . In tal caso , ritenute le denominazioni del Sig. Malfatti , le pressioni sarebbero così espresse :

$$\text{Pr. in A} = \frac{bc\,\text{sen.}l + cd\,\text{sen.}g + bd\,\text{sen.}(l+g)}{\text{S}}$$

$$\text{Pr. in E} = \frac{cd\,\text{sen.}g - ad\,\text{sen.}(i+l+g) - ac\,\text{sen.}(i+l)}{\text{S}}$$

$$\text{Pr. in F} = \frac{ab\,\text{sen.}i - ad\,\text{sen.}(i+l+g) - bd\,\text{sen.}(l+g)}{\text{S}}$$

$$\text{Pr. in C} = \frac{ab\,\text{sen.}i + bc\,\text{sen.}l + ac\,\text{sen.}(i+l)}{\text{S}}$$

essendo S la somma dei numeratori.

Ora io dico , che queste formole soddisfanno alle medesime condizioni , le quali si verificano in quelle del Sig. Malfatti . Per provarlo cada primieramente il punto F sul punto C ; sarà $d = c$, $g = 0$; sostituiti i quali valori avremo $\text{Pr. in F} + \text{Pr. in C} = \frac{2\,ab\,\text{sen.}i}{\text{S}}$, $\text{Pr. in A} = \frac{2\,bc\,\text{sen.}l}{\text{S}}$, $\text{Pr. in E} = \frac{-2\,ac\,\text{sen.}(i+l)}{\text{S}}$, che sono appunto le formole dimostrate per tre appoggj .

Passiamo a considerare il caso del bomisco facendo $d = a$, $c = b$, $g = i$, ed avremo

$$\text{Pr. in A} = \frac{b^2\,\text{sen.}l + ab\,\text{sen.}i + ab\,\text{sen.}(i+l)}{\text{S}}$$

$$\text{Pr. in E} = \frac{ab\,\text{sen.}i - ab\,\text{sen.}(i+l) - a^2\,\text{sen.}(2i+l)}{\text{S}}$$

$$\text{Pr. in F} = \frac{ab\,\text{sen.}i - a^2\,\text{sen.}(2i+l) - ab\,\text{sen.}(i+l)}{\text{S}}$$

$$\text{Pr. in C} = \frac{ab\,\text{sen.}i + b^2\,\text{sen.}l + ab\,\text{sen.}(i+l)}{\text{S}}$$

onde in primo luogo apparisce essere Pr. in A = Pr. in C , e Pr. in E = Pr. in F . Poi usando le medesime riduzioni , che adopra il Sig. Malfatti , troveremo

$$\text{Pr. in A} = \frac{b\cos.\frac{l}{2}\,[b\,\text{sen}.\frac{l}{2} + a\,\text{sen}.(i+\frac{l}{2})]}{2[b\,\text{sen}.\frac{l}{2} + a\,\text{sen}.(i+\frac{l}{2})][b\cos.\frac{l}{2} - a\cos.(i+\frac{l}{2})]}$$

$$\text{cioè Pr. in A} = \frac{b\cos.\frac{l}{2}}{2\,[b\cos.\frac{l}{2} - a\cos.(i+\frac{l}{2})]},$$

$$\text{Pr. in E} = \frac{-a\cos.(i+\frac{l}{2})}{2\,[b\cos.\frac{l}{2} - a\cos.(i+\frac{l}{2})]},$$ che sono i medesimi valori ottenuti da Lui. Le formole precedenti adunque, e quelle del Sig. Malfatti rappresentano con egual probabilità le leggi della Natura.

Del resto confesso, che per l'esame, che ne ho fatto, non ho trovato nelle di Lui formole alcuna contradizione con i principj ricevuti; onde potrebbe darsi che fossero esatte, e che fosse ad esso riescito d'indovinare il segreto della Natura: dico soltanto, che fin quì non vedo alcuna ragione, che me lo dimostri. E dopo i varj tentativi, che sono stati fatti per risolvere il problema degli appoggj mi confermo sempre più nella mia opinione; che, finchè non sarà scoperto qualche nuovo principio di Statica, quelli, che finora si conoscono, saranno insufficienti a determinare le pressioni sofferte da più di tre appoggj, a meno che non si unisca ad essi qualche particolare supposizione.

OSSERVAZIONI DI MERCURIO, E DI VENERE

di Vincenzo Chiminello

Riccvute il dì 12. *Luglio* 1801.

1793

	Appulso di Mercurio al Murale.	Differ. di Decl. del lembo sup. di Mercurio dal lembo sup. del Sole.
28 Luglio	1^h 43′ 52″,7 t. v.	8° 51′ 13″,5 A.
29	nubi	9 12 22 ,7
6 Agosto	1 41 12 ,6	11 28 46 ,6
7	1 40 1 ,4	11 39 42 ,8

Quindi le A. R.		Le declinaz.
	154° 7′ 6″,5	10° 16′ 34″,0 B.
	— — —	9 41 6 ,0
	162 10 10 ,3	5 20 20 ,0
	162 49 42 ,4	4 52 26 ,55

Dalla osservazione 28 Luglio proviene

la Long. geoc. appar. di Mercurio	5ˢ 2° 17′ 13″,7
la Latitudine	0 25 23 ,3 A.
Per le Tav. noviss. di la Lande	
Longitudine	5ˢ 2° 16′ 56″,8
Latitudine	0 25 33 ,4
error delle Tav. in long.	— 16 ,9
in lat.	+ 11 ,1

1795

	Appulso del lembo di Mercurio al Murale.	Diff. di Decl. del centro di Mercurio dal centro del Sole.
25 Giugno	1^h 49′ 54″,45 t. v.	2° 21′ 44″,15 A.
26	1 50 14 ,20	2 43 44 ,55
30	1 49 2 ,80	4 9 10 ,40
6 Luglio	1 39 34 ,10	5 58 2 ,90
7	1 37 2 ,00	6 12 28 ,30

Asc. R. posto il semid. di Mercurio 3",5	Declinazioni
121° 38' 45",7	21° 2' 54",55 B.
122 46 0 ,5	20 39 4 ,25
126 36 48 ,7	19 2 14 ,20
130 25 24 ,6	16 44 6 ,80
130 48 52 ,4	16 23 25 ,60

Long. geoc. di Merc. osser.	Long. calcol.	err. Tav.
3' 29° 19' 16",1	3' 29° 19' 10",2	— 5",9
4 0 25 44 ,6	4 0 25 22 ,1	— 22 ,5
4 4 19 7 ,1	4 4 18 51 ,8	— 15 ,3
4 8 24 4 ,9	4 8 23 59 ,1	— 5 ,8
4 8 51 16 ,1	4 8 50 59 ,8	— 16 ,3

Latit. geoc. oss.	Latit. calcol.	err. Tav.
0° 45' 3",5 B.	0° 45' 4",2	+ 0",7
0 35 6 ,1	0 35 3 ,8	— 2 ,3
0 10 2 ,1 A.	0 10 5 ,1	+ 3 ,0
1 29 44 ,9	1 29 57 ,7	+ 12 ,8
1 44 1 ,8	1 44 15 ,6	+ 13 ,8

Corrispond. Longit. del Sole per le Tavole	Elongazioni appar. di Mercurio
3' 3° 49' 28",1	0' 25° 29' 48".0
3 4 46 41 ,9	0 25 39 2 ,7
3 8 35 23 ,1	0 25 43 44 ,0
3 14 18 4 ,5	0 24 6 0 ,4
3 15 15 10 ,4	0 23 36 5 ,7

1796

	Appulso del centro di Mercurio al Murale.	Differ. di Declinaz. dal Sole.
10 Giugno	1^h 46' 3",6 t. v.	0° 33' 57",2 B.
11	1 45 40 ,0	0 13 26 ,9
16	1 38 59 ,8	1 28 15 ,9 A.
18	1 34 11 ,3	2 7 14 ,8

A. R.

A. R. concl. dal Sole .	Declinazioni .
105° 53′ 2″,8	23° 39′ 54″,2 B.
106 49 18 ,8	23 23 26 ,2
110 20 24 ,3	21 55 46 ,1
111 12 48 ,1	21 19 31 ,9

Long. geoc. osser.	Long. calcolate .	err. Tav.
3ˢ 14° 33′ 6″,6	3ˢ 14° 32′ 56″,2	— 10″,4
3 15 24 18 ,6	3 15 24 14 ,6	— 4 ,0
3 18 48 38 ,9	3 18 48 31 ,9	— 7 ,0
3 19 41 59 ,1	3 19 42 2 ,5	+ 3 ,4

Latit. osservate .	Latit. calcolate .	err. Tav.
0° 59′ 53″,4 B.	0° 59′ 48″,4	— 5″,0
0 49 18 ,6	0 49 8 ,1	— 10 ,5
0 12 55 ,7 A.	0 13 4 ,4	+ 8 ,7
0 41 55 ,1	0 41 48 ,7	— 6 ,4

1796

Appulso del lembo di Venere al Murale.			Dist. del centro del Sole, e di Venere dal vertice.	
25 Maggio	3^h 17′ 54″,7	t. v.	Sole	24° 16′ 6″,0
			Venere	21 15 36 ,8
29	3 17 48 ,7		Sole	23 37 19 ,0
			Venere	21 27 31 ,0
31	3 17 34 ,5		Sole	23 20 5 ,9
			Venere	21 52 21 ,6
1 Giugno	3 17 22 ,3		Sole	23 12 4 ,8
			Vencre	22 5 23 ,7
8	3 14 26 ,0		Sole	22 27 0 ,4
			Venere	23 47 22 ,0
30 Luglio	0 30 41 ,6		Venere	35 51 17 ,6
		dist. di γ	dell'Aquila	35 15 59 ,5
1 Agosto	0 11 51 ,5		Venere	35 51 43 ,4
			γ	35 15 59 ,5
3	23 59 1 ,0		γ	35 15 59 ,4
			Venere	nubi — —

5 Ago-

5 Agosto	App. di γ	10ʰ 30' 32"8 t.v.	Dist. di γ	35° 16' 0"8
	Venere	23 46 26 ,0	Venere	35 42 22 ,7
6	γ	10 26 44 ,0	γ	35 16 0 ,8
	Venere	23 40 10 ,4	Venere	35 38 13 ,0
7	γ	10 22 55 ,3	γ	35 15 56 ,0 d.
	Venere	23 34 33 ,0	Venere	35 33 42 ,9

Calcolo della Congiunzione inferiore.

A. R. di γ dell'Aquila dal Cat. di la Caille	294° 8' 46"4	Declin.	10° 7 43",3
Aberrazione	+ 18 ,6		+ 6 ,2
Nutazione	— 14 ,2		— 1 ,5
A. R. Apparente	294° 8' 50",8		10°7' 48",0
Semidiametro apparente di Venere 29";			
Quindi l'A. R. apparente di Venere 5 Ag.	133° 39' 20",3	la Decl.	9° 41'26",1 B.
6	133 2 12 ,8		9 45 35 ,8
Aberr. di A. R.	+ 17 ,4	di Decl.	— 6 ,3
Nutaz.	+ 16 ,0		— 3 ,5
Risultano le Long. geoc.	4' 13° 20'56",7	le Lat.	7° 26' 29",3A.
	4 12 43 49 ,0		7 31 11 ,3
Moto retrogrado	37 7, 7;	diretto	4 42 ,0

Long. del Sole nell' istante della osservazione di Venere 5. Agosto	4' 14° 34' 31",6
Longitudine di Venere	4 13 20 56 ,7
Distanza dalla congiunzione già trapassata	1 13 34 ,9
Movimento orario di Venere osservato	1 33 ,2
del Sole per le Tav.	2 23 ,8
Movimento composto	3 57 ,0

Risulta l'istante della cong. di Venere 5.Ag. 5^h 8′ 43″ t. vero
nel qual istante la long. geoc. di Venere

per il suo proprio moto	4^s 13° 49′ 52″,8
la latit. geoc.	7° 22′ 49″,5
ovvero la long. eliocentrica	10^s 13° 49′ 52″,8
latit. elioc.	2° 54′ 21″,7

Per le noviss. Tav. di la Lande

la long. elioc. calcolata	10^s 13° 50′ 0″,2
la latit. elioc.	2° 54′ 33″,5

L'errore dunque delle Tav. in long. + 7″,4
in latit. + 11″,8

ESEM-

ESEMPI
DELLA DIMETRIA - DIHYSTERIA

cioè di femmina che à doppia la vagina, e doppio l' utero:

DELLA PSEUDHERMAPHRODITIA - PSEUDAOSCHIA

o di uomo creduto Ermafrodito perchè in apparenza
mancavane lo scroto:

DELLA GENOMETABOLE

vale a dire trasmutazione (almeno apparente)
di femmina in maschio

Esposti in un Discorso di Vincenzo Malacarne

Ricevuto il dì 16. *Luglio* 1801.

I. È stato pubblicato come caso raro, eppur possibile l'incontro di due Vagine terminanti in una sola vulva costrutta all' ordinario: noi medesimi giudicammo in qualche nostra operetta data alla luce men raro trovar la vagina come divisa in due, ora longitudinalmente per notabil tratto dall' orifizio dell' uretra, o dalla fossetta naviculare in sù, ora in traverso, e ad altezze non determinate, sicchè quel canale resti come diviso in due seni, de' quali uno confina con la vulva, l' altro con il collo e l' orifizio inferiore dell' utero. Egli è però tanto raro il caso di due uteri, e due vagine di figura e struttura naturale, terminanti in una vulva sola, che mi sembra degna d' essere trasmessa a' posteri, e notificata agli ostetricanti, e a' naturalisti la serie delle osservazioncelle che ò potuto farvi sopra.

DI-

DIMETRA DIHYSTERA PIEMONTESE.

Il Dottore Gio. Domenico Majocchi Medico di San Giorgio in Lumellina, celebre per la felicità della sua clinica, e per diverse opere mediche, fisiologiche, e veterinarie date alla luce, presentò l'anno MDCCXCII., il mese d'Aprile, allo spedale di S. Mattèo di Pavia, *Angela Maria Mussani* del medesimo luogo di San Giorgio, pulcella d'età d'anni venti, bella di corporatura, di viso avvenente, affinchè ivi fosse curata d'un complesso di mali ostinatissimi, o fatti gli opportuni esami, e consulti, si stabilisse ciò, che si fosse potuto intraprendere per risanarla. Le sue malattie consistevano in catalepsi stravagantissima, in disuría, in perturbazioni nervose, che aveano tratto dolorosamente in consenso le parti genitali. La pulcella però era savia, e modesta, del che tanto il Medico, quanto chi la avea conosciuta, rendeano piena testimonianza. Avea dovuto sottomettersi alla esplorazione per riconoscer lo stato delle parti suddette acerbamente travagliate, nelle quali circostanze avendovi i Chirurghi ravvisato aperture, e callosità insolite, venni richiesto io, che insegnava pubblicamente l' Arte Ostetricia in quella celebre Università, di visitarla. Vi osservai:

I. *Due vagine* procedenti da una vulva sola ben formata nelle parti esteriori. Quelle erano paralelle in basso, e il combaciamento loro nel centro della vulva formava:

II. *Un tramezzo* diretto dalla commessura anteriore, fornita d' una sola Clitoride di grandezza, lunghezza, e figura ordinaria, e d' un sol orificio dell' uretra alla commessura posteriore, che conteneva nella Fossetta naviculare assai profonda.

III. Un robusto freno triangolare, di cui la base confinava col margine semilunare (sottilissimo, pellucido, in questa pulcella, come suol essere nelle vergini più caste) detto la Forchetta del Perinèo; e la punta finiva nel combaciamento suddetto (I.)

IV. L' *entrata* d' amendue le *vagine* era angusta sì, che il mio indice, ch' è di diametro minor di quattro linee parigine, vi penetrava a malo stento; e que'canali si andavano dilatando in alto, e sarebbero stati capaci della copula: erano rugosi in tutta la lor estensione.

V. Terminavano amendue separatamente intorno a'*colli* assai lunghi, sottili, conici in basso, *de'due uteri*, de'quali ò conosciuto palpabilmente, che il corrispondente alla *vagina destra* era situato naturalmente, cioè con le due faccie al pube, e al sacro, e co' lati veramente uno a destra, uno a sinistra, posto che la fessura indizio della bocca dell' utero aveva i labbri uno anteriore, l' altro posteriore.

VI. L' utero sinistro, forse perchè a ciò costretto dall' altro, si trovava alquanto più all' alto, e avendo le labbra della bocca uno a destra ed uno a sinistra, ne dedussi, che la faccia dell' utero che avrebbe dovuto esser anteriore, stava rivolta a destra, la posteriore a sinistra appoggiata più sensibilmente alla concavità dell' ilio sinistro.

VII. L' Esplorazione mi riesciva più agevole per la vagina sinistra, di modo che per insinuar l'indice nella vagina destra se ne dovea strisciar la punta fra il labbro della vulva, e la Ninfa di quel lato per una *fessura* irregolare, che per la sua robustezza sembrava callosa al margine più mobile, piegando il dito a foggia d'uncino, e così sollevar quel *tramezzo* molto spesso (II.), non senza che la pulcella dasse indizio di provar qualche molestia.

VIII. Nè senza ragione, perciocchè la mentovata *fessura* essendo stata presa fin allora per la bocca d' un seno fistuloso, era stata bersaglio di molti esami assai ruvidi, anche con istrumenti chirurgici, e sottoposta a varie incomode medicazioni.

Il rispetto dovuto al pudore, e alla squisita sensibilità di quella inferma, ci distolse da più minute ricerche intorno al-

alla disposizion di queste parti: e siccom' ella uscì dello spedale in istato assai miglior di salute, specialmente in risguardo al locale non più tanto tormentato fuor di proposito; così io aveva impegnato l' ingegnoso, e diligente Dott. Majocchi mio amico, medico della *Mussani*, ad informar il Pubblico di quello, che ne sarebbe avvenuto, qualunque condizione alla medesima avesse per l' avvenire toccato.

IX. Già di Matrici Doppie l' ò confessato, che non mancano esempj appresso de' Raccoglitori sia di cose ostetricie, sia di cose rare e stravaganti d' ogni specie; ma nissuno forse avrà potuto far sulla vivente quelle osservazioni a vantaggio della sanità delle Donne così prodigamente trattate dalla natura, che ò potuto far io, e a sollievo della *Mussani*: prescindendo pertanto dalle osservazioni antichissime di mille ottocensettantotto, di mille ottocentottanta, di mille novecenvensei anni fa conservateci da Giulio Obsequente, come altresì da Margarita Du Tertre De-la-Marche, maestra Levatrice all' *Hôtel-Dieu* di Parigi, accennate ma non circostanziate, potrà chiunque ne sarà curioso, riscontrarne le notizie che ne lasciarono il Littre del MDCCV., il Covger del MDCCXLIII; De-Tressan (1752); Gauthier d' Agoty, Boehmer, Eisenmann (1752); Acrell, Boeserfleisch, da cui sembra, ch' io lo stess' anno abbia tradotto, e pubblicato quant' egli stampò, tanto sono uniformi le cose nostre! Bagard, Haller, Marqvet, e Sue del 1770., Perrin del 1780., Sanyer Dv-Lac figlio, ed altri (1), affine d' assicurarsi, che que-

---

(1) Ved. Sue. Catalogo delle opere concernenti l' Arte Ostetricia. Vol 2.° Atti dell' Accad. R. delle Scienze di Parigi, anni 1705-43-52: pagg. 75, e 131. = Osservazioni di Storia Naturale 1752. Tom. II. Oss. 18. = Vandermonde. Giornale di Medicina, anni 1757-60 = Atti dell' Accad. delle Scienze di Svezia Vol. XXII. Trimestre IV. p. 303. = Atti dell' Accad. Elettorale di Magonza. Erford. Tom. II. p. 451. = Eisenmann. Tav. Anatom. Tav. IV. Boehmer, Osservaz. Anatom. rare, Fascicolo; all' Aja di Magdeburgo 1752-56. Marquet. Trattato pratico della Idropisia, e dell' Iterizia Oss. I., e II = De Haller. Osservazioni patologiche. Oss. LX. ec. ec.

questa specie di *Polimelìa Metatesiaca* (vale a dire di *Mostri per multiplicità, e trasposizione d' alcuni organi*) nelle parti genitali non è tanto rara, che debba considerarsi come *singolarità forse dal solo* Littre *osservata*, e dal Chiarissimo Signor Leopoldo Caldani collega nostro prestantissimo solamente sospettata in quell' *Ermafrodito Michel-Anna Douart*, di cui ànno scritto nel 1750 il Chirurgo Parigino Morand, il gran fisiologista svizzero De Haller, l' Inglese Arnaud nel 1768., e l' illustre anatomico di Parma Girardi nel 1781.

X. Giova quì ricordare, che il prelodato Cel. successore del Morgagni alla Cattedra Padovana d'anatomia, in quella lettera al Dott. Verardo Zeviani data Padova 20. Dicembre 1793, che si legge nel Vol. VII. delle Memorie della nostra SOCIETA' (Verona. Ramanzini. 1794. pag. 141.), propone un suo prudentissimo sospetto su quest' argomento scrivendo = E chi sa, che la tramezza, o il setto della vagina, ch' io vi scopersi, non divida esattamente questo canale in due (siccome in fatti era diviso sino a dove col dito si potea giungere) e che due non siano gli ureteri, fors' anco uniti fra di loro, ciascuno de' quali corrisponda all' intiera vagina dalla sua parte? =

XI. Con questa supposizione, e con le parole addotte il Professor oculatissimo di Padova si mostra alieno dall' opinione del Morand, che avea giudicato *Michel-Anna Douart* senza matrice, e va d' accordo con l' anatomico di Parma, il quale à dichiarato quel Mostro (1) di genere femminino. Parere, ch' io volentieri abbraccio in ordine al Mostro Douart.

XII. Nella medesima Lettera mi si parano davanti agli occhi diverse notizie intorno a un altro Mostro per nome *Scappato* a pagg. 147-151 del citato volume, che mi recano una grandissima compiacenza perchè le trovo affatto corrispondenti a ciò, ch' io avea registrato fin dalli 28. Aprile, e dalli 9. Maggio del 1779. in Acqui (città del Monferrato famosa per le sue Terme, alla Direzion delle quali io era preposto specialmente per gli infermi militari); e mi fo pregio di quì recarlo in conferma d' una mia proposizione più volte dimostrata vera al pubblico a forza d' esempj, ed è, che *la Natura nella produzione de' Mostri, cioè d' individui ora più ora meno differenti dal resto degli uomini, se umani, e dal resto delle bestie di quella Classe, di quella specie determinata, se bruti, tiene affatto le stesse regole, e prende le stesse misure nella disposizion de' germi e delle particelle loro, che suol tenere e prendere in quella de' germi de' corpi ordinarj, che comunemente si ànno in conto di meglio formati, con costanza, ed uniformità per lo più escludente l' effetto del caso*. Spero inoltre, che se ne diffonderà qualche raggio più chiaro di luce sopra la finora troppo ancor tenebrosa materia de' Mostri vulgarmente giudicati Ermafroditi.

---

(1) *De re anatomica oratio, quam die primâ Decembris MDCCLXXX. habuit Scholam auspicaturus* Michael Girardi &c. Parmæ. MDCCLXXXI. in ottavo pag. 28. & seqq. Tabb. II. & III.

PSEUDHERMAPHRODITO-PSEUDAOSCHEO MONFERRINO.

XIII. Michele P. . . S. . . di Rivalta di Bormia, provincia d' Acqui, compreso nel numero degli uomini *reclutati*, cioè destinati a render compiuto il Battaglione della soldatesca provinciale d' Acqui, fu da me dichiarato inabile agli esercizj militari perchè lo conobbi difettoso nella struttura esteriore delle parti genitali, affatto come sta espresso nella figura IV. della Tavola aggiunta dal Professor Caldani alla sua *Lettera*; se ne consideri il perinèo, il raffe, e lo spazio, che dovea corrispondere allo scroto: e tanto simile a quanto mostra la Tavola III. annessa all' *Orazione* del Professor Girardi alle Lettere *a a*, *b*, *ċ c*, G, che se avessi voluto rappresentar a puntino le deformità del mio Mostro non avrei potuto farlo meglio, che copiando quella Tavola.

XIV. Oltre a tali difetti aveva l' incontinenza cronica dell' orina, lo sgocciolio continuo della quale ne teneva abitualmente infiammato, e spesse volte scorticato l' interno d'amendue le cosce, e tutta la persona schifosa per lo fetore armoniacale, che n' esalava, a dispetto della pulizìa, che procurava d' avere.

XV. Chiamai a contemplar tale spettacolo il comandante di quella città e provincia, ch' era il Commendator *Tizzone* de' marchesi di Crescentino, Gentiluomo istrutto, e capace di valutarne la rarità: in fatti ne fu piacevolmente sorpreso, e soddisfatto della mia premura mi assicurò, che alcuni anni prima avea avuto la compiacenza di veder un altr' uomo se non affatto simile a questo almen pochissimo differente.

XVI. Cadde quel giovane per sua disgrazia infermo il giorno dopo della nostra visita, e morì gli otto di Maggio, nè si dubiterà del vivo mio desiderio di vederne con mio comodo il cadavero, che fu secondato dalla cortesia di chi potea darmene la permissione: sicchè con lo scalpello alla mano mi assicurai di quanto siegue.

XVII. Dalla punta della ghianda del pene, inferiormente, fino alla distanza d' un pollice e mezzo dall' ano per tutto il tratto percorso ordinariamente (dal freno del prepuzio al perinèo ne' maschi) dalla linea raffe, si allungava una *fessura* profonda come se mancasse la metà inferiore della periferìa del canal dell' uretra, e i margini di ciò che rimaneva affisso a' corpi cavernosi del pene per tutta la lunghezza loro eran callosi.

XVIII. Giunta questa *fessura* al sito in cui avrebbe cominciato al davanti la radice dello scroto, si rendea sempre più profonda, e i margini s' ingrossavano come i labbri della vulva femminile, diventavano assai più rossi, morbidi, rugosi, e permettevano all' indice mio d' insinuarsi in un *seno* scavato nell' interno del perinèo sotto l' arco del pube, pel tratto di due pollici.

XIX. Dall' arco medesimo *due striscie di pelle rossa* discenscendevano scostandosi la destra dalla sinistra verso il centro dello stretto inferiore del catino, formando una elissi coperta dalle false labbra ora descritte , le quali :

XX. Si congiungevano insieme confondendosene pel breve spazio di tre linee la sostanza per iscostarsi di nuovo procedendo indietro , e in basso . A tal adesione diedimo il nome d' *Istmo* .

XXI. Ivi formavano *uno sfondo ovale* , di cui la profondità (o dicasi meglio l' altezza) non minore di due pollici e mezzo , era diretta verso l' intestin retto , e lasciava nell' interno del perinèo posteriormente *una fossa naviculare rugosa* , e piena di *sego* d' una consistenza , e d' un fetor simile alla materia biancastra solita di scaturire dalle glandule odorate fra 'l prepuzio , e la ghianda .

XXII. Le descritte *due cavità* non comunicavano insieme , e tanto il dito , quanto le tente ottuse rette , e curve , impiegate per esplorarne *i fondi* , e il tramezzo, si arrestavano all' altezza di tre pollici , poco meno , e si sentivano piene di *rugosità traversali* :

XXIII. La *cavità posteriore* (XX. , e XXI.) era affatto cieca in alto , e servia d' appoggio all' intestino retto col suo pariete posteriore : e certe irregolarità , ed elevazioncelle , che il dito vi sentìa nel margine posteriore , specialmente verso i lati , e che fra le spugnosità di tali parti sembravano idatidi susseguentisi le une alle altre di dietro innanzi : veddimo poi , ch' erano fatte dalle *vescichette spermatiche* .

XXIV. Il *confluente* , e i *condotti ejaculatori* di queste *vescichette* si trovavano fra i falsi labbri (XVIII.) e le striscie rosse (XIX.) nella faccia anteriore dell' *Istmo* (XX.)

XXV. Nel fondo della *fessura anteriore* (XVIII.) tanto la punta dell' indice , quanto il catetere di cui ci serviamo per estrarre l' orina alle donne , incontravano un risalto angolare al basso , divergente co' suoi lati callosi in alto e indietro : questo era l' *orificio del brevissimo collo della vescica* , *ca*, nascosto dietro l' arco del pube: di fatti il catetere vi si muovea dentro con libertà, e n' estraeva l' orina.

XXVI. Tutto l' esterno del pudendo era coperto di peli assai men folti verso il perinèo, e affatto mancanti all' ano.

XXVII. Sparato il cadavero, esaminando le parti inferiori dell' abdomine fui piacevolmente sorpreso al vedere, che tutta la serie delle mostruosità fin quì descritte dipendeva dalla *salita*, dal *rovesciamento*, dall' *inarcamento dello scroto nella cavità del Catino* su per lo stretto inferior del medesimo, e dalla mancanza di quella porzion longitudinale del canale dell' uretra, che corrisponde al raffe, dal freno del prepuzio al collo della vescica (XVII.)

XXVIII. Dietro alla vescica, in faccia all' intestino retto nel fondo della escavazion del catino, sotto il peritonèo, s' innalzava *un corpo spongioso, globoso, un po' appiattito a' lati* come un fico schiacciato, ch' era *la sostanza interna dello scroto*, assai più bianca, più molle, e diversa per la figura dalla matrice.

XXIX. A' fianchi di questo *corpo spugnoso* si trovavano *i testicoli* assai minori dell' ordinario in uomini dell' età e della corporatura del nostro *Michele*, con l' epididimo loro bislungo, molto duro. Erano connessi con lo *scroto rovesciato e saliente*, per via di cellulosa molto rara, però avvalorata da *una produzione angolare del peritonèo*, che si confondeva con le sostanze dell' epididimo, e del testicolo d' amendue i lati inestricabilmente.

XXX. Le *vescichette spermatiche* sarebbono state prese da qualche anatomico incauto per le trombe faloppiane cieche, prive delle solite frangie, perch' erano flessuose, e sostenute da due lembi fluttuanti del peritonèo; si rendevano aderenti al sacco rovesciato, e scorrendovi accanto (appunto come scorrono accanto alla vescica urinaria nella figura della nostra *dissertazione sugli organi uropoietici* pubblicata nel Vol. VIII. delle *Memorie* di questa nostra SOCIETA') e immergendosi in fondo al catino, veniano col *canal deferente brevissimo* di cadaun lato a confondersi nell' *Istmo* (XX-XXIV.) alla faccia anteriore del quale si aprivano per mezzo de' *condotti ejaculatori* (XXIV.)

XXXI. Questi *condotti* facevano un non breve tragitto negli *orli anteriori interni dell' Istmo*, che in questo soggetto era *un mostruoso scostamento del verumontano, e una mostruosa dilatazion del seno* da noi prima che da verun altro nella citata *dissertazione* in tutte le sue parti, e negli usi suoi descritto, solito vedersi da chi lo sa cercare in quella protuberanza, che dicesi pure *capo di gallinagine*, e *grano ordeaceo*, appoggiata d' ordinario sulla *prostata*, della quale nel cadavero di *Michele* non si à trovato indizio veruno.

XXXII. La singolarità di questa struttura, e disposizion di parti nel cadavero, di cui favelliamo, fece nascer in me l' idea di provare se mai si fosse ancor potuto dar allo *scroto* (XXVII.-XXVIII.) la situazione consueta, e restituire *le apparenze della virilità* al cadavero d' un uomo, ch' era stato spacciato per *Ermafrodito*.

GENOMETABOLE ARTIFICIALE.

XXXIII. Cominciai pertanto a spaccar l' *Istmo* (XX.-XXIV.-XXX.) affinchè le due *fessure* (XVII. e segg.) venissero ridotte a una sola: votai l' intestino retto e la vescica di tutto ciò, che contenevano: compressi fortemente, e gradatamente la convessità più elevata nel catino del *globo spongioso* (XXVII.-XXVIII.) in giù, ed ebbi la soddisfazione di veder a poco a poco dilatati i labbri della gran *fessura*, e il centro della volta fatta dallo *scroto rovesciato* a discendere.

XXXIV. Questa discendendo si trasse dietro, e abbasso i testicoli, e si ridusse finalmente alla foggia d' un vero scroto pendente, rugoso, ma spogliato della cuticula ne' siti corrispondenti al taglio ch' io avea fatto dell' *Istmo*, e di color simile a quello della faccia interior delle labbra, coperto di molle epitelio, ed aperto al davanti sotto l' arco del pube (XVIII.-XIX.) per tutto quel tratto dove mancava il pariete inferiore dell' uretra (XVII.-XVIII.)

XXXV. Ecco in qual maniera il caso, e la curiosità mi condussero al segno di poter imitare con l' artificio quello, che parecchie volte à fatto la natura col progresso del tempo in alcuni maschj, de' quali si trovavan le parti virili nascoste nel catino, ed essendo quegli individui giudicati femmine, succedette questa specie di metamorfosi quasi prodigiosamente spuntando fuori del corpo le insegne mascoline, il che diede a credere altrui che tali individui fossero passati da un sesso all' altro.

XXXVI. Basta scorrer con l' occhio per le raccolte de' casi rari pubblicate da gravi osservatori, e noi italiani prendere fra le mani le faticose utilissime opere di Domizio Brusoni (1), e del Piemontese Simone Majolo (2) per essere convinti della verità, e della non tanta verità di simili trasformazioni. Il solo Schenckio nel Libro IV. del suo *Paratiriseon* ne rammenta ventotto in diversi tempi, e paesi accadute, delle quali non citeremo i mallevadori per evitar la pompa d' una vana erudizione. Il qual riguardo però non ci vieta che rechiamo quì una stravagante in apparenza, e pur vera proposizione del brillante medico e chirurgo piemontese Jacopo Vercellone da Asti, non poco a proposito del nostro argomento, ed è *Foeminam esse masculum inversum: scrotumque masculi fieri uterum intus conversum: primordia*
„ pe-

---

(1) L. Domitii Brusonii Contursini Lucani Facetiarum, Exemplorumqve libri VII. in fol.

Impressum Romæ per Jacobum Mazochium Romanæ Academiæ Bibliopolam XV. Kal. Sept. 1518.

(2) Dies Caniculares, hoc est Colloquia XXIII. concinnata per Simonem Majolum Astensem Episcopum Vulturariensem &c. in quarto Vol. I. II. III. Moguntiæ apud Jo. Theobaldum Schönwetter. 1650. Vide colloq. III. Vol. I. pag. 65. & seqq. art. *Foeminarum in mares mutatio.*

,, *penis esse clitoridem: præputium interius vaginam simulare.* (1)

XXXVII. Questo caso dalla nostra descrizione, ugualmente che dall' attento esame delle *Storie de' Mostri, degli Ermafroditi*, e delle *trasformazioni improvvise* quà e là pubblicate si rende secondo il nostro sistema, e la proposizion del Vercellone, che sembra aver subodorato lo stess'oggetto, si rende facile a spiegare, come dà luogo a sospettare, che la mostruosità dello *Scappato* (XII.) non si sarebb' egli potuta riferire a questa specie? Il nostro *Michele* aveva l'*Istmo* nel mezzo dello spazio tra l'arco del pube, e l' ano: così pur lo *Scappato* . Simile *Istmo* sarà sempre di qualche ostacolo alla trasformazione, proporzionato alla spessezza, e alla robustezza del medesimo: ma l' *Istmo* non è stato osservato in tutti i *Mostri* simili . E poi? Un tal ostacolo non è insuperabile quando gli sforzi violenti, e le distrazioni posson lacerare appunto quelle picciole adesioni, ch' io divisi con lo strumento in *Michele*.

XXXVIII. Non è neppure costante in questa specie di *Mostri* il difetto del pariete inferiore dell'uretra (XVII.-XVIII.): egli è però assai frequente a tenor di quanto a me occorse di osservare . Nel nostro caso se quel difetto s' inoltra molto profondamente, riescirà tanto men atto alla propagazion della specie quell' individuo, anche a dispetto dell' accaduta trasformazione .

XXXIX. Ci asterremo volentieri dal ricercare se per avventura nel *Mostro Douart* concorressero circostanze visibili, e palpabili, che lo potessero richiamar alla medesima classe in cui ò dovuto collocar l' *Aquese :* però quanto più si considera diligentemente quel, che ne pubblicarono i Chiariss. Leop: Caldani, Mich. Girardi, e Morand, tanto maggior analogia si va scuoprendo fra di loro; della quale non essendo questo

---

(1) Jacobi Vercelloni Pedemontani Phil. & Med. Doctoris De pudendorum morbis, et Lue venereâ Tetrabiblion. Astæ MDCCXV. apud Jo. Bapt. De Zangrandis, in quarto. Vide Lib. I. Cap. III. *de Mentulagrâ* p. 60.

luogo da stenderne i capi principali, ne lascierem la disquisizion più minuta a chiunque vi troverà il proprio interesse; perciocchè a noi può bastar per ora d' aver indicati i fonti da' quali è facile attignergli, e d' aver aperto una via facile, anzi infallibile per ispiegar un fenomeno, che se da scrittori poco filosofi è stato per l' addietro considerato come un prodigio, reca stupore, che dall' eruditissimo GIROLAMO MERCURIALE, che pur era e filosofo acuto, e medico pratico, e anatomico sperimentato oltre ad esser colto, ed erudito scrittore, venne considerato nelle sue VARIE LEZIONI (1) poco meglio di una fola, un sogno, una chimera.

XL. Una verità importante, per ultimo, di cui venn' in cognizione esaminando lo *scroto rovesciato* del supposto *Ermafrodito Aquese*, si è, che la tessitura di quest' organo è intieramente simile a quella della vagina femminile, tanto in ciò che v' à di carnoso, quanto ne' cancelli semitendinosi, che ne limitan le rugosità mentre che si agevola e della vagina, e dello scroto il corrugamento. Vale a dire oltre al *Dartos* è dimostrato altrove, (2) che la stessa cuticula, e la medesima cute, che nel maschio s' allungano giù dall' arco del pube, dagl' ischj, e dal perinèo per cuoprire contener, e custodire i testicoli, le stesse cuticula, e cute nella femmina si ripiegano su per lo centro del catino dallo stretto inferiore, e specialmente dallo spazio triangolare lasciato dalla sinfisi del pube alle tuberosità degl' ischj, e vengono a metter capo non già nella sola faccia esterna della circonferenza del collo dell' utero, dopo d' aver formato la vagina; ma ripiegatesi sulle labbra, e sugli orli dell' orificio inferior dell utero stesso, prolunganſi nella cavità, la tappezzan tutta, rieſcono più morbide a miſura che più ſi ſcoſtan dall' impreſsione dell'aria, e dalla ruvida fregagion de' corpi ſtranieri tendenti a renderle quì più dure, là calloſe; altrove fioccoſe, lanuginoſe ſecondo che da ſoſtanze mucoſe, o ſebacee vengono più coſtantemente lubricate, inumidite; e che vaſi quì maggiori, là minori di diametro, di numero, di diramazioni le percorrono, ſe ne elevano, le fregiano. Ricorderò ſoltanto la prova di queſta verità recata da me (1) con l' oſſervazione, che abbiam fatta inſieme il valoroſo amico mio Lorenzino Fabris Padovano, Chirurgo-Raccoglitore di gran merito, nella ſerva de' Signori Allegri, che abitano a S. Agata, nella quale la vagina uſcita affatto dal catino per la vulva ab antico, intieramente otturata là dove una volta ſi dovea trovare il collo dell' utero, rappreſentava in tutti gli aſpetti per tutti i riguardi così bene lo ſcroto virile, che ſe foſſe quella donna ſtata fornita di clitoride un po' più lunga e groſſa, ſarebbe ſtata da chi men diligentemente l' aveſſe eſaminata, preſa per un vero maſchio; come accadde intorno a una bambina di nobile caſato, che negletta dalla nutrice, e trovata con ſimile difetto in età di ſedici meſi, viſitata ſuperficialmente da un chirurgo di villa, fu in procinto di eſſere come maſchio ribattezzata.

---

(1) HIERON. MERC. *Variarum Lectionum in Medicinæ scriptoribus, & aliis Libri sex &c. Venetiis apud Juntas. MDLXXXVIII. in quarto Vid. Lib. VI Cap. XX Homines Lupos, & ex foeminis mares fieri quomodo verum sit. Folio* 129.

(2) Lezione Accademica prima dell' esistenza di varj sistemi nell' Economia Animale ec. Vedi Commentarj Medici di LUIGI VALERIANO BRERA Deca I. Tom. II.

Conchiuderò il preſente diſcorſo ripetendo non eſſer da ſtupirſi, che di queſta verità non ſiaſi fatto parola da veruno prima di noi, e che non ſe ne ſia tratto corollario glorioſo per la notomia, luminoſo per la fiſiologia, utile per la medicina clinica, e per la chirurgia, poſto che l' aſpetto differente che la cuticula e la cute ànno ne' ſiti umidi, lontani dall' aria, e dalle fregagioni à potuto di leggieri far credere, che ſiano ſoſtanze diverſe le differenti porzioni e ſituazioni delle medeſime ſoſtanze.

VIAG-

---

(1) Ved. Commentarj Medici di L. V. Brera. Pavia 1791. Dec. I. Tom. II. Lezione Accademica *Della Hiſteroſteni Grocoritomìa*.

VIAGGIO GEOLOGICO

PER DIVERSE PARTI MERIDIONALI DELL' ITALIA ESPOSTO IN LETTERE

Di Ermenegildo Pini

Ricevuto il dì 29. Luglio 1801.

LETTERA PRIMA.

Amico

Modena 10. *Luglio* 1792.

FU per me assai lusingante l' onore, che voi mi faceste, richiedendomi che io vi tenessi successivamente ragguagliato delle osservazioni geologiche, che io avrei fatte nel viaggio, che ho intrapreso verso le parti meridionali dell' Italia. Con ciò voi deste anticipatamente una importanza al mio viaggio, ed alla Geologia stessa. Ma nello stesso tempo io mi sono trovato in non piccolo imbarazzo temendo che nè questa Scienza, nè l' esposizione degli oggetti di essa proprii fosse per corrispondere alla vostra aspettazione. Come mai, diceva io tra me stesso, voi che siete avvezzo ad occuparvi ne' più importanti affari, e che a quelli trovate alleviamento nell' amenità delle belle Lettere potrete essere trattenuto da una Scienza, che ha tutte le apparenze di aridità, e di grettezza? O come potrà questa essere ingentilita da me, che ora mai non più so trovare il bello se non nell' orrore delle montagne? La Geologia nacque già non ha molto tra le irrisioni anche de' pastori. Il veder comparire alle alpestri loro Capanne persone colte, che si andavano arrampicando sulle più aride cime, verso le quali non mai essi spinsero neppure i lo-

loro più parchi armenti; il vederle sdrucciolare su ripidissime pendenze per osservare quelle dirupate pendici, che di mal occhi essi riguardano, come quelle che minacciano la devastazione ai loro sottoposti pascoli; il vederle giugnere alle più alte cime per farvi bollire una pentola d'acqua, e poi non riuscire neppure ad accendervi fuoco, erano per essi altrettanti oggetti di una ridente maraviglia. Ed è bensì vero, che troppo superiori alla semplicità pastorale erano le viste del Geologo, siccome quelle che erano dirette a riconoscere l' interna struttura de' monti, la diversità delle loro materie componenti, la loro altezza, e relativa situazione, e la mutua influenza degli Elementi, per rintracciare quindi la cagione delle rivoluzioni intervenute al globo terrestre, e congetturare sullo stato futuro del medesimo. Comunque però sieno per lui importanti le accennate osservazioni, per altri la lettura delle medesime non sembra poter essere più interessante di quel che i giornali dei Naviganti lo sieno per un sedentario abitatore di terra ferma.

Io non mi trovo ancora al momento di darvi prova della mia inabilità a superare le difficoltà, in cui fui gettato dai favorevoli vostri sentimenti verso di me; perciocchè finora non ho trascorse che le pianure da Milano a Modena, nelle quali l' Agricoltura ha sottratta alla Geologia ogni materia di osservazione. Solo nelle pianure ho potuto riconoscere la qualità delle materie, d' onde sono composte molte montagne, quelle cioè da cui discendono il Taro, la Secchia, il Panaro, ed altri Fiumi o torrenti che scorrono per quel tratto insubrico. I sassi rotolati giacenti nel loro alveo, essendo o calcarei, o arenarj, mostrano che di simile natura sono le montagne d' onde viaggiarono portati dalle acque.

Non avendo finora osservazioni da registrare mi trattengo in pensieri sugli usi, che quelle devono avere. Il mio principale scopo è di riconoscere le rivoluzioni intervenute al globo terrestre, massime per l'azione delle acque, il quale scopo io già vi accennai, allora che presi da voi congedo, do, ed allora argutamente m' interpellaste, se non mi sembravano oggetti sufficienti di osservazione le rivoluzioni, che attualmente andavano intervenendo. Queste, a cui Voi alludevate, erano certamente di un genere molto diverso da quelle, che io avea in vista, pure mi risvegliarono nella mente certi rapporti di connessione tra le une, e le altre. Certamente le principali rivoluzioni Fisiche, che per l' uomo ebbero ragion di mali, dovettero aver avuto occasione da antecedente sconcerto morale, come le rivoluzioni stesse mal osservate, e peggio interpretate contribuirono non poco a produrre variazioni morali. Si videro alcuni monti composti di lave e di natura vulcanica, e tosto da altri si concluse, che tutta la terra fu in fusione, per cui fu ridotta in vetro. Osservaronsi in altre montagne diversi ammassi di Conchiglie, e di altri corpi marini; e non si dubitò di asserire che tutta la terra ferma fu fondo di un mare permanente, e che tutta la materia calcarea provenne dai residui di corpi marini disfatti. Si suppose quindi, che la terra fosse un pezzo di Sole ardente, che ne fu staccato per l' urto di una Cometa, e che si andò successivamente raffreddando. Si calcolò il tempo necessario a raffreddarsi in modo che si potesse impunemente toccare, e vi si assegnarono 35000. anni. Si volle pure computare quanti anni la presente terra ferma rimase sotto le acque, e si ridussero a 25000. Formando finalmente altre simili epoche, si disse nell'anno 1743., che la terra sussisteva già da 75000. anni, e che dopo altri 93000. doveva divenire così fredda, che sarebbe con essa gelata la natura vivente. Al calore si attribuì una forza fecondatrice di certi immaginati germi, o anzi creatrice de' corpi organizzati, e secondo la diversa temperatura più mite, che la terra andava acquistando, si fecero da essa spuntare le diverse specie di Animali, e di piante in epoche molto anteriori a quelle, in cui si fa comparire l' uomo per prenderne il dominio.

Se questi, ed altri pensieri fossero stati prodotti come materia di un poema, non avrebbero forse avuta veruna in-

influenza sul cangiamento de' principj morali. Le favole, quando sono prodotte come tali, possono aver corso senza pregiudizio del vero, e le poesie mantengono l'uomo in buon umore, sì che lo fanno dimenticare talora anche di qualche trista situazione, che gli potrebbe far desiderare cangiamento. Ma quelle favole furono prodotte con tutta l' aria di serietà. Si disse, che erano fatti riconosciuti negli archivj del mondo, e verificati dai residui monumenti di natura, che in oltre le epoche della natura erano non solo più antiche, ma anche più autentiche delle storiche; che finalmente nissuno poteva ricusare di ammetterle se non chi ricusasse di vedere, e ragionare. Così dunque con quelle favolose immaginazioni si fecero passare per favole le più antiche, ed accreditate istorie, che ci espongono le epoche della creazione del mondo, l' origine dell' uomo, e quella straordinaria inondazione, dalla quale fu rovesciata la di lui abitazione; e tolto così il credito a questi fatti depositati nelle Storie Sacre, furono queste stesse dispregiate anche per rapporto ad altri principj da esse attestati, i quali servono a contenere l' uomo in certi doveri. Vi fu quindi sostituita la licenza di pensare sotto lo specioso nome di Filosofia, la quale fu introdotta nella familiarità del popolo non già colle sembianze di augusta matrona, che colla severità de' consiglj avesse ad esser compagna, e guida della ragione, ma bensì in abito di licenziosa baccante, di cui molti abusarono, divenendo pazzi ragionatori, e dispregiatori di ogni autorità fuori di quella, che essi a se medesimi attribuirono.

Dalle specolazioni adunque sulla fisica costituzione della terra presero altri materia per indurre ne' principj anche morali un cangiamento, che fu un peggioramento: il che potrebbe formare un demerito per la Geologia, se quelli che così di essa abusarono fossero stati Geologi. Eglino però non erano niente meno che tali. Geologo certamente, per lasciar di altri non fu il gran fabbricatore delle epoche di natura *il Conte di Buffon*, tuttochè si esprima in modo da far credere, che egli abbia svolti gli archivj del mondo, e tratti dalle viscere della terra i diplomi di natura. Egli non viaggiò che sulle carte geografiche, nè osservò se non cogli occhi altrui, e così ebbe la disgrazia di appoggiarsi a monumenti o apocrifi, o mal intesi. Per lo che la sublimità del suo stile non potrà render leggibile questa sua nuova Diplomatica, se non a chi si accontenta del numero, e del suono delle parole, sì che essa nelle ben ordinate Biblioteche dovrà riporsi nella classe de' libri di belle Lettere, anzichè in quelle de' Filosofici.

Esaminando le accennate Teorie chiaro appare, che quelle furono opera o di ragionatori senza osservazioni, o di osservatori senza ragionamento. Nè è maraviglia. Allora la Geologia era appena nascente, nè ancora erano comparsi gli *Arduini*, i *Saussure*, i *De Luc*, i *Dolomieu*, i *Pallas*, ed altri assai, dopo le fatiche de' quali questa Scienza è in istato di escludere gli errori da altri introdotti, e di conciliare le epoche storiche con quelle di natura, e così di ristabilire, o confermare que' principj, che contribuiscono a togliere, o a prevenire anche le depravazioni morali. Io già tentai di rettificare le osservazioni altrui, proposi parimenti una Teoria della terra, e presi a spiegare le fisiche rivoluzioni intervenutevi: nel che ebbi la compiacenza di vedere, che quanto io appoggiato alle osservazioni dedussi sulla prima origine della terra, e sulle rivoluzioni in essa dappoi intervenute per l'azione delle acque, concorda mirabilmente colle semplici, ma espressive narrazioni depositate nella Storia Mosaica. Io non temerei di essermi fatta illusione a me medesimo, quando le pruove Fisiche da me arrecate sull' originaria fluidità della terra, sulla separazione delle acque dalle materie solide, e sulla generale straordinaria, e breve inondazione che mutò la faccia dell' abitazione dell' uomo, fossero da voi riguardate come concludenti. In ogni modo mi lusingo, che esse saranno almeno riputate sufficienti per escludere le immaginarie Teorie, che da altri furono prodotte; ed essendo do così, voi potrete nella Geologia riconoscere un non piccolo pregio. Che se vi sembrasse, che la Geologia troppo tardi appresti i rimedj, e che in quella altronde rimangono per anco molte dubbiezze, io vi pregherei a richiamarvi alla mente, essere questo il fato comune a tutte le Teorie Fisiche, che cominciano per errori, proseguono per controversie, e si mantengono in gran parte per opinioni, ma in fine dal conflitto delle quistioni risultano molte verità, o almeno viene impedita una maggiore propagazione di errori.

Sulla lusinga, che colle osservazioni Geologiche io possa conseguire alcuno degli indicati fini, io dopo di avere in altri tempi esaminata una parte delle più elevate Alpi, le vado ora continuando per altri monti, i quali se non mi presenteranno tante ricchezze mineralogiche quante ne trovai alle Alpi, mi forniranno certamente oggetti non meno importanti per altri rapporti. Io nel mentre che mi trovo ancora alla pianura insignificante per un Geologo, m' immagino di essere già alle più elevate cime degli Appennini, ove quasi dominando la natura, avrò al disotto di me dall'una parte la prospettiva di vasti Continenti circondati da mari immensi, e dall' altra vedrò sorgere la bianca catena delle ghiacciate Alpi.

Di la io riconoscerò come il mare stesso si piaccia di venire a far permanente soggiorno sui monti, ed alzarvi nuove montagne, ed a fermarvi la diffluenza di altre. Questo mi sarà enunciato da que' ghiaccj alpini, che dalle acque marine in vapori alzatesi, e pel freddo consolidatesi vi formano nuove prominenze, e rivestendo di solido ghiaccio le già esistenti, le sottraggono all' azione distruggitrice delle piogge, e dei venti.

Mi farà allora piacere il considerare come il Mare venga così condotto ai monti per un fine non dissimile da quello, per cui io vi ascendo, cioè per esser utile all' uomo. Vi sta in fatti quel mare ghiacciato per liquefarsi poc' a poco, e così nutrire i fonti non solo nelle più arse estati, ma anche nei più gelidi inverni; e dopo di avere formati colle acque più pure diversi zampilli per refrigerare l'Abitatore dei monti, e lo stanco indagatore della natura, scende per sotterranee vie sino alle più basse pianure per abbeverare le popolose Società. Di colà parimenti versa torrenti di più copiose acque, che giunte al piano parte sono dall'avido Agricoltore dirette ad inaffiare i suoi campi, parte vanno a render navigabili i fiumi, pei quali il commercio da ogni parte comodamente circola tra il gelato Groenlando, e l'arso Ottentoto, tra l'antico, e 'l nuovo Emisfero. Intorno a quell' alpestre mare vanno pure nella calda stagione a rinfrescarsi i Zeffiri, d'onde scendono più rapidi a rinfrescare le basse pianure.

Vorrei allora, che colà giugnesse qualche entusiasta seguace dell' epoche Buffoniane. Egli al vedere que' ghiaccj non mancherebbe di richiamarmi alla considerazione del loro successivo aumento, e di conchiudere quindi, che alla fine il mare tutto verrà ad agghiacciarsi ai monti, sì che la terra, che già secondo il suo pensamento cominciò dall' esser un globo infuocato avrà a terminare gelando insieme coll'uomo. Io gli direi allora: guarda questo Barometro che ci dice a quale altezza noi siamo. Noi la conosciamo dall' abbassamento del mercurio, il quale ci fa sapere, che sul nostro capo soprasta un' aria meno elevata, e più rara di quella, che alle pianure si fa sentire. L'aria pertanto ad altezze maggiori sarà tanto rara, che non più potrà sostenere vapori in tanta copia da potersi condensare in acqua o liquida, o ghiacciata; si opporrà dunque l'aria ai progressi degli agghiacciamenti, cioè a dire i ghiaccj avranno i loro limiti. Stendi, gli direi, inoltre il tuo sguardo su quel mare, che col Cielo confina. Tu il vedi ben più esteso di quel che sia la terra ferma da quello circondata; e tu pure dei sapere, che nel totale i mari hanno una superficie più che doppia dei Continenti, e scendono a grandi profondità. Se calcolerai, troverai quindi che quand'anco si elevasse sulla terra ferma tutta quella quantità di ghiaccj, che secondo i diversi climi vi si possono formare dalle acque del mare, in questo nulladimeno rimarrà sempre una immensa quantità di acqua, quantità che sarà in parte restituita dalla liquefazione dei ghiaccj. Se la cosa ti sembrasse strana, io con un' altra per te maggiore stranezza renderolla credibile. Il successivo aumento de' ghiaccj è certamente una sottrazione di acque marine; onde sembrerebbe, che l' elevazione del loro livello dovesse andarsi diminuendo. Nulladimeno Nettuno si starà sempre sedendo su di un Trono di costante altezza. Vedi quelle acque che in ruscelli, in torrenti, in fiumi alla loro più bassa sede ritornano. Esse si elevarono del tutto pure, allora che Prometeo loro prestò le ali; ma giunte agli evanescenti confini del regno di Giunone furon costrette a raccogliere le ali, ed a ripigliare la loro nativa forma, quella cioè, per cui rumorose serpeggiano per le pendici dei monti. Ecco come quì torbide discendano, là seco rapiscano grossi macigni, da per tutto impazienti si aprano, o si allarghino la via al mare, distruggendo, e seco ravvolgendo le commosse materie. E dove alla fine queste pervengono? Vanno a ristringere, ed a rialzare l' alveo marino, ed a diminuire così la sua capacità, onde possano le acque benchè diminuite in quantità ritenere il precedente livello. Così dunque il mare, ed i monti si permutano le loro sostanze; conservando nel generale i loro originarj rapporti. In questa permutazione appajono pure due motivi, per cui i ghiaccj non possono aumentarsi, se non dentro a certi limiti. Diminuendosi l' estensione della superficie marina diviene minore la sua svaporazione, e conseguentemente minore quantità di acqua può elevarsi alla regione dei ghiaccj. Venendo inoltre dalle acque distrutte molte montagne, e diminuita l' altezza di altre, si diminuiscono pure in numero le alte regioni, sulle quali principalmente sogliono perpetuarsi i ghiaccj. Altri rapporti io potrei assegnare, per cui gli agghiacciamenti devono avere certi limiti. Da quelli però, che accennai, appare in genere, che alla formazione de' ghiaccj alpini concorrono l' acqua, il fuoco, l' aria, e la terra. L' acqua di mare n' è la materia prima, il fuoco, o calore la riduce in vapori, la diversa costituzione dell' aria concorre a farli condensare di nuovo in acqua o fluida, o ghiacciata, e le più alte prominenze terrestri contribuiscono a trattenerne perpetuamente una certa porzione, la quale è variabile a motivo sì del calor terrestre, come del solare. L' influenza variata di que' quattro agenti si contempera in modo, che i ghiaccj alpini non possono dopo un certo tempo aumentarsi se non in una serie decrescente, o con alternazioni di diminuzione; onde fintantochè il mare verrà ai monti, tornerà esso in se medesimo, nè sarà da temere un generale agghiacciamento del globo.

Come le sopraccennate variazioni particolari non turbano nel generale la fisica costituzione della terra, così neppure vi turbano que' rapporti generali, per cui la terra stessa come pianeta entra nel sistema celeste. L' agghiacciamento di una considerabile quantità di acqua marina, che si va aumentando ai monti, e lo scorrimento al mare di una non piccola porzione delle montagne potrebbe far dubitare, che per tale traslocazione di materie la terra abbia a mutare il suo centro di gravità, e conseguentemente l' asse di rotazione, e fors' anco la velocità della rotazione medesima. Se ciò avvenisse, l' Astronomo si troverebbe come in un Osservatorio mobile, e da tal moto sarebbero affette tutte le sue osservazioni, sì che i risultati dei suoi calcoli sarebbero vacillanti, e con essi vacillerebbe tutto il sistema celeste. A dileguare tali dubbj la Geologia fornirà all' Astronomo i dati per calcòlare, che quand' anco fosse trasportata in mare tutta quella materia montuosa, che dall' acque può essere smossa, e sui continenti venissero ad agghiacciarsi le acque marine sino agli estremi limiti de' ghiaccj alpini, pure non mai si formerebbe da una sola parte del globo bo una preponderanza sufficiente a far mutare sensibilmente il suo centro di gravità . Dirangli i Geologi quale sia l'altezza , la posizione , e l' estensione de' monti , d' onde conchiuderà primamente , che assai piccola è la loro massa in confronto di tutta la massa terrestre ; e dall' altezza inoltre dei monti per rapporto alla lunghezza del raggio terrestre conoscerà , che picciola è la differenza delle distanze dal centro del globo , alle quali le materie traslocate vengono trasportate . Gli diranno parimenti che tali trasporti intervengono in moltissime , e tra loro opposte parti , sì che facilmente essi si possono controbilanciare , e tanto più quanto che la circonferenza del mare , alla quale massimamente pervengono le materie trasportate , è assai grande , sì che esse nel mutar luogo devono distribuirsi quasi uniformemente sulla superficie terrestre . Da tali considerazioni risulterà , che il centro di gravità per le indicate variazioni non può sensibilmente mutarsi , e poichè la rotazione sempre si stabilisce intorno ad un asse , che passa sul centro di gravità del corpo ruotante , perciò sarà assicurato , che per le indicate ragioni non sarà turbata neppure la posizione dell' Eclittica, dalla quale massimamente dipendono le stagioni . Potrà finalmente il Geologo tali cose confermare mostrando dalle sue osservazioni , che l' Equatore presente è ancora quello , che era prima della straordinaria inondazione intervenuta sul globo terrestre , o anzi che è press' a poco quello stesso , che nella originaria conformazione del globo esistette ; e che il clima geografico in generale non fu soggetto a veruna considerabile variazione .

Che se alcuno temesse un aumento sensibile nella velocità di rotazione a cagione del successivo abbassamento di materie montuose , che scendono al basso trasportate dalle acque , questo timore sarà tolto dalle osservazioni geologiche , da cui risulta , che se alcuni monti si abbassano , altri per contrario si alzano , sì che dalla successiva elevazione degli uni può facilmente diminuirsi di tanto la velocità di rotazione , ne, quanto dovrebbe accrescersi per l' abbassamento degli altri. Monti, che si alzano, o si sono alzati, sono i Vulcanici che da materie eruttate hanno la loro origine, de' quali certamente è non piccola la quantità in ognuna delle quattro parti del mondo terrestre, e l' elevazione è molto considerabile, come attestano i Vulcani delle Cordilliere, il Pico di Tenariffe, l' Etna, l' Ecla, ed altri assai monti, che crescono in altezza sono pure le Alpi, su cui si vanno continuamente formando, o aumentando i ghiaccj; ed a questi voglionsi aggiugnere quelle prominenze ghiacciate, che verso i poli si vanno formando nel mare stesso, occupandovi un segmento di sferoide di non piccola estensione.

Da questa costanza, che tra mezzo a parziali variazioni si conserva nel generale, io avrò con che acquietare le querele di quel dabben vecchio, che lamentasi dicendo essere sconcertate le stagioni, e non conservarsi più verun ordine negli elementi; e vedrò se è possibile di richiamarlo alla considerazione delle mutazioni in lui intervenute, alle quali anzi che alla natura voglionsi attribuire quegli sconcerti, di cui egli si risente. Rincrescerà a lui il riconoscere in se la cagione di quelle sue querele. Ma ascolterammi forse qualche suo pronipote, che per umanità, o per qualche vicina speranza gli siede a fianco, ed egli almeno apprenderà a non esser facile a mover querele contro la natura.

Potrò io inoltre rintuzzare l' audacia di qualche presontuoso, o incauto filosofo, il quale parla delle opere di natura, come se egli avesse saputo fare qualche cosa di meglio, o come se la presente costituzione della Terra fosse opera del caso, e non di provido consiglio diretto massimamente ai vantaggi dell' uomo. Metterogli perciò in vista, come limitata sia la quantità di que' quattro componenti del globo terrestre, nel quale formano una piacevole varietà congiunta ad una mirabile costanza: mostrerogli come siano equilibrati in modo, che uno non possa l' altro soverchiare, e la loro mutua azione concorra a mantenere costante la posizione dell' asse terrestre, cioè a mantenere la stessa obbliquità dell'Eclittica , per cui costante si mantiene sulla terra l' influenza periodica del calor solare , e rende feconda , ed abitabile la massima quantità della superficie terrestre . Se egli mi opponesse come opera del caso quella irregolarità , con cui il mare circonda i Continenti , e per entro ad essi s' insinua formando golfi , e seni senza veruna simmetria , io gli farei vedere , che quella stessa è anzi necessaria al fine medesimo . Prenderei per esempio il Mediterraneo , che dall' Oceano diramandosi s' insinua tra l' Africa , e l' Italia , e formando il Golfo Adriatico divide l' Italia stessa dalla Dalmazia . Poniamo, gli direi, che questi due rami si asciughino , e divengano terra ferma . Le acque , che ora svaporando da quelli si alzano , e che parte ricadono su dell' Italia in piogge , parte vanno ad agghiacciarsi alle Alpi per alimentare dipoi in opportuna stagione i fonti , ed i fiumi , mancherebbero allora a questa ora fecondissima regione , e poichè le querele dell' Italo Agricoltore che di quando in quando egli muove sulle siccità , mostrano che le acque nella presente costituzione appena bastano alla fertilità de' suoi campi , perciò per la mancanza di que' due mari l' Italia diverrebbe quasi sterile insieme colle coste d' Africa , della Dalmazia , e di altre regioni, che ora partecipano dell' influenza de' mari stessi . Le sinuosità de' mari servono dunque a rendere feconda una maggior porzione del globo . Che se in quella non appare verun ordine di simmetria, ciò è, perchè questo sarebbe stato inutile , e non combinabile coll' ordine finale . La simmetria non è richiesta se non al più in quelli oggetti , che possono vedersi in un sol colpo d' occhio , come sono il prospetto di un edifizio , un giardino , e simili ; ed anche la natura in tal genere di cose ha seguito quest' ordine , come appare nella struttura del corpo degli animali , e massime dell' uomo . Poichè dunque il globo terracqueo non è visibile , se non successivamente , in vano sarebbe stata la sua superficie ripartita con simmetriche figure e proporzioni . Che se la costituzione della superficie terrestre è tale, che il tutto concorra a renderne feconda la massima quantità, è chiaro, che essa ancora è disposta alla massima abitazione dell' uomo. L' uomo è atto a sostenere tutti i climi, e tende a diffondersi in ogni parte della terra, ove trova sussistenza, la quale dai vegetabili, e dagli animali gli viene somministrata. Se dunque la terra è fecondata nella massima quantità possibile, ciò torna in vantaggio dell' uomo, vantaggio che da provido consiglio gli fu apprestato, nè potè dal caso derivare, siccome quello, in cui non è alcuna ragione sufficiente di quella costanza di rapporti, che si osserva.

Io mi trovo ancora alla pianura, e vi ho fatto lungamente passeggiare pei monti sì che io temerei di avervi già stancato, se non sapessi di quanto vigore siate fornito. Su questa persuasione non vi spiaccia di trattenervici ancora alcun poco, giacchè mi rimane ancora da farvi vedere una lontananza, in cui si scopre ciò, che è più degno della vostra considerazione, e di quella dell' uomo. Forse mi troverete un non inetto Cicerone delle montagne. I rapporti, che finora ho rilevati tra i monti, ed il rimanente della fisica costituzione della superficie terrestre, non sono che di materia con materia, e di materia con forze; e se il Geologo su quelli avesse a faticare tanto senza riconoscervi niente di più grande, non potrebbesi egli riguardare se non al più come il Filosofo definito dalla Nutrice del Sig. D' ALEMBERT. *Qu'est ce qu'un Philosophe?* diceva ella un giorno al suo già adulto Allievo, vedendolo soverchiamente immerso nelle specolazioni matematiche. „ *C'est un fou,* soggiunse ella, *qui se tourmente pendant sa vie pour qu'on parle de lui lorsque il n'y sera plus* „ (1). Poteva forse essa per questa sua meno che maschia definizione profittare qualche cosa con quel profondo calcolatore, il quale col trattenersi continuanuamente sugli infinitamente piccoli si era dimenticato dell' infinitamente grande. Ma il Contemplatore delle montagne trova in queste l' infinito nel suo più luminoso aspetto. A misura che egli va per esse ascendendo vede impiccolirsi gli oggetti, che sotto di lui rimangono. I più elevati Pioppi, che bordano i fiumi delle pianure, le torri che sorgono nel mezzo delle Città, e tutti gli altri più giganteschi edifizj gli divengono oggetti microscopici. Per contrario gli cresce a vista sotto i piedi il terreno, su cui ascende; il verde delle cime che gli si presentano quasi umili erbe, gli si vanno mutando in robusti Abeti; l' Orizzonte gli si apre in ogni parte presentandogli dappertutto prospettive a perdita di vista, in cui un cielo sempre crescente va a porre illimitati confini ad un mare immenso. Non può egli a meno di non esser sorpreso da sì grande cangiamento di cose, dalle cui attrattive anzichè dalla difficoltà del cammino è egli invitato ad arrestarsi, e mentre egli o si riposa, o si delizia in quella alternazione, per cui il grande s'impiccolisce in alcuni oggetti, e s' ingrandisce in altri senza verun limite, viene rapito nell' infinito, in quell' infinito, il cui sentimento altronde la natura stessa ad ognuno eccita con un Sole, che di giorno gli rende visibili innumerevoli oggetti, e che gli mantiene anche di notte, sottraendogli il Sole medesimo per mostrargli nelle Stelle innumerevoli Soli. Cerca egli allora di riconoscere quell' infinito, che lo pose in sì grata situazione, e si avvede, che le sue montagne in vece di uno gli presentarono due infiniti, cioè l' infinitamente piccolo, e l' infinitamente grande; ma nessuno di questi gli sembra essere quell' infinito, che quasi lampo illumina insieme, ed abbaglia la sua mente. Sarebbe egli pertanto sul punto di stimarsi illuso dalle sue montagne, se non sapesse, che queste sempre dicono il vero, e dicono più di quello che a prima giunta vi s' intende. Ritorna egli pertanto sulle variazioni intervenute negli oggetti, e riconosce primamente, che intanto dalla diminuzione degli uni, e dall' aumento degli altri egli fu trasportato nella nozione dell' infinito, in quanto che il suo occhio per la distanza degli oggetti stessi non poteva determinarvi i limiti nè della diminuzione nè dell' aumento. D' onde conchiude, che gli oggetti anzi che infiniti divennero a lui indeterminati nei loro limiti, e ciò a motivo della piccola attività de' suoi sensi. Osserva di più, che quantunque gli oggetti si andassero diminuendo, pure non mai li vide ridotti all' infinitamente piccolo, ma anzi svanirono, e divennero nulli al suo occhio, senza che egli potesse mai fissare in essi il momento, in cui prima di svanire pervennero alla minima piccolezza. Riflette finalmente, che gli esseri, in cui può aver luogo diminuzione, o aumento, cioè che sono variabili, come sono i corpi, non possono apprendersi come infiniti. Se per esempio un corpo, o un essere esteso si vuol apprendere di una lunghezza infinita, conviene primamente per formarsi l' idea di lunghezza, apprendere una linea terminata fra due punti posti ad una distanza appresa come variabile. Ma quando si vuol formare l' idea di una lunghezza infinita, conviene supporre una linea, la quale non abbia verun termine, la quale cioè non sia terminata da due punti estremi; e tolti questi viene tolta anche l' idea di linea, siccome quella, che sussisteva per la terminazione di due punti. D' onde parimenti intende, che in una linea, o in altro essere variabile neppure può intendersi l' infinitamente piccolo, e tanto più quanto che i punti stessi si sogliono apprendere come le estremità, o i termini di una linea, i quali perciò non possono sussistere, se non riguardando la linea come finita.

---

(1) *Eloge de Mr. d'Alembert.* Hist. de l'Acad. R. des Sciences an 1783.

Da queste riflessioni rileva una mirabile consonanza tra i sensi, e l' intelligenza: giacchè come gli esseri sensibili, che per natura sono varianti, svaniscono o in tutto, o in parte all'occhio, anzi che vi si possa fissare una diminuzione, o un aumento all' infinito; così l' idea degli esseri, che apprendonsi come variabili cessa al momento che si tenta di considerarli come infiniti. L' infinito pertanto ed il variabile ri-

ripugnano nello stesso essere; sì che per apprendere l' infinito conviene, che dalla mente svaniscano cielo, terra, estensione, spazio, tempo, ed ogni idea di variazione, cioè a dire non può l' infinito intendersi se non in un essere invariabile. Sentesi quindi l' Osservatore trasportato nella regione degli inestesi, e trovasi quasi alle porte della Divinità, ben intendendo che l' essere invariabile non può essere se non quello, in cui sia un potere superiore ad ogni altro. Quivi pertanto rispettoso ferma i suoi passi contento di avere riconosciuto quell' Essere onnipotente, da cui ogni altro potere deriva, ed in cui solo può essere la ragione sufficiente delle grandi rivoluzioni terrestri.

Nel trattenermi in questa misteriosa lontananza io forse mi sono troppo allontanato dagli oggetti geologici. Voi però facilmente mi escuserete, ben comprendendo, che lo scopo di questa mia lettera fu di esporre alcuni dei principali pregi della Geologia. Questa certamente mostra come tra mezzo a parziali variazioni mantengasi sulla terra una variabile costanza nell' azione generale degli elementi; essa assicura l' Astronomo sulla stabilità della rotazione terrestre; ci manifesta nella struttura della terra un' opera non del caso, ma di mente provida, e benefica verso l' uomo; ci fa conoscere le rivoluzioni intervenutevi ne' secoli trapassati, somministrandoci argomenti per confermarne le cagioni assegnate dalle sacre Storie, e mantiene l' uomo nel sentimento della Divinità.

Io volentieri richiamo alla mia mente questi pregj, siccome quelli, che mi danno vigore per incontrare le fatiche, che sono compagne degli esercizj Geologici. Ma nello stesso tempo la serenità di mia mente viene turbata, prevedendo, che queste utilità da ben pochi saranno comprese, ed un minor numero ne farà uso; anzi non mancherà chi riguarderà queste fatiche Geologiche come occupazioni di ozio. Questo pensiero tanto mi rattrista, che sarei sul punto di rinunziare alle montagne, se non fossi certo che esse mi abbiano a render grata la melanconia stessa. Sì, amico, anche la melanconia ha le sue delizie, e queste alla montagna si trovano più chè altrove, ed entrano nell' animo più soavemente. Allorachè col corpo stanco, ch' a gran pena porterò, io sarò giunto verso qualche cima, ove sarò obbligato a prender riposo, mi si rinnoveranno certamente que' tristi pensieri; ed allora io abbandonato ad uno scoglio lascerò perder la vista sulle rovine, che colà fece il tempo sulle più ferme montagne, su quelle rovine, che il pensoso Inglese cerca in vano d' imitare ne' suoi giardini per formarne la più deliziosa parte. Quelle mi presenteranno quel piacere, che altri, quando è negli agi, cerca nelle tragedie, nelle prospettive de' naufragj, nelle descrizioni di sanguinose battaglie, e nella caduta degli Imperj. Nella tristezza di quelle naturali rovine mi sembrerà, che la natura stessa, come amico, meco si rattristi. In uno stillicidio di acque, che vedrò sgocciolare da una rupe coperta di molle muschio, io m' immaginerò, che forse per me piangono i sassi stessi, e certamente in quella lagrimosa rupe vedrò, che la natura ha più interessamento per me di quel che gli uomini mostrino ai loro Sovrani, a' cui sepolcri fanno pianger le Statue ad occhi asciutti. Nel Cielo stesso, che in quelle alture presenta un più fosco azzurro io riconoscerò una serenità adattata alla mia situazione, ed in tale consonanza della natura collo stato dell' animo mio, io gusterò quel piacere che l' armonia morale concilia. Allora dall' opposta parte di quella rupe macera di pianto ascenderà forse un errante Irco, il quale, all' insolito aspetto di uomo paventando, rapido volgerà indietro il passo, e co' fessi piedi smovendo il mal fermo terreno ne farà staccare uno scheggione, che ritto cadendo sul pendío del monte si anderà qual ruota rotolando precipitosamente. Io il seguirò con curioso occhio, e quello ora saltellando sugli intoppi che incontra, ora movendo sulle rovine nuove rovine, ora traversando torrenti, e valli si anderà sempre più precipitoso sottraendo alla mia vista, e svanendo seco rapirà i tristi miei pensieri, avendomi colle sue rovine ricondotto alla considerazione di quelle rivoluzioni, che formano il mio scopo . Queste mi faranno perdere nel passato, mi spingeranno nell' avvenire, e dimenticato di me io tornerò a trovarmi. Allora io colà troverò voi pure risovvenendomi, che le mie osservazioni devono essere a voi dirette; e dirò che se con queste io potrò soddisfare a voi, io mi crederò di avere soddisfatto a tutto, ed a tutti .

Dimani comincierò le osservazioni, dirigendomi a Pistoja per la nuova strada, che passa per uno degli Appennini; nel qual viaggio essendo io accompagnato dalla vostra amicizia, spero che il tutto mi riescirà felicemente .

LETTERA SECONDA.

Firenze 24. *Luglio* 1792.

La lettera, che da Modena vi scrissi, saravvi forse sembrata un risultato di molti viaggj già da me fatti, anzi che un cenno di quello, che io ora ho cominciato. Ma io ho stimato di anticipare a scrivervi qualche cosa che potesse far onore alla Geologia, affinchè fosse come un introduzione corispondente all' importanza, che pur bramerei di poter dare alle osservazioni, che ho divisato di fare per gli Appennini, e per le coste marittime del Regno di Napoli. Temo però fin d' ora, che voi in quella non abbiate a riconoscere una gran porta per un piccolo edifizio, o anzi una porta più grande dell' edifizio stesso; e su questo timore io per declinare la taccia di cattivo Architetto, vi pregherò a non voler considerare quella mia lettera se non come il prospetto di una fabbrica, a cui rimarrà un perpetuo addentellato; oppure a volervi compiacere di mutare il nome di Porta in quello di Arco d' ingresso, il quale potrà stare anche solitario .

In ogni modo io comincierò ad esporre le osservazioni, che ho potuto fare da Modena a Firenze. Intrapresi questo cammino, passando per la nuova strada, che lasciando da parte Bologna conduce a Pistoja. In esso la pianura del Modenese va dolcemente ascendendo per lo spazio di 12. miglia, cioè sino alla distanza di circa 2. miglia da S. Venanzio, ove bruscamente s' incontra la Collina, che proseguendo per diverse alture va ad unirsi colle montagne, che dai vicini Apennini si diramano da S. Venanzio sino a Pieve Pelago. Pel cammino di 43. miglia la montagna non presenta che pietre composte di terra calcarea o pura, ovvero combinata ora con argilla, ora con arena, ora anche con mica. Esse sono o grigge, o azzurrognole, o biancastre; e per entro alla loro massa corrono spesso diverse vene, e rilegature di spato bianco talora cristallino. La pietra calcarea granosa azzurrognola è soggetta a scomposizione, ed allora che questa vi comincia, la pietra prende un colore ferrugineo. Vedesi manifestamente questo cangiamento anche in grossi massi, i quali spezzati mostrano nell' interno un nocciuolo col suo colore nativo azzurrognolo, nel mentre che verso la superficie, ove comincia la scomposizione, sino alla profondità di un piede e più, vi si riconosce il colore ferrugineo, ed una minore consistenza.

Tra S. Venanzio, e Serra incontrasi ancora un sasso arenoso cinericcio, o azzurrognolo formato di arena silicea mista con poca terra calcarea e con tenue mica, il qual sasso è simile a quello che frequentemente si trova nelle diramazioni degli Apennini, e che si cava a Fiesole sotto il nome di macigno: onde tal nome io pure riterrò in tutti quei sassi che avranno le qualità sopraindicate. Di macigno è pure formata la montagna in distanza di due miglia da Pieve Pelago, e per entro ad esso corrono diversi schisti margacei azzurrognoli.

Per tutto l' indicato tratto le sopraindicate materie compajono bensì stratificate, ma a strati variamente inclinati, cioè ora quasi verticali, ora più o meno obbliqui, e talora an-

anche tortuosi , ed in quelle non mai mi occorse di trovare conchiglie o altri corpi organizzati fossili .

La terra più elevata, per cui si passa seguendo il descritto cammino, è Barigazzo, la cui elevazione sul livello del mare fu da me trovata di piedi parigini 3713 $\frac{3}{4}$. Barigazzo è celebre per certi fuochi naturali , che già da lungo tempo vi ardono , simili a quelli di Pietra mala . Essi furono già diligentemente esaminati dall' occhio osservatore dell' esimio Sig. Professore *Spallanzani*, dal quale saranno colla nota sua esattezza e penetrazione descritti nei suoi viaggi da lui enunciati , e dal Pubblico avidamente aspettati .

Tra Barigazzo , e Pieve Pelago la montagna sulla lunghezza di circa tre quarti di miglio è soggetta talora a lavine, le quali sono memorabili per la destrezza , con cui que' montanari provedono al passaggio delle vetture anche nel tempo degli attuali rilascj . Procedono questi da acque , che s' infiltrano sotto alla superficie della montagna composta pure di pietra calcarea irregolarmente stratificata, e parte di terre poco consistenti , e mischiate con altri sassi diroccati . Quando le acque hanno rammollito, e minato il terreno sino ad una certa profondità , esso non avendo più coerenza col fondo montuoso scorre in giù insieme colla strada , che altronde viene generalmente distrutta dalle cadenti macerie : e siccome questo sconcerto dura più giorni, così esso renderebbe impraticabile il passaggio per un certo tempo, se l' impegno del Governo per mantenere questa strada , e l' industria di que' montanari non concorressero a provedervi . Su questo gran cammino è costituito un direttore , il quale viene tosto avvisato , allorchè comincia qualche rilascio , ed immediatamente vi accorre con molti operaj, i quali vi si trattengono per provedere al passaggio . A tal fine essi arditamente attraversano quel torrente di fanghiglia che vi discende, e vanno a staccare i cavalli delle vetture strascinandole poi essi medesimi per la scorrente montagna : nella quale operazione talora interviene che le vetture , e le persone scorrono in giù col moto comune del sottoposto terreno, nel mentre che col moto proprio vanno in su, o seguono una orizzontale direzione.

A Pieve Pelago feci stazione alcuni giorni per esaminarne i contorni, e per ascendere la cima del vicino Apennino chiamato il Cimone di Fanano. Passeggiai primamente verso S. Andrea, ove per lo cammino di circa 2. miglia non incontrai alla montagna se non il macigno sopra descritto, ed uno schisto o margaceo, o argilloso, in cui talora eravi sparsa una tenue mica. Sulla superficie vidi pure diversi massi di Pietroselce, che s' andava disfacendo.

M' indirizzai dipoi verso le Tagliole, e per lo spazio di cinque miglia sino verso *la Nuda* la montagna è formata di macigno grigio. Lungo il torrente delle Tagliole sorge appoggiato al macigno uno schisto argilloso micaceo di colore ora rossiccio ora verdastro, il quale era in decomposizione, e formava una massa montuosa dell'estensione soltanto di qualche centinajo di piedi.

L' indicato macigno in distanza di circa 2. miglia da Pieve Pelago aveva gli strati inclinati 30. gradi: la direzione loro era di 155.° or. ed ascendevano da 155.° or. a 155. oc. ossia da *N N O* a *S S E*.

Per non lasciare in queste espressioni quelle ambiguità che in altre simili da molti usate appajono, io avvertirò che le inclinazioni e direzioni furono da me misurate col Goniometro, o colla Bussola mineralogica, che già descrissi negli *Opuscoli scelti di Milano*, e coi principj in quell' opuscolo esposti. Due cose inoltre devo aggiugnere. La prima riguarda la costruzione e la posizione dell' Istromento per rapporto alla determinazione delle direzioni. Lo Stromento ha un circolo diviso in due semicerchj da un diametro, il quale ad un estremità ha segnato il *Nord* ed all' altra il Sud, e tal linea può chiamarsi meridiana istromentale per distinguerla da due altre meridiane, cioè l' astronomica, e la magnetica. La meridiana istromentale corrisponde alla retta, di cui si vuole determinare la direzione, e la direzione di essa è l'angolo, o il numero di gradi contenuto tra il Nord istromentale, ed il Nord magnetico. Ma siccome questi due Nord formano sempre due angoli, eccettuato il caso, in cui coincidono, perciò per fissare l'angolo, da cui deve denominarsi la direzione, io seguendo la presente pratica de' mineralogisti Tedeschi, soglio tenere la seguente regola: quando il cerchio, su cui si misurano gli angoli sia fisso, è noto che l' oriente riesce a destra di chi è rivolto al Nord. Quindi il semicircolo che è a destra di chi posto nel centro guarda verso il Nord istromentale, dovrebbe chiamarsi orientale, e l' altro a sinistra occidentale. Ma per la ragione che tra breve accennerò vi si segna il contrario, così che l' oriente istromentale corrisponde all' occidente astronomico, e l' occidente istromentale all' oriente astronomico. Quindi il semicircolo orientale, ed istromentale si divide in 180. gradi cominciando dal suo Nord, così che al Sud riesce il grado 180. e questi chiamansi gradi orientali. Di poi si prosegue la divisione del semicerchio occidentale in 180. gradi cominciando dal Sud, così che va a terminare al Nord il grado 180. occidentale, che coincide collo zero, ossia col principio della numerazione di gradi orientali. In tal modo la direzione facilmente si determina, cioè a dire, si fa coincidere la meridiana istromentale colla retta, di cui si cerca la direzione, e supponendo che la retta cominci al centro, e termini al Nord istromentale, si osserva in qual semicerchio il Nord magnetico sia fermato, ed il numero di gradi contenuto tra il Nord magnetico, ed il Nord istromentale. Se tal numero di gradi per esempio è 40, e questo numero è segnato dal Nord magnetico nel semicerchio nominato orientale dell' istromento, allora la direzione dicesi orientale, e si scrive così 40. or., se è nel semicerchio occidentale, si scrive in quest' altro modo 40. oc. Siccome però si suole anche indicare la direzione per mezzo della rosa de' venti, così io aggiugnerò anche questa maniera di espressione, abbenchè sia meno esatta della prima.

L' altra avvertenza, che devo fare, è, che la meridiana magnetica non suole coincidere colla meridiana Astronomica, ed al presente declina verso occidente circa 18. gradi. Quindi la direzione trovata colla meridiana magnetica deve essere corretta per ridurla all' astronomica, ed il Geologo deve avvertire o essere avvertito, se la direzione, di cui parlasi, sia l' osservata, o la corretta. Quelle che io enuncierò saranno le corrette.

Ritornando alle stratificazioni di que' contorni, in alcune di queste riconobbi una inclinazione, e direzione quasi eguale alla poc' anzi enunciata, e di poche misure mi dovetti accontentare, sì perchè que' strati erano di troppo difficile accesso, e sì anche perchè su que' sassi si vedevano scherzare le vipere che in molta copia vi annidano. Colà ebbi occasione di riconoscere quanto sia vaga l' idea dell'Aspide, che in ogni distretto di montagna si rammemora come una serpe di veleno insanabile, e di cui si raccontano atroci casi. Sul cammino si presentò una serpe cinericcia sparsa di varii ordini di fosche macchie, e di una grandezza alquanto maggiore di quella di una ordinaria vipera. Le mie guide tosto gridarono essere quella un Aspide. Io dissi loro che la prendessero, e con un sasso destramente slanciato fu fracassata nel mezzo, e così fu presa. Avendola io quindi mostrata a diversi del vicino paese, che dicevano essere conoscitori delle Aspidi, compresi dalla varietà delle loro osservazioni che nulla ne sapevano.

Dopo l' esame dei bassi contorni di Pieve Pelago m' indirizzai verso il Cimone. Pernottai all' Alpe di Doccia, e poco dopo la mezza notte m' incamminai verso la sommità di quell' Appennino, ove tra fumose fiaccole, e tra l' abbajamento de' Cani de' Pastori giunsi al momento che tra nuvole dorate nasceva dall'Adriatico il Sole quasi gemello, ascendendo l' uno, mentre l'altro, riflesso da tranquillo mare, sembrava discendervi. Un semigelido zefiro, che simile ad un fuggitivo inverno, che da ponente volasse a temperarsi verso il nascente Sole, non mi permise di fare lunga stazione su quell' isolata eminenza. Abbenchè fosse il giorno 8. di Luglio, pure il freddo vi era così acuto, che a stento potetti a quell' ora apprestare gli stromenti per le osservazioni. Vi trovai i Termometri a gradi 7. di *Reaumur*, ed il Barometro a pollici 22. 0. $\frac{1}{2}$: il che combinato colle osservazioni corrispondenti mostra, che l' altezza di questa cima sul livello del mare è di piedi parigini 6548 $\frac{1}{12}$. Questo è quel monte, la cui altezza sino dall' anno 1671. il valente Fisico Montanari misurò, facendo egli tra' primi uso delle variazioni delle altezze del mercurio nel Barometro, allora da lui chiamato Termometro. (V. *lettere inedite di uomini illustri tom.* 1.)

Diressi quindi il Cannocchiale livellato di un esatto Teodolite a tutte le cime da tal sito visibili, e non molto distanti, e che con questa potevano contendere in altezza, e vidi che il Cannocchiale sempre guardava in cielo, che è quanto dire che esse apparivano tutte più basse. Tra queste erano pure le Panie situate sui confini del Lucchese, e del Modonese, che nella Carta del *Vandelli* sono denominate *Monte Altissimo*. In alcune misurai l' angolo di depressione della loro cima per dedurne la loro altezza, e trovai che nella Pietra Pania l' angolo era di 30′; nella montagna di Civago di 15′, ed in quella di Radicofani di 1.° 30′. Ma non avendo trovata abbastanza esatta la distanza orizzontale segnata nelle Carte geografiche, dalla quale dipende la valutazione dell' altezza, non ho stimato di calcolarla, massime che pel mio oggetto geologico bastò il poter assicurare, che le indicate montagne sono o minori, o al più press' a poco eguali in altezza al Cimone. Il sasso, di cui è composta la sommità del Cimone, è un macigno grigio simile a quello che compare per tutta la sua pendenza sino alla base. Vi si riconosce in più luoghi una decisa stratificazione, ma molto varia sì nell' inclinazione che nella direzione. Sulla superficie spuntano talora de' massi del tutto calcarei, tra' quali taluno è di marmo bianco e rosso che dagli imperiti di que' contorni è riputato Porfido. V' incontrai pure qualche pezzo di Pietroselce cinericcio, o di quarzo cerulescente. Mentre io, stando su quell'Apennino, mi trovava avere l'Adriatico al Levante, ed il Mediterraneo al Ponente, e vedeva verso Settentrione spuntare in grande distanza quasi pigmei quelle Alpi, che da vicino avea altre volte riconosciute come montagne gigantesche, riconobbi che non mai fu cantato un verso più geografico di quello, in cui il Petrarca rappresentò l' Italia pel bel paese:

Ch' Apennin parte, e 'l mar circonda, e l' Alpe.

Io però vi dico il vero, che se avessi avuto a commentare questo verso, determinando quali sieno gli Apennini, mi sarei trovato non poco imbrogliato, e non avrei creduto di potermi decidere se non dopo d' avere consultati i Plinii, gli Straboni, ed altri antichi Geografi: e forse che dopo di ciò non sarei stato molto fortunato nella soluzione del Problema, giacchè gli antichi Scrittori danno forse più materia per far nuove quistioni, che fatti precisi per risolvere quelle che sono proposte. Richiedendo altronde i miei oggetti mineralogici, che fossero precisati quei monti, che per Apennini devonsi riguardare, io mi rivolsi ai Plinii e Straboni di montagna, cioè agli Abitatori de' loro contorni, e da essi rilevai che un monte per essere Apennino deve dare acqua a due mari, a quelli cioè che all' Italia danno la forma di Penisola. Mi parve questa una definizione più che Linneana; e non altro più cercai se non di riconoscerne l' esattezza coll' osservazione locale, e colle carte geografiche. A decidere pertanto se un monte sia Apennino basta esaminare verso quali parti scorrono le acque. Se da quello scendono acque, che influiscano in fiumi, i quali o immediatamente, o entrando prima in altro fiume, si scarichino gli uni nel Mediterraneo, gli altri nel mare opposto, esso sarà decisamente un Apennino, qualunque sia la sua altezza, e po-

posizione . A norma di tale idea la catena degli Apennini comincia colà dove terminano le Alpi marittime, che dividono il Piemonte dalla Francia, e s' avanza in poca distanza dal Mediterraneo sul Genovesato . Continua pel Piacentino, e Modonese discostandosi alquanto più dall' indicato mare: passa per la Toscana avvicinandosi all' Adriatico colà dove náscono il Tevere, e l' Arno; ed in maggiore vicinanza dell' Adriatico stesso penetra nello stato Romano da Nocera verso Norcia, d' onde prosegue nell' Abruzzo, e di là nelle parti più meridionali dell' Italia formando in fine due rami, l' uno dei quali và a terminare nella terra di Lecce, l' altro nella Calabria ulteriore .

Quindi benchè le Panie sopraccennate sieno altissime, pure agli Apennini non appartengono: giacchè le loro acque o scaricano immediatamente nel Mediterraneo, o sono ricevute dal fiume Serchio, che dalla stessa parte scaricasi nel mare medesimo . Molto meno agli Apennini si possono riportare come fa il *Ferber*, que' bassi monti, su' quali camminava la vecchia strada di Roma a Gaeta: perciocchè le acque di questi influiscono immediatamente nel Mediterraneo, o nel Garigliano che al mare stesso le porta .

Dal Cimone ritornai a Pieve Pelago, d' onde proseguii il gran cammino Modonese ascendendo a Bosco Lungo altrimenti detto la Bettona, che è situato in un altro Apennino vestito di un residuo di tristi Abeti . In questo tratto che è di 7. miglia domina ancora il macigno ossia il sasso arenario grigio azzurognolo misto spesse volte con tenue, e poco lucente mica . Questo pure è stratificato, ed alla metà di questo tratto di cammino trovai, che l' inclinazione degli strati variava tra i gradi 30, e 43 . La loro direzione, che era di 50.° Oc. era retta, cioè andava a seconda della pendenza della montagna ed ascendeva da NE a SO . Tra gli strati di macigno talora si presentano anche de' Schisti margacei misti con tenue mica, al qual sasso i Toscani danno il nome di Galestro . Da Bosco Lungo vedesi ad una certa distanza un monte, ove è il Lago di Scafiolo, che enunciasi come una maraviglia in quanto che si crede situato alla cima del monte. Ma anche in quella distanza vedevansi altri monti ad esso circostanti, e più elevati, dai quali poteva a quel Lago concorrere acqua almeno per cavità ed infiltrazioni sotterranee. Proseguendo il cammino lo stridore d' importune Cicale mi annunziò, che io discendeva nel paese, d' onde nel secolo parolajo escirono le cicalate tanto bene allora accolte, come ora le descrizioni Buffoniane sono ricevute ed aggradite dai Naturalisti non Linneani. È in fatti Bosco Lungo la prima abitazione della Toscana, che s' incontra per questa strada: ed esso è il punto più elevato della strada medesima, la cui altezza sul livello del mare fu da me trovata di piedi 4177 $\frac{1}{2}$.

Nella discesa s' incontrano Piano Linatico, e S. Marcello, d' onde si giunge a Pistoja. In tutto questo cammino, ch' è di 28. miglia, i monti si presentano con quella varietà di sassi, e di stratificazioni che incontransi dalla parte del Modenese. In un sito però non molto distante da S. Marcello, il cui nome non saprei dire, notai una singolare stratificazione a doppia commessura, l' una delle quali formava piani poco inclinati all' orizzonte, dall' altra risultavano strati quasi verticali.

Da Pistoja sino a Prato i monti vanno sempre più diminuendosi di altezza, e prendono in fine la natura di Colline in vicinanza di Prato, d' onde si entra nell' ampia Valle dell' Arno, su cui domina Firenze.

Nei monti Toscani vidi verificato ciò, che altrove osservai, cioè la molta influenza che hanno i boschi montuosi sulla costituzione delle basse pianure. Gli alberi colle loro radici tengono tra loro legate le pendenze dei monti, e coi loro tronchi dividono le acque di dirotte piogge sì che queste non possono unirsi in torrenti, che sono quasi altrettante leghe dei monti. Le montagne Toscane veggonsi spogliate di boschi, che già furono estirpati per aumentare i pascoli.

Quindi le acque piovane portano continuamente al basso le macerie superiori, e già gli alvei dei fiumi ne sono tanto ricolmi, che molti hanno il loro fondo più elevato del piano de' terreni, e devonsi rattenere da dispendiosi, e malsicuri argini. Simili danni da simile cagione derivanti soffre pure il nostro Paese, i quali diverranno sempre maggiori, quando non si pongano in opera i rimedj preservativi.

Io quì pongo termine a questa lettera per prepararne materia di altre nel giro, che sono per fare in diverse altre parti della Toscana. Se voi nel leggerle vi stancherete meno di quel che io farò osservando, io mi crederò di non essermi stancato inutilmente.

LETTERA TERZA.

Nocera 4. *Agosto* 1792.

Un giro per diverse colline e montagne della Toscana mi occupò per diversi giorni: ed jeri sono giunto a Nocera, d' onde ascesi a visitare i fonti, ed i bagni di quelle celebri acque.

In questo giro ebbi in vista di esaminare soltanto luoghi da altri non esaminati, o di riconoscere certe importanti osservazioni, che erano state prodotte senza l' opportuna esattezza. Quindi tra le colline, che fanno corona a Firenze, due soltanto ne visitai, cioè l' Imprunetta, e quella di Fiesole: giacchè sulle colline della Toscana il Sig. *Targioni Tozzetti* formò di già una montagna di volumi. Il colle dell'Imprunetta è al mezzo giorno di Firenze, d' onde è distante non più di sette miglia. Per giugnervi si traversano altre colline, le quali sono ora di pietra calcarea cenerina e stratificata, ora di una marna argillosa chiamata volgarmente *Galestro*, la quale venendo continuamente solcata in ogni direzione dalle acque piovane decorrenti pel pendio, forma una superficie a motte simile a quella, che presenterebbe uno dei nostri selciati a ciottoli, se fosse ingrandito da un buon microscopio.

L' accennato Colle è composto massimamente di quella pietra, che *Serpentino* si chiama, ed a cui i Toscani danno il nome di *Gabro*. Il suo colore per lo più è verde; avvene però di rossiccio, di gialliccio, e nero, e spesso questi colori sono frammischiati negli stessi massi, si che ricevendo questi anche un certo polimento, servono a diversi ornati d' Architettura come i marmi. Tali varietà insieme con altre già furono da altri descritte. Unito col Serpentino spesso trovasi uno spato cristallino.

Oltre allo spato trovansi unite col Gabro altre qualità di pietre, come asbesto verde, ed Amianto bianco. Il *Ferber* scrive che vi si trovano anche strati orizzontali di Granitone composto di serpentino, e di molto spato ora effervescente cogli acidi, ed ora non effervescente, il quale egli dice duro e formato in grandi parallelepipedi, e perciò altro non è che Feldispato. Io non incontrai tali strati; ma quand' anco vi fossero non potrebbe ora questo sasso chiamarsi Granitone. Al presente per granito intendesi in genere un sasso, in cui entrino le due qualità di pietre selciose chiamate quarzo, e feldispato, in modo che il suo tessuto sia granoso, e quando il feldispato vi è in grandi parallelepipedi si chiama granitone. Mancando dunque nel sasso descritto da *Ferber* il quarzo non può quello tra i graniti annoverarsi.

Il Gabro non sembra essere stratificato, o certamente se ha strati, questi non presentano veruna regolarità, e tanto più quanto che generalmente la superficie del Colle è quasi tutta disfatta per la scomposizione, a cui tal pietra è soggetta. Nello scomporsi vi si manifesta una considerabile quantità di ferro, da cui le pietre vengono tinte di un colore giallastro bruno, o nero. Al vedere tutto questo Colle coperto di macerie macchiate di tali colori facilmente i ricercatori di Vulcani lo potrebbero riguardare come arrostito. Ma per derivarlo da fuoco vulcanico troppo più ci vuole di un apparenza bruna. Io sono di parere che il Gabro sia una pietra originaria non meno del granito, e che sia stato formato contemporaneamente col medesimo. Nella nostra Valsasina, ed altrove pure io ho osservati molti graniti composti di Quarzo, di Feldispato, e di Serpentino. Su diverse colline della Lombardia medesima spesso ho trovate grossi massi di Serpentino puro misto con graniti, ed altri sassi rotolati che non potettero essere trasportati, se non nella generale inondazione del globo terrestre, epperò dovettero essere a questa anteriori, e perciò appartenere a monti originarj, cioè a quelli che si formarono per separazione di materie che erano sciolte o stemperate nell' acqua, allorachè il globo terrestre era fluido. I principali componenti del Serpentino sono la terra silicea, e la magnesia; la prima è della stessa natura di quella che compone il quarzo, e che in parte entra a formare il Feldispato; la seconda entra parimenti nella formazione del Feldispato stesso: onde appare che i componenti del Serpentino sono analoghi a quelli delle pietre componenti il granito, il quale certamente è orignario.

Più soddisfacente dell' Imprunetta furono per me le cave di macigno di Fiesole, siccome quelle in cui essendo la montagna anatomizzata dagli scalpelli de' Tagliapietre vi si vede l' interna sua struttura. Questo macigno altro non è che un sasso arenoso misto con poca terra calcarea, e spesso con mica tenue. Il suo colore è cenerino fosco, e talora verdiccio; il suo tessuto è uniforme, e la sua consistenza è grande, sebbene sia molto inferiore a quella de' graniti: e per tali proprietà si usa anche nella nobile Architettura. Per entro alle masse di macigno talora corrono lunghissime, e sottilissime vene di spato bianco, le quali spesso vi formano un piano quasi verticale. Non vi trovai però nissun indizio di corpi marini, o d' altri organizzati.

La disposizione di questo sasso è a strati regolari, e spesso tra gli strati di macigno sono frapposti altri strati minori di tutt' altra natura; cioè di uno schisto margaceo, che chiamasi Galestro, ed il quale spesso è mischiato con mica. L'inclinazione degli strati fu da me in varj siti trovata di gr. 20, e la direzione loro era 170. oc. ascendendo da 170. or. a 170. oc. ossia da *S q S e* a *N q N O*.

Gli strati di macigno, quelle masse cioè che sono distinte da naturali, e visibili commessure, hanno una varia grossezza, la quale spesso è di molti piedi. Più sottili però sono gli strati di Galestro, i quali generalmente sono poco più grossi di un piede.

Il *Ferber* (pag. 402. Lettres sur la Mineralogie d'Italie) che dice di aver veduto queste cave, e che ci descrive il macigno come *une espêce de schiste à base argilleuse, mêlé de beaucoup de mica, et un peu de chause,* mostra che l'osservare ed il vedere sono due cose diverse. Egli ha presa per macigno una varietà di quel Galestro, che suole formare strati alternativi col macigno.

In queste cave così come in altre di diversa qualità di sassi è rimarchevole la direzione, in cui conviene tagliare il sasso, affinchè facilmente si sfenda. Tal direzione, che chiamasi il *verso* del sasso, è parallela alle commessure ossia all' inclinazione degli strati. Anche i graniti hanno il loro verso, sebbene nelle loro masse generalmente non appaja veruna stratificazione. Ciò da alcuni è riguardato come un argomento per asserire, che queste masse sieno state formate da depositi di acque. Ma la conseguenza naturale è che tali materie furono sciolte o stemperate nell' acqua, e che da essa si separarono. Questa separazione può essere intervenuta in due modi, cioè o perchè le materie terree si accostarono al centro della terra più dell'acqua, il che riducesi alla deposizione: oppure in quanto che per qualche forza diversa dalla gravità come sarebbe per una forza centrifuga, le materie terree furono ritenute ad una distanza dal centro maggiore di quella, a cui le acque discesero. La prima maniera intervenne nella formazione dei monti secondarii, la seconda nei monti primarj: il che fu già da me spiegato nella Teoria della terra. Se il macigno sia di formazione originaria o secondaria, potrà forse determinarsi dopo ulteriori esami.

Da Fiesole ritornai a Firenze per incamminarmi a Vall' ombrosa, il che feci nel giorno seguente. Passai per Ponte a Sieve, ove la montagna mi presentò una pietra calcaria equabile di colore cenerino, e disposta a strati quasi orizzontali. Tre miglia più avanti vidi una marna micacea similmente stratificata. Discesi quindi a Pelago, nelle cui vicinanze non vidi che pietre calcarie equabili, o bianche, o verdiccie con vene sottilissime di spato. Di là per una continua, e ripida salita tornai ad ascendere, non incontrando se non macigni con schisti margacei, e calcarei. Questa perpetua monotomia di pietre e sassi altronde simili a quelli, che già io avea veduti venendo dal Modonese, mi avea tolta ogni voglia di osservare, sì che sonnacchioso appena mi reggeva in sella. Quando il calpestio del cavallo ripetuto da un ottuso eco mi risveglia; e mi trovo camminare su di un bianco, e tortuoso pavimento, che dolcemente ascendeva tra mezzo ad un immenso ed altissimo colonnato, che da ogni parte chiudeva l' aspetto del Cielo, e tra mezzo al quale il Sole più sereno non vi produceva, che un' ombrosa luce frammischiata spesso da vividi raggi, parte de' quali doravano le colonne con oblique scanellature, parte sul terreno di verd' azzurro muschio coperto formavano un Mosaico a brillanti. Non seppi allora decidermi se fossi in una scena, o in un bosco, ed in fine mi riputai entrato nel tempio della natura. Era infatti questo colonnato non altro che un folto bosco di altissimi Abeti simetricamente disposti, i cui dirittissimi, e quasi liscj fusti formavano colle ramose cime capitello insieme e volto; e colla loro spessezza lo chiudevano tutto all' intorno, lasciandolo altronde per ogni parte aperto. Parvemi allora, che il colonnato del *Bernini*, che chiude la grandiosa Piazza di S. Pietro, non avrebbe potuto essere, che l' atrio di una delle innumerevoli porte laterali di quel vegetante edifizio; e che il nostro Duomo, il quale per il gusto dell' Architettutura avrebbe potuto formare una parte del suo interno, non vi avrebbe fatta la figura se non di una Cappella. L'illusione cessò allorachè raddirizzatosi il cammino mi si presentò in lontananza una vasta, e ben architettata fabbrica, la quale in quell' alpestre sito mi parve non poter essere, che l' abitazione di persone amiche di solitudine. Allora mi avvidi, che io era giunto a Vall'ombrosa, e che all' industria di que' pii solitarj era dovuta quella bella coltura, che seppero dare a sterili montagne, e da cui in me derivò quella illusione, di cui, dico il vero, nissuna più piacevole fu mai da me provata.

In quel solitario ritiro, a cui finalmente giunsi, trovai un amica ospitalità; quella cioè che diffondesi anche verso molti, che colà cercano di mettersi all'ombra della grande estate. Tosto che vi fui giunto feci l'osservazione del Barometro, dalla quale conchiusi, che quel Monastero è elevato sul livello del mare piedi 3062.$\frac{3}{4}$. Nel giorno seguente esaminai que' contorni, e trovai che la montagna generalmente è composta di macigno simile a quello di Fiesole, il quale però deve essere più bibulo, avendo osservato che gli operaj solevano bagnarlo per renderne più facile il lavoro. Per entro agli strati di macigno correvano pure altri strati di marna micacea, o di schisto argilloso meschiato con molta mica, che colà chiamasi *sasso morto*, e talora anche di pietra calcarea mista con mica, la quale colà si suol cuocere per farne calcina.

Superiormente al Monastero sorge un dirupato scoglio di simile natura, su cui è fabbricato un Romitorio chiamato il Paradisino; ma che non è tale se non per chi avendo la mente rivolta ad oggetti superiori sa trovar piacere nel dolore, società nella solitudine. Il Portinajo di questo Paradisino mi vi fece vedere, e mi disse tante belle cose, che io pure vi avrei fissata la mia dimora, se la sua situazione fosse stata un poco più vicina al Cielo.

Le cortesi attrattive di que' pii Monaci m' invitavano a fa-

fare in Vall' ombrosa una più lunga dimora; ed i pregevoli prodotti naturali che per opera massimamente del Rev.^{mo} P. Abbate *Bucetti* vi sono raccolti, mi avrebbero anche data materia di occuparmi. Ma non volli avvezzarmi ai buoni alloggi per non essere ributtato dai cattivi, che alla montagna divengono pur tollerabili. Quindi nel giorno seguente m' indirizzai ad un altro Apennino, che chiamasi Vernia, o Alvernia. Questo viaggio, che è di 25. miglia, comincia da una lunga, e ripida salita, che convien fare per traversare il monte Mugnajo. Trovai questo monte composto di uno schisto arenario micaceo, che verso le cime massimaente si risolve in copiose terre, e sabbie, le quali dalle acque vengono poi successivamente trasportate nelle pianure ricolmando i letti dei fiumi. Vi si vede una decisa stratificazione, la quale ancora è più riconoscibile lungo il fiume, che si costeggia discendendo verso Pagliariccio per il corso di 8. miglia. L'inclinazione di questi strati in alcuni siti era di gr. 21. e questa sembrava abbastanza costante. Per entro agli strati arenarii micacei sono frammischiati anche schisti margacei cinericci, de' quali molti se ne vedono massime verso la cima del Mugnajo, e verso Pagliariccio.

Da questa terricciuola penetrai nella Valle del fiume Corsalone, lungo il quale fiume non incontrai se non sassi arenarii, e pietre calcaree equabili stratificate, e piene di screpolature, in molte delle quali veggonsi eleganti arborizzazioni, o dendriti, e perciò la pietra chiamasi *Alberese*. All'abbandonare questo fiume salii per una ripida strada, che conduce al Convento di Vernia situato quasi alla cima di questo monte celebre per la visione avutavi da S. Francesco. Era già notte, e la luna inargentava le pareti di quella solitudine, che travedevasi tra mezzo ad un magro bosco di melanconici Abeti. Io mi affrettava per giungervi, e vedendo che non mai mi avvicinava dubitai che allora il Convento stesso fosse rapito in alto da qualche estasi. In fine mi trovai alla porta chiusa del Convento, e le guide mi dissero, che esso era a quel medesimo sito, dove quell' ammirabile Santo erasi ritirato per farvi un lungo digiuno. Compresi allora, che quell' estasi Conventuale se vi fu, era terminata; ma la porta chiusa, ed il nome di digiuno fecero rimanere me più estatico, contemplando come in quello stato di cose si sarebbe passata la notte. L' Ospitalità però di que' buoni Solitarii presto mi trasse d' ogni angustia, e mi fece vedere, che quella porta non è chiusa se non a chi non vi sa entrare, e che il digiuno colà è solo per chi lo vuole.

In quel silenzioso luogo passai pertanto una tranquilla notte che prolungai fino a molte ore di giorno, e nulladimeno mi rimase tempo di portarmi alla mattina sulla cima del monte per misurarne l' elevazione, la quale trovai di piedi 3914. sul livello del mare; e poichè il Convento per le precedenti osservazioni è elevato 3410 $\frac{1}{2}$; perciò questo è distante dalla cima soltanto piedi 503 $\frac{1}{2}$.

Tutta questa montagna fu da me riconosciuta come calcaria mista spesse volte con rilegature di spàto, e con arena. La stratificazione verso la cima ha diverse inclinazioni, e direzioni; e talora trovai un inclinazione di gr. 21. colla direzione 147° Oc., ascendendo da SEq S a NOq N; talora l' inclinazione era di gr. 10. con una direzione 37° Or., ascendendo da SO a NE, ed in altri siti vi comparivano altre direzioni.

Da Vernia discesi a pernottare a Pieve S. Stefano, che ne è distante circa 8. miglia di cattivo, e montuoso cammino, nel qual cammino la montagna mi presentò ora sassi arenarii, ora pietre calcaree a strati quasi verticali, ora marne, ora Alberese a strati poco inclinati. Borgo S. Stefano è bagnato dal Tevere, che nasce non molto lungi da Vernia. Essendo allora questo fiume con pochissima acqua ne esaminai il letto, e non vi trovai che sassi della natura poc' anzi accennata.

Di natura non molto dissimile è pure la montagna sino a Viamaggio. Pietra calcarea bianca colà chiamata Colombina, na, altre pietre calcaree con frequenti vene di spato bianco, e pingue, schisti argillosi verdastri sono le materie più frequenti. Solo in poca distanza da Borgo S. Stefano si costeggia il piede di una montagna composta in gran parte di Gabro simile a quello dell' Imprunetta.

Da Viamaggio m' indirizzai tosto verso il Sasso Simone impaziente di riconoscervi una singolarità, per cui quel monte ha una certa celebrità; stimandosi che nella sua cima isolata esista un fonte di acqua perenne. Vi ascesi mentre soffiava un vento sì gagliardo, che mi dette occasione di riconoscere nei sassi un' utilità da me per innanzi non mai avvertita, cioè di somministrarmi un peso, nel carico del quale io non potessi essere sollevato in aria da qualche soffio eolico. A motivo di que' soffj impetuosi mi fu necessario per fare l' osservazione del Barometro, il sospenderlo alcune braccia al disotto della cima, affine di avvantaggiare del riparo d' una piccola eminenza. Dall' osservazione raccolsi, che questo monte era elevato sul livello del Mediterraneo piedi $3798 \frac{1}{3}$.

Cercai quindi di riconoscervi la enunciata fontana, e trovai che questa altro non era che un' acqua stagnante in una cisterna artefatta, che già serviva per raccogliervi le acque, allorchè su quella esisteva un Castello ora diroccato, e di cui sono ancora visibili molti vestigi. Tale cisterna però non è alla cima, ma vi soprasta un' ampia e non ripida pendenza; onde dalle liquefazioni delle nevi che vi risiedono per lungo tempo, come anche dagli scoli delle acque piovane dee certamente derivare quell' acqua che ristagna nell' accennata cisterna. Avvi bensì anche una sorgente naturale, ma questa è inferiore alla cisterna medesima, e forse anche da questa derivano per infiltrazioni le acque della sorgente stessa.

Il Sasso Simone da una parte va continuamente diroccando, e ne' diroccamenti vedesi, che esso è calcareo a strati non però molto riconoscibili; ed in esso sono talora miste al-

alcune vene di uno spato pingue. Poco sotto alla cima vi trovai alcune conchiglie fossili di un genere comune ne' nostri mari chiamato Pettine di mare (*Ostrea Pecten* Linn.). La pietra calcaria talora è mista con arene silicee, e con mica, e rassomiglia quasi a macigno; incontrai pure alcuni massi solitarii di pietra calcarea di un tessuto spatoso, e mista con arena, i quali erano del tutto simili ad altri che vidi alla Vernia, ed i quali sembrano essere sassi di trasporto, e non originarii della montagna su cui ora giacciono.

Se il sasso Simone non ha quella singolarità, che m' indusse a visitarlo, la montagna però in cui sorge meritava di esser veduta sì per la sua struttura, che per la situazione. Essa da lontano presenta una bella prospettiva a chi vi perviene dai Palazzi di Concellalto: presentasi cioè distinta in due dirupate eminenze, l' una delle quali è il Sasso Simone, ed appartiene al Gran Ducato di Toscana, l' altra chiamasi Simoncello, e spetta al Ducato di Urbino. Tra mezzo vi giace una concava Valle, che coperta di verdi, e copiose erbe fa un piacevole contrasto col dirupamento di quelle eminenze. Dalla cima del Sasso Simone veggonsi ondeggiare al disotto le montagne di Carpegna, del Ducato d' Urbino, e di altre Provincie dello Stato Romano, che tra Levante, e Settentrione si stendono sino al Mediterraneo, e tra mezzo alle quali sorge in vasta, e convessa mole il Monte Nerone, che allora era fatto più nero da nuvole temporalesche che bordeggiavano verso la di lui cima. L' aspetto dei monti di colà veduti è quello che avrebbe il mare, se nell' atto che è nella più ondosa tempesta venisse in un subito a congelarsi. Malamente però da questo aspetto ondeggiante altri conchiuse, che i monti vennero formati da depositi marini, quasi che l' ondeggiamento che ha il mare verso la superficie si stenda in simil modo anche ad ondeggiare i fondi, quando che ad una mediocre profondità i mari anche più tempestosi sono tranquilli.

Poco sotto al descritto sasso è situata Petrella, ove ebbi bi grazioso alloggio da' Sigg. Barboni proprietarii del sasso medesimo. Di là nel giorno seguente ritrocedetti a Viamaggio: nel qual cammino, che è montuoso, domina la materia calcarea, e margacea; ed in vicinanza di Concellalto, e di Viamaggio incontrai de' macigni isolati.

Proseguii il cammino verso Anghiari costeggiando il Tevere, che per alcune miglia va divagando per un' ampia Valle, ora alzando il suo letto, ora abbassandolo; e generalmente in questo cammino, che corre al piede de' vicini Apennini soprastanti a S. Sepolcro, non osservai se non sasso calcareo arenoso misto con mica. Solo a Monte Doglio vidi oltre la pietra calcaria, anche Serpentino.

Dopo di avere fatta l' osservazione barometrica, da cui conchiusi che Anghiari era più elevato del mare piedi 1242, presi la via di Monte Auto per giugnere in Arezzo. Andai per ripide salite sino sotto al Castello di Monte Auto, d' onde il cammino va continuamente discendendo sino alla Capanucce, ove la strada comincia a divenire, e prosegue piana sino a quella Città. Sotto Monte Auto il monte presenta diversi Serpentini e qualche quarzo; nel resto del cammino non s' incontrano se non schisti argillosi micacei, ovvero calcarei misti con arena, e mica.

Ad Arezzo mi rimisi sulla strada postale, che corre al piede delle Colline in più o meno distanza. Queste sono composte ora di sasso arenoso misto con terra calcarea e mica, ora di schisto margaceo con mica, e la loro stratificazione ora è quasi verticale, ora variamente inclinata. Col viaggio di 18. miglia giunsi a Camoscia luogo situato al piede del monte, su cui è situata Cortona. In distanza di circa 4. miglia da quella posta osservai uno schisto margaceo, che era singolare per la sua maniera di spezzarsi, presentando sempre una figura concoidale simile a quella che hanno le teste di colonne basaltine articolate. Al dopo pranzo salii a Cortona per esaminarne il monte, e sulla salita che comodamente si compie in meno di mezz' ora, osservai quelle due qualità di pietre, e sassi poc'anzi descritte. Nel sito più basso ne trovai gli strati inclinati gr. 11. colla direzione 57.° or. ascendente da 57. oc. a 57. or., ossia da SOqO a NEqE; laddove in altro sito superiore l' inclinazione era di 15. gr., e la direzione 28. or. ascendente da 28. oc. a 28. or., ossia da SSO a NNE.

Camoscia è quasi sui confini della Toscana, d' onde si perviene nello Stato Pontificio; ed io quì darò fine a questa lettera temendo di avere già oltrepassati i confini della discrezione, abusandomi forse della vostra pazienza.

LETTERA QUARTA.

Roma 10. *Agosto* 1792.

Dopo la quarta parte d' un Secolo io rivedo Roma, ma con altr' occhio di prima. Io non sapeva cercarvi che antichità, ed Architettura, allorachè non aveva ancora imparato, che la natura è più antica dell' antichità, e che le montagne sono meglio architettate delle fabbriche di Buonaroti. Al presente le statue, i bassi rilievi, gli anfiteatri, i tempj non sono da me guardati se non per riconoscere le diverse qualità di pietre, e per determinare da quali montagne furono tratte. Gli Antiquarj sono per me antiquati, e non cerco che mineralogisti, e minerali. La bella collezione di prodotti naturali del Sig. Cardinal Zelada, ed il Gabinetto mineralogico assai istruttivo del Collegio Nazareno, del quale fu fondatore, ed illustratore il pregiatissimo P. Petrini, furono le prime cose, che visitai. Mi detti parimenti premura di ossequiare l' eruditissimo Sig. Cardinale BORGIA, e di vedere il suo Museo, che io avea sentito essere d' antichità nel dritto, e di mineralogia nel rovescio. Avea cioè udito, che nella descrizione annessa a ciascun pezzo d' antichità egli avea indicato da una parte il soggetto rappresentato, e dall' altra la qualità della pietra, o del metallo, di cui è formato. Ma trovai, che questo Museo stava a Velletri, e presso dell' Eminentissimo Sig. Cardinale non vidi che diversi pezzi di nuovo acquisto, nei quali col giudizio di valenti Mineralogisti cercava di determinare la qualità delle materie. Mi fece egli l' onore d' interpellare anche me su di alcuni pezzi già da altri nomenclati, e talora ha sorriso nel vedere tra' Mineralogisti disparità di pareri: il che in altre occasioni avrà avuto il piacere di fare, anche sulle diversità di pareri degli Antiquarj nel determinare il soggetto rappresentato, e l' antichità o modernità del pezzo. Egli però che sa essere in ogni scienza più i problemi che le soluzioni, e che talora a scioglierli non basta l' autorità di uno o più Periti, ha l' avvertenza d' aggiugnere al giudizio il nome del Perito che lo formò. Io passerò per Velletri nell' andare a Napoli, ed il Sig. Cardinale già si è compiaciuto di prevenire il Sig. Cavaliere suo fratello, ond' io possa a tutto agio vedere quella insigne collezione.

Piacquemi oltremodo di vedere coltivati gli Studj naturali colà, d' onde escono formali giudizj sui miracoli, cioè sulle operazioni superiori alla natura, le quali certamente non possono essere riconosciute per tali, se non sapendo fin dove per natura si possa arrivare. Se io non sapessi quante attrattive abbia la Storia naturale per essere studiata, io avrei quasi riputato un miracolo l' introduzione di questi Studj in una Città, ove tutti cercano fortuna, e non sembrano essere fortunate se non la Teologia, e l' Antiquaria.

Ma io m' avveggo, che questa lettera finchè s' aggira per Roma, è fuori della strada Geologica; sebbene essendo Roma la Città delle Eminenze, potrebbe per altri titoli formar un oggetto anche per qualche Geologo. Comunque però siasi dovendo io dar conto a voi soltanto di quelle eminenze, che non pensano, ed alle quali si giugne col vigore anzi di buona gamba, che di buona testa, conviene che la mia lettera esca di Roma, ritrocedendo sino a Camoscia, onde ripigliare quel punto della strada geologica, nel quale si fermò l'ultima mia.

Nel passaggio adunque dalla Toscana allo Stato Ecclesiastico le eminenze di que' monti sono assai mediocri, e mutano alquanto di natura per rapporto alle precedenti. Fra Camoscia, e Torricella, che da questa parte è la prima posta del Ducato Perugino, prosegue bensì il calcario arenoso, ma dalla Torricella a Perugia non si vede che pietra calcaria marmorea ora rossa, ora cenerina. Alla Torricella si domina il Lago di Perugia dagli antichi chiamato Trasimeno, che altri forse riguarderà come un Cratere di Vulcano estinto. Sul cammino però sino a Perugia niente mi si presentò, che potesse confermare tale sospetto. Questà Città, che fu patria del gran maestro del massimo Raffaello, presenta più oggetti interessanti per gli amatori dell' arte imitatrice della natura, che pei naturalisti. Non ho potuto però essere indifferente per alcune sue opere, che pei viaggiatori fanno il pregio principale di quella Città.

La pietra calcaria sopraccennata prosegue per Assisi sino a Foligno; dalla qual Città feci una diversione a Nocera, che è un viaggio di circa 4. ore; ed in questo osservai che gli strati della pietra calcaria sono variamente inclinati, trovandosene anche alcuni quasi verticali massime in distanza di circa due miglia da Nocera. Salii quindi ai bagni, che ne sono distanti poco più di un miglio. Sul cammino osservai che la pietra calcaria, la quale tra' marmi può essere riposta, si scompone, e si screpola formando divisioni simili a stratificazioni. In una di queste l' inclinazione era di gr. 70. e la direzione tra 90. *N.* e 90. *S.* In altra al piede della salita riconobbi un' inclinazione di 24. gr. e la direzione 57. or. ascendente da *S O q O* a *N E q E*.

L' elevazione dei bagni sul mare fu da me calcolata di piedi 1590. ¼, e poichè la Città di Nocera è elevata soltanto di piedi 1448 ½, perciò quelli sono più elevati di questa piedi 141. ¼. Nel monte, d' onde scaturisce l' acqua de' bagni si depone a guisa di Stallactite una terra bianca, la quale ha la proprietà di raddolcire l' aceto. Sulle virtù di queste acque io niente dico, essendo già state esaltate dalle descrizioni, che altri pubblicarono.

Da Nocera ritornai a Foligno per diriggermi a Roma sul cammino comune. Tra Foligno e Trevi osservai nella pietra calcaria, che è pur rossa, la singolarità di avere una spezzatura concacea. La Pietra calcarea prosegue sino a Spoleto, ove il torrente non conduce se non sassi di simil natura.

Tra Spoleto, e Terni proseguono le stratificazioni calcaree; e queste in distanza di circa 4. miglia da Spoleto aveano un' inclinazione di gr. 31., e la direzione 118.° or., ascendente da *O N O* a *E S E*; un miglio al di là di tal sito l'inclinazione era di gr. 18., e la direzione, 6.° oc., ascendente da *N.* a *S.*

In questo tratto di cammino sorge la montagna di Soma, altrimenti chiamata la salita di Terni, che è molto ripida. Nella discesa osservai, che la montagna è composta di strati calcarei cinerini, e quasi orizzontali, alternanti con pietroselce di simil colore. Nel rimanente del cammino sino a Terni osservai la continuazione di altri strati calcarei di varia inclinazione, abbenchè fossero tra loro vicini.

Da Terni feci una scorsa alla celebre caduta delle Marmore, ossia del fiume Velino. Vi si ascende per una montagna a strati calcarei, ed allorachè si è alla distanza di circa mezzo miglio dalla caduta, si cammina su di un terreno quasi piano, che percosso dal calpestio o in altro modo rimbomba, come se al disotto fosse vuoto. Questo fenomeno proviene dall'essere quel terreno formato da croste Stallactitiche, o tartarose prodotte dai depositi delle acque del Velino, allora che per mancanza di sfogo esse si spandevano in quelle alture. La Storia ci assicura di questo fatto, come pure dell' origine di questa caduta, e di considerabili eminenze tortuose che in quelle vicinanze si osservano. Il fiume Velino che traè la sua origine nel territorio di Rieti ristagnava prima dell' anno 483. di Roma nella Valle Rietana, ove formava un Lago chiamato parimenti Velino. Il Censore Marco Curio

Dentato, che fu più volte Console, vi aprì un emissario formando la Cava Curiana, con cui le acque furono condotte a precipitarsi da quella caduta che tutt' ora esiste, e ad entrare nel fiume Nera, che va a scaricarsi nel Tevere. Nei tempi di mezzo questa Cava si ricolmò sì, che la Valle di Rieti si convertì nuovamente in Lago, e solo dai tempi di Martino V. si tornò a procurare con altri cavi lo sfogo di quelle acque, che non fu molto felice. Finalmente sotto Clemente VIII. venne riattata l' antica Cava Curiana, per cui di nuovo si ottenne compiutamente il divisato asciugamento.

In queste acque è sciolta, o stemperata una considerabile quantità di materia calcarea, la quale facilmente e copiosamente si separa formando poc' a poco concrezioni Stallactitiche simili talora a madrepore, per entro alle quali rimangono più o meno cavità secondo le diverse circostanze; ed allorachè tali concrezioni sono abbastanza compatte, formano quella pietra, a cui si suol dare il nome di Travertino. Tale proprietà fu già riconosciuta dagli antichi, ed anche da Plinio, il quale nel *Lib. II: Nat. Hist.* così scrive: *In exitu Paludis Reatinae Saxum crescit . . . . . . In Lacu Velino Lignum dejectum lapideo cortice obducitur.*

Essendo stata pertanto una proprietà costante di queste acque il formare copiose concrezioni tartarose, ed essendo queste state in diversi tempi diffuse su di un ampio spazio della Valle Reatina, appare la cagione, per cui quel terreno abbia la natura sopra indicata.

Coll' avvicinarsi alla caduta il rimbombo del terreno si va poc' a poco perdendo nello strepito ancora cupo delle precipitose acque, che nascoste pur anco rimangono dietro un imboscato scoglio, nè si presentano alla vista se non di chi passando per un' angusta fauce torce a destra il cammino. L' osservatore colà giunto rimane sbalordito dal fracasso delle cadenti acque, nè s' arrischia d' inoltrarsi se non preceduto da esperta guida. Allorachè si trova su di un piano, nel quale vede di poter cadere colla speranza di rialzarsi, rivolgesi colà dove già era col pensiero. Vede allora un fiume, a cui tutt' in un tratto manca il fondo, e la ripa, e che quasi sbigottito s' imbianca, e non più fluisce. Le sue acque sfioccate cadono, e quasi lottando s' affrettano di trovare il perduto alveo, nè l' incontrano se non dopo d' essere precipitate da un' altezza verticale di 814. piedi parigini. A tal profondità percuotono su di uno scoglio, dal quale una porzione scende spumosa al fiume Nera per un ripidissimo declive, la di cui caduta è di piedi 611.; altra porzione viene ripercossa in tenuissimi spruzzi, de' quali parte ricade in pioggia, parte va galleggiando in guisa di brumose nuvole, per entro alle quali il Sole bene spesso viene a vestire i suoi raggi d' iridati colori. In così violenta caduta l' acqua forse in altri modi ancora si trasforma; e forsechè qualche seguace della nuova teoria Chimica troverà, che colà una parte si scompone; e chi sa che allora non gli riesca di raccogliervi qualche ampolla di ossigene, e d' idrogene separato dal calorico. Diventerebbe allora questa Valle il più insigne Laboratorio chimico, come è forse tra le conosciute la più alta caduta di fiume. E veramente due sole a mia notizia sono le cadute d' acqua che potrebbero contendere con quella delle Marmore; cioè quella di Zumaco nel Perù, che si fa di 995. piedi (Prevost. Voy. tom. 13.), e l' altra ne' Pirenei al Circo di Marborè, la quale secondo le misure dei valenti Mineralogisti *Vidal*, e *Reboul* è di piedi 1256. ma in nessuna di queste è indicato, se sia tutta verticale; e la prima inoltre non sembra essere stata misurata se non a occhio.

L' altezza che io ho assegnata sì alla superiore che all' inferiore caduta non fu da me misurata, ma è quella che è riportata da Monsign. FRANCESCO CARRARA alla pag. 24. del libro intitolato; *La caduta del Velino an.* 1779., ove alla prima assegna palmi Romani 1063., ed alla seconda palmi 798., che corrispondono alle misure parigine sopraindicate; ed in tutto formano l' altezza di piedi 1672.

Dal piano sopradescritto si scoprono ad una certa distanza molte montagne dell' Abruzzo, le quali alla loro fisionomia io giudico calcaree: al qual giudizio però proveniente dalla consuetudine di osservare io sarò contento che voi deferiate almeno tanto, quanto stimerete potersi conoscere le qualità morali degli uomini ai lineamenti del loro volto assegnati dal Lavater, e da altri valenti Fisionomisti.

Terni è in situazione molto bassa essendo elevata sul livello del mare soltanto piedi 325 $\frac{1}{6}$. Di là però si torna ad ascendere per giugnere a Narni, e l'ascesa si fa per montagne calcaree. Discendendo da Narni si entra in altra Valle, d'onde per poggj e colli non molto elevati si perviene ad Otricoli. Questi colli o poggj sono parimenti di materia calcarea, il cui colore ora gialliccio ora rossiccio mostra una combinazione con ocra di ferro. Non potetti farvi molta osservazione, giacchè un temporale turbinoso mi obbligò ad affrettarmi verso Otricoli, ove fui contento di essere arrivato col solo accompagnamento di dirotta pioggia, essendomi sottratto ad un furioso turbine che giunse a scoprire alcuni tetti.

Avanzandomi da Otricoli verso Cività Castellana trovai il terreno di tutt'altra natura, siccome quello che è decisamente vulcanico. Traversato che siasi il Tevere si sale per una collina, che presenta una lava cenerina tempestata di cristalli poliedri quasi rotondi, di colore bianco spesse volte quasi cristallino. Questi per innanzi riguardavansi dai Mineralogisti come Granati scoloriti dall'azione del fuoco, ed il volgo li avrebbe potuti chiamare grandine impietrita. Al presente però da alcuni vengono chiamati *Pietroselci argillosi*, e da altri *Leuciti*. Qualunque sia il nome con cui piaccia chiamarli, essi certamente sono singolari per due motivi, primamente per la grande loro quantità, dipoi per il modo, con cui deve essere intervenuta la loro cristallizzazione.

Voi, che ottimamente conoscete il Vesuvio, immaginatevi, che mentre scorre una lava infuocata, e questa va ingrosgrossandosi per altra lava che vi sopraggiugne, cada dal cielo una copiosa grandine, la quale al momento vi s' impietrisca. Tal lava raffreddata rassomiglierebbe appunto a quella di Otricoli. Non voglio però con questo dire, che quei cristalli sieno entrati nella lava già formati. Io anzi stimo che la materia bianca, di cui sono formati, sia stata molle quando entrò nel rimanente della lava che per essa era fluida: perciocchè in molti cristalli vedonsi racchiuse certe masserelle di lava cenerina informe simile del tutto a quella, che costituisce la pasta di quelle masse vulcaniche. Per ispiegare la formazione di que' cristalli sembrami doversi dire, che il fuoco vulcanico sotto terra abbia trovate, e fuse due grandi masse tra loro diverse, l' una di pietroselce, l'altra di sostanze miste, e che le abbia contemporaneamente eruttate ambedue in forma di pioggia, nella quale le gocce di pietroselce fossero distinte da quelle composte di altra materia. Posta la qual cosa facilmente intendesi come le gocce di pietroselce come omogenee si sieno cristallizzate, l' altra materia come più eterogenea sia rimasta informe impastando i cristalli medesimi. Tal maniera di spiegazione può anche aver luogo per altre simili lave, in cui incontransi frequenti cristallizzazioni di scerli, di Feldispati, e simili.

Que' cristalli granatiformi sogliono essere molto fragili, sì che difficilmente se ne può estrarre alcuno intiero: il che sembra doversi ascrivere ad una specie di scomposizione, che v' interviene per essere esposti alla superficie del terreno. Ma quando fossero tratti da una recente escavazione fatta ad una certa profondità, dovrebbero essere abbastanza consistenti.

Sulla lava descritta, come anche in altri luoghi di que' contorni veggonsi tufi vulcanici, e terre similmente vulcaniche, in cui vedesi una mischianza di ciottoli calcarei, di corniole, e di altre specie di pietre. Tra i ciottoli calcarei, che sono certamente fluitati, molti sono dendritici, cioè a dire sono Alberesi arrotondite simili del tutto a quelle, che io già osservai nelle vicinanze del fiume Corsalone nella Toscana.

na. Da che vuolsi conchiudere, che le terre, da cui sono ricoperte quelle lave, furono trasportate per azioni di acque; nè è difficile ad intenderne il modo. Il Corsalone si scarica nel Tevere, il quale corre tra Otricoli, e Cività Castellana. Questo fiume per antico potè facilmente essere più elevato, e colle sue escrescenze giugnere a quelle piccole elevazioni, in cui ora sono quelle materie parte vulcaniche e parte fluviatili. L' essere miste colle vulcaniche le materie fluviatili provenienti da montagne superiori è argomento, che le vulcaniche furono trasportate da un sito superiore a quello, in cui ora si trovano; e se nei contorni superiori si trovassero indizj vulcanici, come io stimo dovervi essere, e massime di Terni, ed Otricoli, non potrebbe dubitarsi che realmente il deflusso del Tevere altre volte più elevato avesse accumulate tra Otricoli, e Cività Castellana quelle materie miste. Potrebbe poi la cosa spiegarsi anche per le acque di una straordinaria, e generale inondazione.

Materie vulcaniche incontrai parimenti sul cammino a Cività Castellana, d' onde proseguii il viaggio a Roma non per la strada nuova che mette sulla strada di Viterbo, ma bensì per la vecchia ora quasi abbandonata che passa per Rignano, e Primaporta. Per tutto questo tratto da Cività Castellana a Roma, che è di circa 34. miglia non veggonsi che tufi vulcanici, in cui riconoscesi anche una certa stratificazione. A prima posta osservai tra questi copiose pomici nere, scerli, Feldispati trasparenti, e ciottoli rotolati. Ivi questi tufi formano diversi poggj di piccola altezza, ne' quali l' arte scavò diverse grotte; ed in queste vidi, che i massi aveano grandi sfenditure, altre verticali, ed altre transversali, i cui piani erano talvolta tra loro distanti sino a 4. pollici: il che vuolsi ascrivere o a contrazione della materia, o a tremuoti.

Al fianco di Rignano sorge solitario un monte conico, ed acuto di mediocre altezza, la quale però sorpassa tutte le circostanti eminenze. Io divertii il cammino per visitarlo, ma da pioggia che sopraggiunse fui distolto da tal pensiero, e coe così proseguii sino a Roma il cammino, che si compie per continui poggj, nei quali generalmente non appare che tufo vulcanico.

Ecco ora la mia lettera ritornata ove tuttavia mi trovo, e d' onde feci una scorsa a Monte Mario, della quale brevemente vi aggiungo i risultati. Questo monte non è che un piccolo Colle situato un miglio fuori di Porta Angelica. Esso è elevato circa 450. piedi sul livello del mare, ed è composto d' un tufo calcareo, e di sabbie, in cui trovansi conchiglie marine, quali sono Ostriche, Pettini, Cardii, e simili. Le Ostraciti sono situate nella parte superiore, e sono di una considerabile grandezza, e ben conservate; laddove i guscj delle altre conchiglie per lo più sono sfrantumati, ed anche distrutti. Questo stato delle Ostraciti potrebbe far credere che le Ostriche sieno state ancora viventi, mentre i vermi degli altri testacei nominati erano già periti: e che perciò in tal luogo abbia il mare fatta una lunga permanenza. Questa asserzione però sarebbe appoggiata ad un troppo leggiero fondamento: giacchè con una generale e breve inondazione felicemente si spiega l' accennato, ed ogni altro fenomeno, che sembra prodotto da una lunga permanenza di acque sulla superficie terrestre, o da diverse inondazioni in epoche tra loro molto distanti. Certamente in una generale inondazione dovettero formarsi innumerevoli, e grandi correnti, ognuna delle quali poteva trasportare corpi di diversa natura. Così dunque in un giorno poteva giugnere in un dato luogo, per esempio al Monte Mario una corrente carica di Pettini, e Cardii in parte sfrantumati, e depositarli ove ora giacciono. Nel giorno seguente o dopo lo spazio di alcuni giorni poteva sopraggiugnere un' altra corrente carica di Ostriche miste parimenti con arena, e depositare queste materie sul primo sedimento, come ora si trovano. I grandi fenomeni, che presenta la superficie terrestre, come non possono essere stati prodotti, così non possono essere spiegati se non per una grande cagione; ed una sola inondazione ge-

generale del globo terrestre intervenuta dopo l' abitazione di esso, la quale è attestata dalle più esatte osservazioni, è più che sufficiente a spiegarli, allorchè si riguardi come di breve durata.

LETTERA QUINTA.

Napoli 18. *Agosto* 1792.

Già sono tre giorni, da che sono giunto nella clamorosa Napoli, ove per le strade tutti gridano per farsi capire, e nissuno s' intende. In tutto questo tempo io non ho fatto che viaggiare per la Città, affine di procurare le opportune disposizioni per il viaggio sulle coste marittime sino alla Calabria. Tutti però mi dissuadono dall' intraprendere tale viaggio in questa calda stagione a motivo dell' aria pestifera delle spiagge, la quale mi dicono essere stata per molti mortale, senza che nissuno di essi sia risuscitato neppure per intercessione di S. Gennaro. Ma io sono troppo avanti per tornare in dietro; altronde non so inoltrarmi di più per timore di non poter ritrocedere; onde non so ancora decidermi. Intanto io vado disponendo le osservazioni, che vi potrei fare, e metto in ordine quelle, che ho fatte da Roma a Napoli, le quali comunque esse sieno, sono pur quelle, che ora vi espongo.

La prima giornata andai per la strada d' Albano a Velletri, ove potetti a comodo esaminare anche nel rovescio il rinomato Museo Borgiano, e vedervi diversi pregevoli minerali, di cui l' Eruditissimo Sig. Cardinale lo ha aumentato. Camminasi quasi sempre su tufo vulcanico, il quale continua anche sino verso Cisterna al piede del monte Artemisio, e dei monti di Core. Scorgesi però massime tra Albano, Velletri, e Cisterna, che la base dei monti è calcarea; della qual natura sono certamente anche gli altri che continuano per Piperno sino a Terracina. L' origine di que' tufi, e di al-

altre materie vulcaniche trovasi massimamente nei due Laghi d' Albano, e di Nemi, i quali devono essere Crateri di Vulcani estinti. In questi Vulcani devono pure essersi formate quelle nuvole, che produssero le piogge di sassi tante volte rammemorate da *Livio*, le quali da alcuni furono già riguardate come favole, ed al presente non possono più essere richiamate in dubbio, se non da chi ignora gli effetti ora notissimi del Vesuvio, e di altri Vulcani tuttavia ardenti. Erano al tempo dei Romani molto frequenti queste piogge infeconde, provenienti da diversi Vulcani, e nella loro religione era stabilito, che ogni qualvolta accadesse un simil prodigio, di cui essi ignoravano forse la cagione, si dovesse fare una sacra novena per placare gli Dei. Nell' anno 207. prima dell' Era comune una di tali novene tosto succedette all' altra, come appare da Livio, che nel Lib. XXVII. così si esprime. *Novendiale sacrum fuit, quia Veiis lapidaverat . . . . inde iterum novendiale instauratum, quod in Armilustro lapidibus visum pluere*. La prima di queste piogge pietrigne si scaricò nelle vicinanze della Storta, e di Baccano lungi da Roma non più di 20. miglia, ove anche al presente si riconosce il terreno vulcanico; la seconda, che fu veduta in occasione di una Lustrazione militare, provenne forse da un' altra eruzione delle vicinanze medesime. Abbiamo però da *Livio* rammemorate molte piogge pietrigne, che devono riferirsi ad eruzioni proprie del monte Albano, e delle sue vicinanze. Nel Lib. I. *Nuntiatum Regi patribusque est in monte Albano lapidibus pluisse, quod cum credi vix posset missis ad id visendum prodigiis, in conspectu, haud aliter quam cum grandinem venti in terras agunt, crebri cecidere cœlo lapides . . . Romanis quoque ab eodem prodigio novendiale sacrum publice susceptum est, seu voce caelesti ex Albano monte missa (nam id quoque traditur), seu haruspicum monitu mansit certe solemne, ut quandocumque idem prodigium nunciaretur, feriae per novem dies agerentur*. Nel Lib. XXII. *Romae in Aventino, et Ariciae nunciatum erat* *sub idem tempus lapidibus pluisse, et multo cruore* [*Signa in Sabinis coedis*] *aquas e fonte calidas manasse*. Nel Lib. XXII. *Tempestates factae fuere in Albano monte, biduum continenter lapidibus pluit . . . Sol rubere solito magis sanguineoque similis*. Nel Lib. XXXV. *Ariciae et Lanuvii, et in Aventino lapidibus pluit*. La prima di queste quattro piogge avvenne nell' anno avanti Cristo 550., la seconda nel 216., la terza nel 209., la quarta nel 193. Nelle eruzioni dei Vulcani tutt' ora accesi spesso a motivo dei vapori, che esalati ne vengono, il Sole sembra tinto di color sanguigno, e non di rado escono fonti calde; vedendosi altronde, che i contorni di Albano, e della vicina Ariccia sono coperti di materie Vulcaniche, non può dubitarsi, che queste sieno ancora i residui di quelle piogge rammemorate da *Livio*. E' però da osservare, che se il Lago di monte Albano fu un Cratere vulcanico, da questo certamente non uscì quella pioggia di sassi, che da *Livio* è rammemorata sotto l'anno 216. e 209. avanti Cristo. Perciocchè quel Lago già esisteva quasi 200. anni prima, come appare da ciò che sotto l' anno di Roma 356., ossia 397. avanti l' Era cristiana scrive nel Lib. V. *In unum omnium curae versae sunt, quod Lacus in Albano nemore sine ullis caelestibus aquis, caussave qua alia, quae rem miraculo eximeret, in altitudinem insolitam crevit*: E tal Lago è quello, che sino ad ora si è conservato. Perciocchè in occasione di quel prodigio fu consultato l' oracolo di Delfo; ed avendo i Romani avuto per risposta, che non sarebbero vinti i Vejenti, se non quando avessero fatta una solenne emissione di quel Lago, conducendolo non al mare ma disperdendolo pei campi, questa emissione fu eseguita prima del termine di due anni: *Jam ex Lacu Albano aqua emissa in agros*, come scrive *Livio* nel citato Libro. Ora anche al presente esiste al Lago d' Albano un emissario: e per negare che sia quello stesso, che fu allora eseguito, non basta ciò che nella lettera XIV. osserva il *Ferber*, cioè che sia ad un livello più basso dei circostanti campi. Perciocchè questa emissione propriamente non sembra essere stata ordinata in vista di irrigare i campi; e quand' anco così fosse, pure le seguenti eruzioni provenienti da altri Crateri potettero rialzare i terreni molto al disopra del livello dell' emissario. La sopraccennata pioggia di sassi, che durò due giorni, era ben atta a produrre tal effetto; e probabilmente essa fu eruttata dal vicino Cratere, che ora costituisce il Laghetto di Nemi. Del resto essendo manifesto, che nei contorni d' Albano agirono i Vulcani sino dai tempi del Re Tullo Ostilio, ossia 650. anni avanti l' Era Cristiana, facilmente si spiega quella prodigiosa elevazione del Lago d' Albano, derivandola cioè da forza vulcanica.

Da Cisterna proseguii il viaggio non per la vecchia strada ora abbandonata, che passando sotto Sezze va a Piperno, e di là a Terracina, ma bensì per la nuova, che taglia per il lungo le Paludi Pontine su una dirittura di 18. miglia, e più. Se la stagione me lo avesse permesso, avrei volontieri passeggiato per le *Bonificazioni Piane*, che così sembrano potersi ora chiamare quelle Paludi dopo l' asciugamento, che di una gran parte di esse fu fatta dal Magnifico Pontefice Pio VI. Dagli ampj granaj, che si sono di nuovo costruiti a Terracina, si può congetturare che i nuovi campi sieno copiosi nel prodotto di grani, e che si riguardino come di perpetua durazione. L' essersi dati in enfiteusi a diversi privati que' fondi restituiti all' Agricoltura farà certamente, che anche i privati stessi s' interessino ad impedire che non ritornino allo stato di Paludi. Finora però l' aria non vi si è molto migliorata, rimanendovi ancora de' bassi fondi, e de' laghi ancora più bassi, i quali insieme a qualche altra cagione forse non avvertita producono nocive esalazioni. Per il rapporto che hanno queste Paludi colle variazioni delle acque marine esse possono formare un oggetto di osservazioni geologiche.

Coll' avvicinarmi a Terracina le montagne parimenti nuovamente mi si avvicinarono, ed in esse riconobbi una materia calcarea, gialliccia. In qualche sito pure la superficie del monte era rossa bruna, sì che rassomigliava ad un ocra di ferro abbrustolita. Ma per timore di non esser io arrostito dal Sole, che già era vicino al meriggio, non stimai di ascendervi per riconoscerla. Non è però difficile, che questa materia sia un residuo di alcuna di quelle piogge di sangue, che tante volte sono rammentate dagli antichi, le quali per lo più dovettero essere acque tinte di rosso, che eruttate da qualche Vulcano venivano da venti in lontane parti trasportate. Comunque siasi sembra, che in quelle vicinanze abbia agito qualche Vulcano; giacchè *Livio* nel Lib. 35. all' anno 191. prima dell' Era Cristiana rammemora alcune piogge di sassi accadute a Terracina.

Poche miglia al di là di Terracina si perviene sulle terre del Regno di Napoli, costeggiando il piede della montagna, che è calcarea. Di simile natura è pure la montagna sino a Mola di Gaeta, ove si perviene traversando la ripida salita d' Itri, sulla quale riconobbi, che tal pietra vi è disposta a strati.

Da Mola di Gaeta per bassi poggj si perviene nelle pianure della già deliziosa Capua, e per esse a Napoli. Questi poggj sono tutti formati di tufi Vulcanici, in cui trovai copiose pomici. A S. Agata, che è due poste al di quà di Capua, osservai alcune muraglie costruite con solide Lave: il che dà argomento da credere, che nelle vicinanze esista qualche Vulcano estinto. La vicina montagna, che, andando verso Capua, sorge alla dritta, mi sembrò avere nella cima la figura di un Cratere Vulcanico, e di là forse uscirono correnti di Lave solide, e gran parte di quelle materie che ricoprirono quelle pianure, e formarono que' poggj: osservai pure tra que' poggj medesimi diversi rinvallamenti quasi rotondi, i quali forse furono altrettante voragini, da cui furono eruttate le sopraindicate materie. Le montagne però, che alla distanza di più miglia sorgono a fianco della strada, hanno una fisonomia del tutto calcarea.

Così ho terminata l' esposizione delle osservazioni finora da me fatte; ma sempre più rimango in dubbio se potrò ulteriormente proseguirle sino nella Calabria, giacchè da questo viaggio vengo dissuaso anche dal Ministro Plenipotenziario di S. M. Brittannica il Sig. Cavaliere *Hamilton*, che più di altro conosce lo stato antico e moderno di quelle Regioni. Al lodato Cavaliere oggi ho presentati i vostri complimenti, che da lui furono assaissimo aggraditi. Stava allora Ladi al Cembalo, e si compiacque di farmi sentire un' aria, a cui essa seppe dare tutte le bellezze sue proprie. Io, che non sono molto Filarmonico, non seppi farle altro complimento, se non dicendo che il suo canto meritava di essere perpetuato da qualche eco; e quasi m' impegnai a trovarne alcuno nei monti, sperando di poterlo rinvenire colà, dove gli Usignuoli più volentieri fissano la loro orchestra. Uno di tali siti parevami di avere altra volta osservato sul Lario. Stendevansi le acque di questo Lago entro una larga spaccatura di monte, una delle cui pareti sorgeva diritta e liscia. Dalle fenditure dell' opposto fianco erano cresciuti vigorosi faggi, che coi loro fronzuti, ed incurvati rami formavano quasi un Plafone. Di colà io sentii per una quasi intera notte escire il canto di un Usignuolo, il quale ora con dolenti Recitativi enunciava certe sue sventure, ora con arie allegre sembrava cantare qualche futura sua speranza. Io di certo niente intendeva; ma non mi pareva che potessero esser continuate le stesse modulazioni, e per sì lungo tempo, se non fossero ripetute da un eco perpetuo. Se veramente la cosa era così, come immaginai, voi direte come sognai, si avrebbe il modo di fare il ritratto delle belle voci, come colla pittura si ritraggono le figure ed i colori delle persone.

LETTERA SESTA.

Salerno 29. *Agosto* 1792.

Nei giorni seguenti all' ultima mia io sono stato come Cesare al Rubicone, incerto cioè se dovessi avanzarmi verso la Calabria, o ritrocedere dall' assunto divisamento; e forsechè a risolvermi io ho dovuto pensare più di Cesare stesso: perchè alla fine egli aveva un esercito da far precedere, per vedere come la cosa andava; ed al caso era a tempo a mettersi egli in salvo; ma nel caso mio io doveva andar innanzi, ed essere accompagnato, e seguito solo da me stesso, e trovarmi spesso circondato dal nemico, cioè da arie mortali. In ogni modo io ho considerato che un male preveduto è mezzo rimediato, e l' altra metà di rimedio io ho creduto di poter trovare nei consiglj, e nei favori, di chi avea interessamento alla mia salute. L' Eccellentiss. Sig. Principessa *di Cerace*, che sulla sua propria esperienza mi dissuadeva da quel viaggio, vedendo che io era risoluto ad intraprenderlo, si compiacque di procurarmi tante lettere commendatizie per tutti i siti di buon' aria, che io mi sono creduto di dover fare anzi una villeggiatura che un viaggio. Io dunque già accordai una speronara maltese, che ho mandata a Vietri, luogo poco lontano da Salerno, ma di aria non sospetta, ove m' indirizzai per la via di terra. Giunto a Castell' a mare, dovetti colà trattenermi, essendo stato avvisato che per il viaggio di mare è necessario il passaporto; ed ho dovuto spedire a Napoli per procurarmelo. Profittai intanto di questo tempo d' aspetto per scrivervi alcune osservazioni che feci nelle vicinanze di Napoli, differendo a chiuder la lettera a Salerno, ove ora mi trovo.

Il Vesuvio finora non fu da me visitato, nè gli farò visita veruna, sì perchè già è stato da molti esaminato, e sì anche perchè nelle variazioni del globo terrestre i Vulcani non sono che cagioni parziali, laddove io ho in vista di riconoscere gli effetti di cagioni generali, le quali dalle acque provengono. Stimai però di fare qualche diligente osservazione sul monte nuovo, siccome quello, che, essendo stato formato nel 1538. da un' eruzione vulcanica descrittaci da Autori contemporanei, può somministrare dei dati per valutare in genere certi effetti dei Vulcani che sembrano incredibili. Ne rilevai primamente la sua forma; e trovai che esso consiste in un Cratere ben deciso formato a guisa d' imbuto, ossia di Cono rovesciato e troncato. Il fondo del Cratere è quasi al livello del mare, avendo io trovato essere quello più elevato di questo solamente di 19. piedi. La larghezza del Cratere stesso sul fondo è circa di piedi 515. Le sue pareti sono poco inclinate e di altezza quasi dappertutto uniforme; ma verso Pozzuoli sorge un' eminenza che è considerabilmente superiore al rimanente delle pareti stesse. Io misurai questa eminenza, che è la cima più elevata del monte nuovo, e trovai che la sua elevazione sul livello del mare era di 414. piedi.

Misurai parimenti l' inclinazione più uniforme della pendenza del monte, e trovai che coll' orizzonte formava un angolo di gradi 18. Da questa misura, e dall' accennata altezza si possono determinare diversi oggetti relativi a questo monte, supponendo che esso sia di figura conica come press' a poco sogliono essere i monti vulcanici. Primieramente rilevasi, che il diametro della sua base è di piedi 2548., e che la circonferenza del medesimo è di piedi 8000. Inoltre la solidità di tutto questo Cono è di piedi cubici 703,951,148. Il vacuo del Cratere fu da me calcolato in piedi cubici 85,135,930. Onde deducendoli dalla solidità del Cono, rimangono 618,815,218., cioè quasi 619. milioni di piedi cubici per la quantità di materia vulcanica di questo monte.

Da queste misure possono correggersi alcune inesattezze storiche; e le storie stesse così corrette potranno quindi servire ad illustrare molti fenomeni vulcanici. Due sono gli

Scrittori contemporanei che lo descrissero, e di cui il *Ferber* riportò gli estratti. L' uno è *M. Antonio delli Falconi*, che scrisse una lettera intitolata *Dell' incendio di Pozzuolo*; l' altro è *Pietro da Toledo*, che pubblicò il *Ragionamento del terremoto, del nuovo monte ec. nell' anno* 1538, e fu stampato a Napoli nel 1539. *M. Antonio delli Falconi* ascrive al monte nuovo non meno di 3. miglia di circonferenza, cioè circa 13500. piedi: il che non può ammettersi se non comprendendo nella circonferenza del monte le materie alcun poco rilevate, che cadettero nei contorni della sua base. Ma propriamente non dee riferirsi al monte se non quella materia, che è racchiusa da un Cono, che dal vertice più elevato si stende sulla superficie montuosa sino al livello del mare; ed in tal modo la base propria del monte non ha più di 8000. piedi di circonferenza, cioè quasi due miglia.

Quanto all' altezza *Pietro da Toledo* vi assegna più di 1000. piedi, ed il *Ferber* 2400., quando che io la trovai soltanto di 413. Questo divario di misure non dee far maraviglia, giacchè da que' due Scrittori l' altezza dovette essere stata estimata a occhio. Ciò che dee essere strano si è la differenza, che passa tra la misura da me calcolata, e quelle enunciate dall' egregio Sig. Cavaliere *Vivenzio*. (Storia de' tremuoti tom. I. p. 8.): le quali tutte sembrano prese coi Barometri. Egli scrive di averla trovata di piedi inglesi $1127.\frac{5}{12}$, che corrispondono a piedi parigini $1050.\frac{2}{3}$, e che al Sig. *Swinburn* risultarono piedi 200. La differenza tra le mie misure e quelle di *Swinburn* potrebbe facilmente conciliarsi, dicendo che egli forse misurò una qualche altezza del bordo immediato del Cratere, il quale è considerabilmente più basso della cima da me misurata. Ma la misura trovata dal Sig. Protomedico *Vivenzio* è troppo più grande della mia; ed altronde io non posso aver dubbio sulle mie osservazioni e della loro calcolazione. Tre io ne feci, l' una alla cima, l' altra nel piano del Cratere, e la terza al livello del mare;

ed è bensì vero che tali osservazioni non furono esattamente contemporanee, essendovi stata la differenza di un' ora tra la prima e la seconda, e di altrettanto tempo tra la seconda e la terza; ma tal differenza di tempo in una giornata serena, e tranquilla non può aver prodotto una sensibile diversità nell' esattezza dei risultati, e tanto più io li stimo alieni da errore, in quanto che io calcolai separatamente l' altezza tra la cima ed il piano del Cratere, e l' altra tra il piano del Cratere, ed il livello del mare, e trovai che la loro somma era quasi eguale all' altezza totale calcolata tra la cima ed il livello del mare, abbenchè queste due corrispondenti osservazioni barometriche fossero state fatte con una differenza di due ore. Se nelle osservazioni barometriche non intervenne errore e la cima misurata è la stessa, potrà forse la diversità dei risultati derivare dall' Elettricità o da qualche altra forza simile alla magnetica, che dall' azione vulcanica proceda, e che agisca sul mercurio dei Barometri; ed in tal caso converrà togliere il dubbio sulla vera altezza del monte nuovo misurandola coi metodi geometrici.

La materia di cui è composto il monte consiste in un ammasso informe di terre, e pietre abbrustolite, o per innanzi liquefatte cioè di pomici, di lave fibrose, e solide e porose, in cui si trovano anche scerli, e Feldispati. Talora anche massime nei contorni del Cratere trovansi sfioriture saline, e principalmente alkaliche. In nessun luogo osservansi correnti di lave, e vedesi, che tutte le materie furono confusamente eruttate dal Vulcano come accennano anche gli Storici. Tra le cose, che volli osservare più diligentemente, fu la consistenza, che nel corso di due secoli, e mezzo presero le materie terree, e sabbiose; e riconobbi in molti siti, che esse già formano un tufo molto solido, che non si può rompere se non con picconi, e scalpelli. Questa osservazione mostra essere vana l' opinione di quelli, che dal vedere molte montagne ora di dura pietra, la quale per innanzi dovette essere molle terra, si argomentano che alla consolidazione lo-

loro fosse richiesto un tempo molto maggiore di quello, che le Storie assegnano all' origine della terra. Se non che altri esempj abbiamo di simili consolidazioni fattesi in brevissimo tempo. Così *Scipione Falcone* nel libro intitolato, *Discorso naturale delle cause, ed effetti del Vesuvio* assicura, che le ceneri eruttate dal Vesuvio nell' anno 1631. divennero dure come pietra pochi giorni dopo di essere state eruttate. Queste così pronte consolidazioni non faranno maraviglia se si considererà, che il Vulcano sì del Vesuvio nel 1631., come del monte nuovo nel 1538. eruttò materie terree miste con acqua, e verisimilmente anche con sali: per la qual mischianza la consolidazione interviene più rapidamente massime se intervengano parti ferruginee, come sogliono esservene nelle materie vulcaniche. Nè solo in materie vulcaniche, ma anche in altre depositate da acque spesse volte interviene un pronto impietrimento. I Travertini, che si formano dai depositi del fiume Velino, e del Teverone, come pure i Stallactiti calcarei ne presentano quotidiani esempj.

L' eruzione del monte nuovo fornisce un altro argomento per annullare una pruova, che alcuni pretendono di dare della grande antichità del tempo. Fu già osservato dal *Braccini*, che dietro il monte Somma eranvi sei, o sette strati di materie vulcaniche alternanti con strati di terra vegetale, e ciò in un altezza soltanto di 23. palmi. Il Sig. *Barone di Dietrich* nelle note alla *Lettera* 11. *di Ferber sull' Italia* scrive, che in vicinanza di Portici si trovano parimenti strati di lava, che talora sono sei, tra' quali pure è frapposta terra vegetale. Simili alternazioni di lave, e di terra vegetale furono da altri riportate come esistenti in altri siti ancora; e quindi alcuni conchiusero, che tale soprapposizione non potè compirsi se non in una serie d' innumerevoli secoli. Questa conclusione è appoggiata principalmente sull' ipotesi, che quelle terre vegetali ora frapposte a lave sieno state campagne coltivate in quel luogo ove ora si trovano, o che sieno risultate da scomposizioni di lave solide. Ma l' eruzione del Monte nuovo mostra apertamente, che queste ipotesi sono gratuite. Gli Storici contemporanei ci narrano, che nella formazione di esso il Vulcano gettò fuori un' immensa copia di ceneri fangose miste or più or meno con acqua, sì che non solo Pozzuoli, e le vicinanze, ma anche le case di Napoli furono ricolmate di quella fanghiglia. Ora questa era certamente atta alla vegetazione: perciocchè i terreni, che ne furono ricoperti massime nelle vicinanze di Pozzuoli, seguitarono dopo l' eruzione ad essere coltivati, e tutt' ora non solo si coltivano, ma vegetano assai più vigorosamente degli altri campi dell' Italia. Che anzi nel fondo stesso del Cratere del Monte nuovo, il quale si lasciò sempre abbandonato alla natura, vegetano spontaneamente varie specie non solo di erbe, ma anche di alberi, ed arbusti. Questo Vulcano dunque eruttò materie atte alla vegetazione sino dal primo momento della loro eruzione, così che se mentre esse volavano verso la Calabria vi si fosse gettata semenza di Cavoli, questi stessi sarebbero forse nati e cresciuti in aria. Simili eruttazioni di fanghiglie sono rammentate da altri anche nel Vesuvio, e nell' Etna; onde quell' alternazione di terre vegetali e di lave si può spiegare come intervenuta in brevissimo tempo, dicendo cioè che in una stessa eruzione il Vulcano gettò alternativamente ora terre vegetali, ora lave fluide. Questa spiegazione è tanto più verisimile, in quanto che sembra ora abbastanza certo, che molti Vulcani comunicano col mare: posta la qual comunicazione una grande quantità di terre costituenti i fondi di mare possono entrare nel Cratere, ed essere quindi gettate fuori dell' orificio superiore; e poichè tali terre o sono, o facilmente possono essere atte alla vegetazione, perciò intendesi facilmente come le terre vegetali si trovino frapposte a lave. Sembrami per altro che ancora rimanga da verificare in molti casi, se le terre enunciate come vegetali, e frapposte a lave sieno veramente tali. A tutto questo piacemi aggiugnere l' osservazione fatta dal *Braccini* esposta nella sua descrizione del Vesuvio. Questo Vulcano rimase tranquillo dall' anno 1139. sino al 1631. Avendone egli visitato il Cratere alcuni anni prima dell' eruzione intervenuta l'accennato anno 1630., lo trovò coperto non solo di piante, ma anche di grossi alberi, come sono querce, frassini, ed olmi, tutto che da alcune caverne escisse ancora fumo: il che prova ad evidenza, che nel corso di soli cinque secoli quel terreno vulcanico divenne più che atto alla vegetazione; e che perciò quelli che calcolano l'età dei Vulcani dalla vegetazione sulle materie eruttate, si appigliano ad un argomento molto fallace.

Sebbene dal Monte nuovo dopo la sua formazione sino a' nostri tempi non sia escito fuoco, pure convien dire che anche al presente sotto di esso e nelle sue vicinanze continui la combustione di diverse sostanze. Perciocchè le sabbie, che si estraggono dalla vicina spiaggia, hanno un calor tale che appena si possono tenere in mano, abbenchè rimangano sott' acqua. Parimenti smovendo la terra in alcuni siti del piano del Cratere, talora vi si sente un sensibile calore; il che sebbene non mi sia riuscito di provare per me medesimo, pure fu provato dal Sig. Barone *de Dietrich*, come egli assicura nella nota (*n*) alla lettera 11. *del Ferber*; e lo stesso mi assicurarono anche le Guide che meco avea.

Il piano, da cui cominciò ad elevarsi questo monte, dovette essere quasi allo stesso livello del mare. Perciocchè *Pietro da Toledo* scrive, che sul principio la pianura situata tra il Lago d' Averno, il monte Barbaro, ed il mare crepò in molti siti, e che in seguito la terra crepò anche presso il mare, ed eruttò fuoco, pietre, e ceneri fangose. Era dunque una Pianura vicina al mare quella, in cui si aprì la voragine vulcanica; epperò dovette essere quasi allo stesso livello del mare istesso. Questo concorda anche con ciò, che scrive *M. Antonio delli Falconi*, il quale asserisce, che la voragine si aprì nella piccola Valle che conduceva al Lago d' Averno, ed ai bagni, e che era situata tra monte Barbaro e la Collina del Pericolo; nella qual Valle altronde si sa che era situata Tripergola col suo mercato, che certamente era in pianura .

Quindi quei 419. milioni di piedi cubici, che formano la solidità del Monte nuovo sono di materie, le quali escirono dal di sotto del livello del mare, epperò al di sotto di esso devono essersi formate caverne di una capacità non minore di 419. milioni di piedi cubici. Gli Scrittori contemporanei ci assicurano che le fanghiglie eruttate da quel Vulcano non solo coprirono Pozzuoli, e le sue vicinanze, ma giunsero sino a Napoli che ne è distante circa 18. miglia, ed anche dal vento furono trasportate sino nella Calabria alla distanza di 150. miglia. La materia pertanto, che in quella convulsione escì di sotto terra, dovette essere assai maggiore di quella, che ricadde intorno al Cratere, e che vi formò il monte. Quindi per quella eruzione devono essersi sotto terra formate altre vastissime caverne .

I contorni di Pozzuoli presentano dei fenomeni atti a far girare il capo ai più esperti Geologi: poichè alcuni danno argomento da credere che il mare nel corso di 1800. anni siasi abbassato di livello, altri per contrario potrebbero far credere che siasi alzato. Le colonne del Tempio di Serapide sembrano attestare, che nei 18. secoli prossimamente passati il mare sia stato primamente più elevato, e di poi siasi abbassato. In esso vedonsi ancora ritte in piedi tre grosse colonne di marmo Cipollino, le quali sono forate da quelle Conchiglie marine che chiamansi Datteri di mare, o meglio *Mitoli litofagi*, i cui gusej trovansi ancora annicchiati nei fori medesimi. Queste traforature cominciano all' altezza di circa 10. piedi sul livello presente del mare, e continuano sino all' altezza di altri sei piedi. Quindi sembra doversi dire che il mare dopo la costruzione del Tempio, che non può essere molto anteriore ad Augusto, si alzò di 16. piedi, e rimase a quest' altezza per tanto tempo, quanto era necessario perchè potessero quei vermi traforare le colonne; e di poi si abbassò al livello presente. Ma chi osserva le molte fabbriche antiche, che nel golfo di Baja sono sommerse, deve anzi dire, che il mare siasi elevato al dissopra di quel livello, che avea quando quelle fabbriche furono costruite. Tra gli edifizj ora sommersi uno parvemi degno di un particolare esame. Consiste esso in 14. tronchi di colonne di granito, i quali sono disposti sulla stessa linea retta, e si reggono ancora diritti. Questo colonnato comincia verso la spiaggia di Pozzuoli, e continua verso il Monte nuovo, divergendo dalla spiaggia stessa. Allorachè io l' esaminai il mare era tranquillo, ed erano que' tronchi sotto una profondità di quasi quattro piedi d' acqua. La loro grossezza è di piedi $1.\frac{4}{5}$; gli intercolunnii, cominciando verso Pozzuoli, si succedono colle seguenti distanze cioè piedi $9\frac{3}{7}$; $9\frac{3}{7}$; $9\frac{3}{7}$; $9\frac{3}{7}$; $12\frac{1}{3}$, $9\frac{3}{7}$; $9\frac{2}{7}$; 7; $8\frac{1}{7}$; $7\frac{5}{7}$; $9\frac{3}{7}$; $9\frac{3}{7}$; 10. Il fenomeno sopraccennato del Tempio di Serapide è ancora per me inesplicabile; al mio ritorno però vi farò ulteriori osservazioni e riflessioni. Quanto alle fabbriche antiche ora sommerse io rifletto, che in più modi il mare può averle inondate, cioè o in quanto che il mare si alzò di livello rimanendo ferme al loro antico piano le fabbriche, o perchè si abbassò il piano delle fabbriche, rimanendo il mare al suo precedente, e presente livello, o finalmente perchè e si abbassarono i piani delle fabbriche, e si alzò il mare. Esaminando le circostanze locali sembrami doversi dire, che il terreno sottoposto a quegli edifizj siasi sprofondato, e che perciò il mare siasi esteso a coprirne le loro rovine. Certamente tutto quel tratto di paese, che è tra la Solfatara, e Baja, è vulcanico; ed i monti, che vi sorgono, sono formati da materie che escirono di sotto terra da una profondità inferiore al livello presente del mare. Quindi sotto quel terreno dovettero esistere, e devono tuttavia essere molte caverne, e nel cedimento di queste intervenuto o per naturale debolezza, o per l' azione de' tremuoti, che si sa esservi stati colà molto frequenti, si ha la cagione, per cui possono facilmente essersi sprofondati anche i soprastanti edifizj. In quel colonnato che ho descritto, appare certamente che le colonne non hanno la loro originaria distanza. Perciocchè nella prima costruzione gli intercolunnj dovettero essere o eguali, o certamente disposti con qualche regola di Simmetria; laddove al presente vi si riconosce una irregolarità aliena del tutto dalle regole Architettoniche. Perlochè convien dire, che o tutte, o almeno alcune colonne abbiano mutata la loro relativa situazione: il che non può intendersi se non ammettendo la caduta delle medesime in caverne sottoposte.

Che il sommergimento di quelle antiche fabbriche non debba ascriversi a rialzamento tuttora permanente del livello del mare, si può conchiudere anche dal non trovarsi verun deciso segnale di tale rialzamento nelle circostanti spiagge e coste del Mediterraneo. Certamente se il mare avesse fatta una permanente elevazione nel golfo di Baja e Pozzuoli, sarebbesi per le leggi d' equilibrio d' altrettanto elevato nel golfo di Napoli, ed in altri siti non molto distanti; e poichè tali rialzamenti devono essere intervenuti in tempi non molto da noi rimoti, avrebbero lasciati de' segni riconoscibili anche al presente, ed inoltre sarebbero stati notati da qualche Storico. Niente però di tutto ciò ritrovasi almeno per quello che a me è noto. Ma su di tale oggetto io dirò qualche cosa di più preciso, allorchè dopo di avere esaminato il soprasposto fenomeno del Tempio di Serapide, cercherò di darne la spiegazione.

Passo ora a farvi un cenno del mio viaggio da Napoli a Castell'a mare. Nel passare per Portici avrei desiderato di vedere continuate le escavazioni del sottoposto Ercolano: giacchè molte osservazioni avrei potuto farvi sugli effetti dell'eruzione, che lo seppellì, e la quale fece di *Plinio* un martire della curiosità geologica. Ma pel timore, che a motivo di ul-

ulteriori escavazioni non vada a seppellirsi nell' antica la nuova Città insieme col Palazzo reale, e colle antichità che vi sono raccolte, si è sospeso ogni lavoro, e forse non sarà mai più ripigliato. Sarebbe però pregio dell' opera il demolir Portici per riabitare Ercolano. Gli Abitatori di una Città risorta non avrebbero forse a temere di essere seppelliti; gli Antiquarj nelle Antichità, che vi si scaverebbero, avrebbero materia d' immortalarsi; e gli amatori della Storia si potrebbero lusingare di trovare tra gli abbrustoliti Rotoli ciò che manca di *Tacito*, e di *Tito Livio*, e più probabilmente i venti libri della guerra di Germania di *Plinio*. Non sembra però, che tali speranze si possano appoggiare se non ad un beneficio vulcanico. Se il Vesuvio in qualche eruzione seppellirà Portici così tranquillamente come già fece con Ercolano, allora si potranno senza pericolo dissotterrare ambedue le Città. Per altro sembrerebbe, che anche prima di aspettare questo non desiderabile ripiego, si potesse con sicurezza ed anche con economia scavare questa miniera d' antichità, la quale non dovrebbe essere meno proficua di un ricco filone metallico. Certamente il suolo d' Ercolano sebbene sia 100. piedi più basso di Portici, pure è più elevato del livello del mare, al quale altronde è assai vicino. Quindi nei siti più bassi potrebbersi aprire verso il mare alcune gallerie d' ingresso, e di scarica, diriggendo quindi per esse le gallerie di ricerca, e facendo le regolari escavazioni nei luoghi che dessero speranza d' importanti scoperte. Colla direzione di un uomo esperto nella Geometria sotterranea potrebbero essere prevenuti i danni dei moderni edifizj soprastanti alle escavazioni. Nelle Saline di Wiliska ed in altre miniere le escavazioni sotterranee sono certamente assai più vaste del piano d' Ercolano, e di Portici, e sebbene a quelle soprasti una montagna intera, pure questa non ha mai ceduto. Qual pericolo pertanto potrebbe esservi per Portici, quando i lavori si facessero colla direzione di Persone perite, che sapessero far uso delle armature, e delle riempiture, colle quali altronde si risparmierebbe l' estrazione di molto materiale.

Quantunque sieno intermesse le escavazioni ad Ercolano, pure si continuano, ma però lentamente a Pompeja, che, come voi ben sapete, è un' altra Città da quella non molto distante, e la cui conservazione è pure dovuta al Vesuvio, che fu più benefico delle irruzioni de' Barbari distruttori di ogni antico monumento. Ma le cose che finora vi si sono scoperte, come il Teatrino, i Tempietti, le Casette, il Quartierino di Soldati mostrano, che quella era anzi un modello di Città che una Città, ovvero che essa fu fabbricata per abitazione di pigmei.

I segnali delle eruzioni del Vesuvio continuano anche sulla strada conducente a Castell'a mare, sulla quale incontransi ceneri, e tufi vulcanici. Il masso però delle montagne è calcareo, parte in forma di brecce, e parte in pietra di tessuto equabile: il che appare anche in quelle, che formano le coste sotto Castell' a mare, le quali però sono tufacee. Dirimpetto all' ingresso della casa di Campagna di S. E. il Sig. *Cav. Acton* situata poco sotto la Villa Reale di Castell' a mare osservai una cosa, che mi parve singolare; ed è una grossa pietra da calcina inserita in un muro di cinta di un campo, la qual pietra aveva un foro grosso $\frac{2}{3}$ di pollice, che per la sua figura, e per il liscio della superficie io stimai essere l' alveo di un Dattero di Mare o di una Folade. Avrei desiderato di poter esaminare i contorni per vedere se mai vi si trovasse qualche masso montuoso, che fosse da que' vermi marini traforato. Ma il piano del mio viaggio mi chiamava a Salerno, e mi accontentai per allora di notare, che tra gli sassi di quel muro molti erano di tufo vulcanico, e che l' altezza in cui era quella pietra traforata poteva essere circa di piedi 400.

Nella strada di terra da Castell' a mare a Salerno non incontrai se non montagne di pietra da calcina; ed in quella, che tra Vietri e Salerno sporge in mare, vidi una decisa stratificazione. Sotto Vietri osservai un tufo calcario di cui si fa uso per le fabbriche.

A Salerno mi si fecero osservare due cose, che hanno qualche relazione alla Geologia. La prima è, che quella spiaggia si va rapidamente aumentando; l' altra riguarda alcuni sassi lunghi circa 3. piedi, e grossi quasi altrettanto, i quali ora giacciono dentro il recinto del Porto, ove si assicura essere stati trasportati da una furiosa burrasca, facendo ad essi scavalcare il recinto stesso che è alto non meno di 12. piedi. Se queste spiagge sono esposte a così furiose tempeste, facilmente si può derivare l'aumento loro da materie che dall' onde vi si vanno accumulando; e sè da borrascoso mare potettero essere così trasportati que' grossi sassi, ciò potrà servire a render credibili diversi fenomeni geologici, i quali a prima giunta sembrano incredibili.

Io quì chiudo la lettera essendo sul momento d' imbarcarmi per compiere il principal oggetto del mio viaggio. È questo diretto ad esaminare le coste del Principato di Salerno, e della Calabria, per riconoscere un' importante osservazione già prodotta negli atti dell' Accademia Reale di Napoli, in cui si enunciò che dal Porto di Palinuro sino a Fuscaldi la montagna sino ad una certa altezza fuori d' acqua è traforata da Foladi, o Datteri di mare: la qual osservazione, se fosse vera, avrebbe una grande importanza per la determinazione delle rivoluzioni intervenute sulla superficie terrestre. A suo tempo io ve ne esporrò i risultati.

LETTERA SETTIMA.

Sapri nel Principato di Salerno 29. *Set.* 1792.

QUello, che a Napoli mi fecero temere gli amici, e che io, dopo d' avere impunemente viaggiato, ed anche dormito nelle micidiali Paludi Pontine, mi lusingava di evitare, mi è avvenuto nell' inoltrarmi da Salerno verso la Calabria. In questo viaggio lungo le spiagge fui assalito da arrabbiata febbre, che già da 15. giorni mi tiene in un casolare da pescatori. Per tredici giorni ho vivuto soltanto di acqua gelata, che mi avrebbe ridotto a quest' ora in un sorbetto, se l' ardore della febbre non ne avesse impedito l' agghiacciamento. Essendo la febbre remittente ho potuto dopo tal tempo far uso della China, per mezzo della quale io mi trovo quasi in istato di convalescenza, o almeno non ho più a temere, che altri aumenti col mio nome il Martirologio Mineralogico. In questo stato io vado pensando, d' onde il male possa aver avuto origine, e parmi di averlo incontrato appunto per quella strada, per cui io cercava di prevenirlo. Io aveva cominciate le mie osservazioni al Porto di Palinuro, e per passare la notte in sito d' aria non sospetta, mi determinai ad ascendere sino a Pisciota, facendo un cammino di quattro ore per esaminare nello stesso tempo la montagna. Il Sole era così cocente, che avendo provato a stritolare tra' diti alcuni piccoli Scarabei viventi, essi si riducevano in polvere, come se nissun fluido in essi scorresse. Questo colpo di Sole, a cui nissun altro simile io giammai ho provato, deve essere stato l' origine del male, giacchè alla sera mi sentii un ribrezzo di febbre, del quale però io non feci caso. Il giorno seguente proseguii il viaggio di mare, e per lasciar passare le ore più calde presi terra verso la Torre Lajella, ove postomi all' ombra di una rovinosa casa mi abbandonai al sonno tra mezzo alle Alghe pestifere della spiaggia. Alla sera i Marinaj presero posto al capo degli Infreschi, e là avendo veduta una grotta affumicata, in essa pensai a passar la notte. Ma contro al solito mi sentii troppo a disagio, sì che mi risolvetti ad ascendere uno scoglio per ritirarmi in una casa pescareccia, che da quella grotta si vedeva. Quella notte io ebbi un' altra visita dalla febbre, la quale pure non curai, e trovandomi alla mattina abbastanza vigoroso andai costeggiando verso Maratea, che da quella parte è la prima Città della Calabria. Ma al vedere, che dal di dietro della montagna si andavano alzando pesanti nuvoloni, che da un poco di timore mi erano forse resi più neri di quel che realmente fossero, volli ritornar in dietro per aspettar a Sapri qual esito fossero quelli per avere. Fu providenza, che io prendessi tale risoluzione: poichè la notte mi si spiegò una furiosa febbre, che mi vi dovea ritenere per lungo tempo; e fortunatamente quello è l' unico luogo di coteste spiagge, in cui l' aria è buona, e che è fornito di migliore Medico. Non ostante che la *Signora Contessa di Policastro*, ne' cui Feudi è Sapri, siasi compiaciuta di farmi offrire comoda abitazione, ed ogni altra assistenza, pure io ho voluto rimanere in quella stanza pescareccia, in cui sul principio erami ritirato. È questa forse un residuo delle devastazioni fatte già in questi contorni dai Saraceni, in cui per ogni parte pendono ancora le tappezzerie fabbricate dai bisavoli di que' ragni, che ora vi abitano. Quivi al presente io ho tutte le mattine un divertimento, che non avrei avuto altrove. Prima del levar del Sole io vengo svegliato dalla stridula voce di sempre arrabbiata femmina, che nell' orto vicino con altre travaglia. Io allora fo aprire la finestra, che per mancanza di vetriate non è mai chiusa, e tosto entra un Calabrone, che col suo ronzìo suona in contrabasso una contradanza, che è ballata da uno stormo di moscherini che con esso entrarono. Spettatori si fanno di questa danza que' golosi ragni, i quali sembrano aspettare che alcuno di questi inesperti danzatori venga a cadere nel loro palchetto, e cadendovi pure alcuno tosto diviene la loro colazione. La danza finisce più presto di quel che vorrebbero quegli spettatori; ed io dopo quella distrazione rimango col desiderio di veder altrove qualche cosa di meglio. Ma ben comprendo, che per quest' anno non più potrò occuparmi in osservazioni geologiche, e dovrò stimarmi fortunato se potrò viaggiare pel ritorno in patria. Voi pertanto escusatemi delle mie divagazioni finora scrittevi, ed abbiate la compiacenza di ricevere ora quelle poche osservazioni, che potetti fare da Salerno fino a Sapri.

Tra Salerno ed il Capo di Licosa non si presenta quasi altro, che una bassa spiaggia, d' onde a motivo delle copiose Risaje l' aria insalubre si stende sino a Salerno. Nei contorni della Licosa sorgono piccoli monti, i quali ora sono composti di strati di macigno alternanti con schisto argilloso, e micaceo, ed ora granitiforme, e senza mica. Due miglia prima di giugnere alla Licosa misurai gli strati arenarii, e vi trovai un' inclinazione di gr. 32., e la direzione era 63.° Oc., ascendendo da N E q E a S O q O.

Succedono sino a Palinuro altri piccoli monti, i quali però sono per lo più calcarei. Al Porto di Palinuro doveano cominciare le principali mie osservazioni, come già vi accennai nell'ultima mia. Quindi appena giuntovi, scesi dalla Speronara in uno Schifo per potermi più agevolmente avvicinare ad ogni sito del suo contorno. Nell' esame, che minutamente ne feci, trovai che la pietra era calcarea cinericcia, e di tessuto inequabile. Essa era in molti siti bucherata da frequenti fori; ma la loro interna superficie non avea nè il liscio, nè la figura propria delle nicchie dei Datteri di mare; la loro grandezza bene spesso era di molti pollici, cioè molto maggiore della grandezza di que' vermi marini; la direzione de' fori stessi era molto varia; ed in nessuno trovai verun guscio di questi vermi. Per lo che io stimai, che fossero fori accidentali, che nella pietra calcarea anche lungo le coste dei Laghi spesso si formano per l' azione dell' acqua e dell' aria, massime in quelle parti, che sono meno consistenti. In tal opinione mi confermai, osservando che questi fori finiscono ad un' elevazione soltanto di qualche decina di piedi sul livello del mare, cioè a quella altezza, a cui giungono le onde rotte di un mare anche non molto grosso, le quali sono attissime col progresso del tempo a scavare nella pietra calcarea copiosi, e profondi fori. (1) Osservai inoltre, che in-

---

(1) Una simile pietra bucherata, ma senza Foladi, fu osservata da *Saussure* in uno scoglio calcareo lungo il mare vicino ad Oneglia,

in molti siti la massa del monte era penetrata da ocra di ferro, la quale è soggetta a scomporsi, e produce corrosioni anche nella pietra stessa: onde quella può facilmente avere contribuito alla formazione di que' fori. Egli è il vero, che questi potettero essere stati le nicchie di que' vermi marini, e che nel decorso del tempo sieno stati trasformati in modo da non potersi più riconoscere. Ma è altresì vero, che dallo stato loro presente non si può asserire, che per osservazione consti della loro origine da Foladi, o Datteri di mare.

Dopo tal esame feci la per me fatale salita a Pisciota; nel qual cammino, che è di circa 7. miglia, non incontrai che materie calcaree stratificate, ed in vicinanza del paese notai alcuni strati contorti, ed altri disposti ad angoli rinchiusi gli uni negli altri. Per entro ai massi calcarei eranvi talora dei tufi arenosi gialletti, composti cioè di una arena simile a quella della vicina spiaggia. Altri direbbe, che questi tufi furono formati da arena di mare, quando questo era più elevato. Ma al presente certamente l' arena, che è sulla spiaggia, vi perviene dai disfacimenti di quei tufi, che ora formano massi montuosi; nè avvi alcun carattere per decidere che quest' arena sia stata originaria di spiagge marine.

La ricognizione dell' origine di quei fori già riputati da altri come alvei di vermi marini mi parve tanto importante, che nel ritorno al Porto di Palinuro nella mattina seguente volli di nuovo girarlo per farne un più minuto esame. Ma anche in questo niente trovai che mi potesse far mutar l' opinione presa nel giorno antecedente. Riflettei però, che quand' anco tali fori fossero stati gli alvei di vermi marini, pure ciò non avrebbe grande influenza sulle teorie geologiche, attesa la piccola altezza, in cui finiscono; epperò non pos-

---

ed in altri luoghi lontani dal mare; ed attribuisce questi fori a scomposizione di piriti. Voyag. t. 3. §. 1381.

possono servire a provare che il mare abbia fatta una lunga permanenza sino alle più alte cime dei monti .

Continuai il viaggio vicino terra coll' occhio sempre rivolto alle rupi , e tra Palinuro ed il Capo degli Infreschi mi si presentarono altri fori simili ai già descritti . Riconobbi parimenti , che la montagna continuava ad essere calcarea con strati o sfenditure talora anche verticali . Nel golfo di Sapri in vicinanza di quella Terra gli strati erano quasi orizzontali, e formati di pietra calcarea cenericcia senza verun indizio di nicchie di vermi marini . In diversi luoghi osservai pure , che il mare corrodendo la pietra segna se stesso nel suo livello , giacchè a quell' altezza a cui esso suole rimanere , la montagna per lunghi tratti era sensibilmente incavata cioè sino alla profondità di quasi un piede . Questa osservazione potrebbe aver diversi usi per certi punti geologici . Per esempio essa potrebbe servire per provare, che già da lungo tempo il mare si mantiene al livello presente , e ciò tanto più si verificherebbe , se a maggiori altezze di altre simili rupi non si trovassero simili incavature orizzontali . Che anzi se questo segnale non si trovasse in nessun monte od altezza superiore al presente livello , oppure se non si trovasse colà dove avrebbe dovuto formarsi , e conservarsi , se il mare vi avesse fatta lunga permanenza , potrebbesi anche conchiudere , che il mare non mai sia stato di lunga permanenza ad un livello più elevato del presente . Meriterebbe pertanto che su questo oggetto versassero le osservazioni dei Geologi ; e per l' osservazione dovrebbero essere scelti massimamente quei monti , che sono vicini al mare , e di natura calcarea , e che inoltre hanno qualche fianco verticale . Di tali monti alcuni sorgono tra Palinuro ed il Capo degli Infreschi ; nissuno però di essi mi presentò l' accennato segnale .

Cammino facendo arrischiai anche qualche congettura sulla fisionomia di quelle montagne , che da lontano mi si presentavano all' occhio ; e sembrommi , che esse sino a Maratea e più là ancora , fossero generalmente parlando di materia calcarea. Parvemi pure, che la loro altezza fosse assai mediocre, e non maggiore di 3500. piedi, che è presso a poco l' elevazione da me trovata nel monte di Bulgaria, che pareva il più alto di que' contorni. Questo monte sorgeva dirimpetto alla stanza, che dovetti guardare quasi per tre settimane, ed in essa io potetti disporre il Teodolite per misurare l' angolo d' elevazione della sua cima; il quale trovai di gradi 4. Avendo sull' ultime, e più esatte carte del Regno di Napoli, che il Sig. *Zannoni* già in parte pubblicò, misurata la distanza tra Sapri e quella cima, trovai che questa è di miglia 10; ossia di piedi 50000.; d' onde colle solite regole trigonometriche mi risultò l' altezza di piedi 3496 $\frac{1}{2}$.

Io avea riservate al mio ritorno le osservazioni su di altri curiosi oggetti di queste coste marittime, come sono il Sepolcro di Palinuro, la Grotta delle ossa, le antichità di Pesto, e simili. Il dovere ora rinunziare a tali osservazioni non mi duole tanto, quanto il non poter continuare il viaggio per riconoscere, se almeno tra Sapri, e Fuscaldi si trovino nelle Rupi le antiche abitazioni di Foladi. Sebbene da me nissuna di queste sia stata veduta tra Palinuro, e Sapri, cioè sull' estensione di circa 30. miglia, nulladimeno io non posso negare ciò, che fu asserito dall' egregio Sig. Professore *Fasano*, cioè che dal Porto di Palinuro sino a Fuscaldi esistano tali abitazioni. Solo mi sembra di poter dire che tal osservazione da lui enunciata fu fatta da lui, nel mentre che egli insieme ad altri viaggiava per Regia delegazione verso la Calabria, per riconoscervi i danni de' tremuoti accadutivi nel 1783; e che nelle circostanze di un tal viaggio non pare, che abbia potuto aver quell' agio di osservare, che è richiesto per poter dare alle osservazioni quella esattezza, che possa dispensare i Mineralogisti dal richiederne una ulteriore ricognizione.

Nello scrivere a voi, io mi dimentico dello stato di debolezza in cui mi trovo, sembrandomi di essere già in patria con vigorosa salute. Io pertanto non dovrei mai terminare di scrivere ; ma per non esservi più lungamente importuno io quì chiudo la lettera , impaziente di rivedervi .

LETTERA OTTAVA.

Milano 18. *Ottobre* 1792.

Accompagnato da risentita terzana ho potuto finalmente compiere il viaggio da Napoli a Milano impaziente di rivedervi . Siccome questa febbre è una continuazione della malattia incontrata sulle spiagge Napoletane, così io m' immagino di essere ancora in viaggio ; onde nelle ore d' intermittenza io vado continuando a scrivervi quelle poche osservazioni, che nel ritorno ho potuto fare zoppicando ; e perchè questa lettera non compaja troppo vuota, io vi aggiugnerò qualche riflessione sulle osservazioni principali da me fatte , ed una Tabella delle elevazioni di varj punti del mio viaggio .

Già vi accennai, che cominciando da Otricoli, e proseguendo sino a Napoli, anzi sino verso Castell' a mare trovansi quasi dapertutto tufi vulcanici . Materie di simile natura per lungo tratto io pure osservai nella strada di Toscana, che feci nel ritorno da Roma . Tra Ponte molle, e Baccano, e più là ancora sino a monte Rosi sorgono poggj , o collinette di tufo , il quale è dimostrato vulcanico dai molti pezzi di pomici nere, o di lave spongose che contiene . Alcune colline alquanto più alte sono formate di una specie di tufo bruciato composto di ceneri bianchicce agglutinate con scerli , e frammenti calcarei .

Dentro la Città stessa di Ronciglione vedesi un profondo Vallone molto grottesco fiancheggiato da colline vulcaniche ; e più avanti è il Lago di Vico , che per antico deve aver eruttato fuoco , e lave, quelle cioè che costituiscono la montagna di Viterbo, che è forse una parte residua di quell' antico Cratere , che anche al presente non può dirsi del tutto estinto, giacchè poco lungi da Viterbo esistono tuttavia i Bagni caldi, ed un laghetto d'acqua quasi bollente.

Tra Viterbo, e Monte Fiascone avvi uno stagno, o palude circondata da colline di lava; e questo viaggio verso Monte Fiascone si continua ora su lave, ora su colline di ceneri, avendo dirimpetto la rotonda Valle, che al presente forma il Lago di Bolsena, e che dal Mineralogista è facilmente riconosciuta per un antico Cratere, giacchè molte sono le materie vulcaniche in que' contorni sino ad Acquapendente. Lo stato in cui mi trovava non mi permise di esaminare quello strato di ceneri miste con pomici grigge, e que' basalti colonnari contenenti scerli neri, e cristalli bianchi granatiformi che incontransi poi oltre Bolsena, e che furono descritti dal *Ferber*.

Dall' indicato Vulcano ebbe forse origine quella montagna di lave, per cui si discende andando a Radicofani. Ma la montagna di Radicofani, che nella sua parte superiore è parimenti vulcanica, è forse un fianco di un altro più ampio Cratere, le cui pareti ora mancanti rientrarono in quella voragine, da cui escirono. Questa montagna, che è isolata, è una delle più elevate di que' contorni, giacchè il viaggio di una posta si fa quasi tutto su di una ripidissima salita; e secondo l'estimazione da me fattane dovrebbe essere elevata non meno di 4000 piedi sul livello del mare. Sebbene l'alta parte di questa montagna sia composta di lave, pure essa è circondata da colline marnose, e calcaree, le quali cominciano verso il fiume Paglia poco sotto Acquapendente. Fu inoltre osservato dal *Ferber*, che tra quelle lave alcune sono colonnari, e contengono de' frammenti di pietra calcarea bianca: il che indica che la sua base sia almeno in parte di simile natura.

Dirimpetto a Radicofani sorge tra Ponente e Mezzodì un' altra montagna quasi di eguale altezza, e parimenti vulcanica, che chiamasi S. Fiora, e che riguardasi da alcuni come un altro residuo dello stesso Cratere a cui apparteneva quella di Radicofani. I ſuochi che mantengono calde le acque de' bagni di S. Filippo posti sul monte di S. Fiora, come pure quelle di Vignone situate in poca distanza da S. Quirico, devono certamente essere i residui delle antiche combustioni colà intervenute.

Eccettuata la montagna di Radicofani tutto il terreno tra Acquapendente e Siena è generalmente formato di colline marnose, nelle quali sono copiose le conchiglie marine fossili. A Siena ſanno corona molte colline di sabbia, che talora è conglutinata, e forma un tufo arenario dentro al quale corrono alcuni filoni di pietra calcarea, e trovansi anche conchiglie marine. Continuano queste colline sino a Tavernelle, vedendosi in varj luoghi la pietra calcarea al disotto delle colline arenarie. In alcuni siti il *Ferber* tra le marne osservò ancora pietre calcaree rotolate segnate di dendriti, e corrose dalle Foladi. Io non m' avvenni in tali pietre; ma ben ne tengo alcuni pezzi dall' esame de' quali mi risulta, che i vermi fossili racchiusivi non sono nè Foladi, nè Mitili litofagi, ma bensì un' altra specie di vermi forapietre, che non saprei ben determinare.

Colline arenarie, e marnose con conchiglie marine continuano sino in vicinanza di Firenze, apparendo anche in alcuni siti qualche montagnola calcarea. Nel resto i contorni di Firenze da questa parte presentano quelle varietà di pietre, e sassi, che in altra mia già vi accennai.

Nel cammino da Firenze a Bologna si traversano montagne attinenti agli Appennini, e si ascende continuamente sino a Pietramala, d' onde poi si discende verso le pianure della Lombardia. La montagna generalmente è a strati di pietra calcaria grigia, dura, e granosa. Il monte Traverso però che incontrasi qualche miglio prima di Pietramala, viene dal *Ferber* riputato composto di lava verde nericcia sparsa di macchie grigie: il che però non ebbi il comodo di riconoscere, ed inclinerei a credere, che quelle pietre verdi nericce fossero un Serpentino più o meno decomposto, che vedesi pure, ma più riconoscibilmente, in vicinanza dei fuochi di Pietramala.

Nella discesa di Lojano continuano primamente gli strati di pietra calcaria granosa, e compajono di poi schisti marnosi alquanto arenacei, e pietre arenarie conglutinate con ciottoli silicei. In vicinanza di Lojano vedesi nella costa marnosa del monte una grande quantità di conchiglie marine bivalve, le quali sembrano essere del genere delle Arche. Esse per lo più sono intere, ma nel separarle dalla marna vanno facilmente in bricioli. Siccome in quel sito le intere sono tutte di una stessa specie, così sembra che non ve ne sieno di altre specie diverse. Esaminando però la marna vi si riconoscono copiosi frammenti di altre ancora. Una maggiore varietà di conchiglie si trova tra Lojano, e Bologna, e tra quelle vidi pure la così chiamata *Concha poligynglima*, che io riduco al genere delle Arche, ed in alcuni pezzi di essa vidi che mantennero assai bene il loro colore perlato, abbenchè fossero quasi alla superficie della montagna.

In questo tratto di cammino i monti vanno continuamente diminuendosi d' altezza, ed in vicinanza di Bologna non più veggonsi che piccole colline derivate da sedimenti di acque marine, e che vanno declinando nelle pianure Lombarde, nelle quali quanto è vegliante l' Agricoltore, altrettanto passeggia sonnacchioso il Geologo. Così dunque io ho terminato le mie osservazioni, le quali mi potranno dar materia di opportune applicazioni alle Teorie geologiche.

Al presente però mi ridurrò solo a fare alcune riflessioni su quella parte d' Italia, in cui massimamente dominarono i Vulcani. Questa è situata vicino a mare tra ponente, e mezzodì; e si manifesta nei residui non ambigui di combustioni vulcaniche. Primamente prenderò ad esaminare, se queste combustioni siano di un' antichità tanto grande, che superi tutti i tempi storici, come taluno stima. I fondamenti di tal' opinione sono due massimamente, cioè il silenzio degli Storici su tali eruzioni, e lo stato ora rovinoso de' Crateteri, che dovettero essere molto elevati. Per poter valutare il primo fondamento io stimai di fare alcune ricerche massimamente nel grande Scrittore delle cose Romane, cioè in *Livio*, per vedere se egli rammenti qualche cosa che abbia rapporto a tale oggetto; e sembrami di aver trovato, che quelle piogge di sassi, quei rivi di sangue, quelle schiere di soldati aerei, quei combattimenti del Sole colla Luna, ed altri simili prodigj da lui tante volte rammemorati sono stati altrettanti effetti, o accompagnamenti di eruzioni vulcaniche. L' ozio, in cui la malattia mi tiene, mi dà il comodo di trascrivere i diversi passi di questo Scrittore, ed a voi che bramate veder le cose in fonte, non dispiacerà di vederli quì riportati sotto i rispettivi anni computati prima dell' Era Cristiana secondo la Cronologia di *Langlet*.

All' anno 650. riportasi la prima pioggia di sassi rammemorata da *Livio*, di cui già parlai trattando del Monte Albano.

All'anno 344. (Lib. 7.) *Prodigium extemplo Romae dedicationem sequutum simile vetusto montis Albani prodigio. Namque et lapidibus pluit, et nox interdiu visa intendi.*

An. 217. (Lib. 22.) *Augebant metum prodigia pluribus simul locis nunciata in Sicilia militibus aliquot spicula, in Sardinia autem in muro circumeunti Vigilias equiti Scipionem, quem manu tenuerat arsisse, et litora crebris ignibus fulsisse; et Praeneste* (Palestrina) *ardentes lapides Cœlo caecidisse, et Arpis* (nell' Apulia Daunia) *palmas in caelo visas, pugnantemque cum Luna Solem, et Capenne* (Canapina 7. miglia da Viterbo) *duas interdiu Lunas ortas, et aquas Caerete* (Cerveteri nel Patrimonio) *fluxisse . . . . . . et Faleriis* (Cività Castellana) *Caelum findi visum velut magno hiatu, quaque potuerit ingens lumen fulsisse . . . . et Capuae speciem Caeli ardentis fuisse, Lunaeque inter imbrem cadentis.*

An. 213. (Lib. 23.) *Mare arsit eo anno . . . . Signa Lanuvii* (Cività Lavina) *ad Junonis Sospitae cruore manavere,* *re, lapidibusque circa id templum pluit, ob quem imbrem novendiale, ut assolet, sacrum fuit.*

An. 210. (Lib. 26.) *In foro Sudertano* (Castro nel Patrimonio) *sanguinis rivos per diem totum fluxisse, et Cresi* (Monte rotondo vicino a Prima Posta) *lapidibus pluisse.*

An. 207. (Lib. 27.) *Novendiale sacrum fuit quia Veiis* (tra Baccano e la Storta) *lapidaverat. Minturnenses* (al Garigliano) *adjiciebant sanguinis rivum in porta fluxisse . . . inde iterum novendiale instauratum quod in armilustro lapidibus visum pluere.*

An. 205. (Lib. 29.) *Impleverat ea res superstitione animos, pronique et ad nuncianda, et ad credenda prodigia erant, eo plura vulgabantur. Duos Soles visos, et nocte interluxisse et facem Setiae* (Sezze) *ab ortu Solis in occidentem porrigi visum . . . . . in aede Junonis Sospitae Lanuvii cum horrendo fragore strepitum editum. Eorumdem procurandorum caussa diem unum supplicatio fuit, et Novendiale sacrum, quod de Cœlo lapidatum esset, factum.*

An. 200. (Lib. XXX.) *Cum Solis orbis minui visus, et pluit lapideo imbri, et in Veliterno agro terra ingentibus cavernis consedit, et in Palatio* (Monte Palatino) *lapidibus pluit.*

An. 194. (Lib. 34.) *In foro, et Comitio, et Capitolio sanguinis guttae visae sunt, et terra aliquoties* (Romae) *pluit, et caput Vulcani arsit. Nunciatum est Interamnae* (a Terni) *lac fluxisse . . . Sacrificium novendiale factum quod Hadriani* (I Cittadini d' Atri nell' Abruzzo) *nuntiaverant in agro suo lapidibus pluisse.*

An. 191. (Lib. 35.) *Terracinae, et Amiterni* (nella Sabina verso l' Abruzzo) *nunciatum est aliquoties lapidibus pluisse.*

An. 186. (Lib. 39.) *Novendiale sacrum tenuit quod in Piceno* (tra Ancona, Osimo, Fermo, Ascoli, ed Adria), *per triduum lapidibus pluerat.*

An. 173. (Lib. 42.) *Lanuvii Classis magnae species in caelo* *lo visae videbantur, et in Vejenti apud Rementem lapidatum.*

Combinando questi passi cogli altri, che già accennai in altra mia parlando del monte Albano, rilevasi che in Roma stessa avvennero almeno otto pioggc di sassi, e terre, in Albano due, nell' Ariccia due, tra la Storta, e Baccano parimenti due, a Prima Posta una, ed in diversi tempi altre a Cività Lavina, a Palestrina, a Terracina, a Cuma, nel Piceno, in Amiterno, ed in Atri nell' Abruzzo. Ora della verità di tali piogge non può dubitarsi: perciocchè primamente molte di esse avvennero in Roma stessa, ove furono visibili a tutti li Cittadini, ed alcune delle altre enunciate in Roma come accadute altrove, furono verificate per mezzo di persone espressamente spedite dai pubblici Magistrati. Oltre a che siccome per ogni pioggia di tal natura si solevano fare per nove giorni pubbliche supplicazioni, non è verisimile, che i Magistrati leggermente credessero a qualunque voce popolare. Che poi tali piogge altro non fossero che materie eruttate da Vulcani, appare dal vedere che molti di que' luoghi, in cui diconsi cadute, sono ora realmente riconosciuti per vulcanici, come sono i contorni di Roma, di Albano, dell'Ariccia, della Storta, di Baccano, e di Prima Posta, e di Cuma; anzi la ricognizione stessa di pietre e terre vulcaniche in questi siti può servire di pruova per confermare, che realmente quelle piogge sono accadute. Quanto agli altri luoghi rammemorati da *Livio* come tocchi da piogge pietrigne, se finora non vi si fece tal ricognizione, ciò proviene dall' essere quelli situati fuori delle strade frequentate dai viaggiatori: io però tengo di certo, che i ricercatori di Vulcani se faranno in que' siti gli opportuni esami, vi faranno le desiderate scoperte: oltre di che a Terracina, a Palestrina, e nel Piceno già furono da taluno notati indizj vulcanici.

Simili scoperte io stimo, che si faranno anche nei contorni di quei siti, ove *Livio* scrive essere avvenuti quegli altri prodigj, i quali o tutti, o quasi tutti dovettero essere accompagnamenti di eruzioni vulcaniche espressi nella maniera, ra, che dal timido popolo erano concepiti, ed enunciati. Certamente le acque sanguigne non altro dovettero essere che acque tinte di ocra rossa di ferro, giacchè tali ocre spesse volte vengono dai Vulcani eruttate, e mischiate con acqua. Esse talora sono eruttate dalla bocca del Cratere, e ricadono in forma di gocce, o di piogge anche in lontane parti: talora si aprono la via nel terreno stesso, e vi scorrono a guisa di rivi, i quali poi vanno a scaricarsi in qualche fiume. L' acqua sanguigna notata da *Livio* in Cerveteri deve aver avuta tal origine; giacchè questo luogo è poco lontano dal Lago di Braciano, i cui contorni sono vulcanici, ed il quale fu verisimilmente un Cratere. Parimenti il sangue veduto in Roma nell' anno 194., in Cività Lavina nel 213., in Cerveteri nel 217., tra Baccano, e la Storta nel 207., da simil cagione deve derivarsi; e tanto più, quanto che fu accompagnato da piogge ora di pietre, ora di terra, ossia di ceneri vulcaniche.

L' Armata navale veduta in Cielo a Cività Lavina nell' anno 173., le Palme, il combattimento del Sole colla Luna, l' apparizione di due Lune, lo spaccamento del Cielo, tra mezzo al quale si presentò a Cività Castellana un gran lume, i due Soli splendenti di notte, e la face lucente a Sezze non sono che scherzi del fuoco, e di corpi infuocati, che tra mezzo al fumo, ed alle ceneri, e pietre stranamente si muovono, allorachè un Vulcano è in eruzione. Solo potrebbesi dubitare, se alcuno dei fenomeni, che sono enunciati soltanto come lucidi, sieno anzi da riportare a qualche Aurora Boreale. In ogni modo anche nella terribile combustione del Vesuvio accaduta ai tempi di Tito, simili cose erano rappresentate all' immaginazione de' riguardanti, come appare nella seguente narrazione di Dione Cassio (*conflagratio Vesuvii montis*): *Viri multi, atque magni humanam omnem naturam excedentes quales gigantes, scribuntur partim in monte partim in finitima regione per urbes interdiu atque nocte per terram oberrantes, et in aere procurrentes videbantur. Post haec vehemens siccitas, et vehemens*

mens terremotus subito facti sunt, ut planities illa universa aquis scaturiret, et montes subsilirent, sonitus a cavernis subterraneis tonitruis persimiles, superne vero et in terra mugire videbantur. Mare vero fremebat, et caelum resonabat. Post haec fragor immensus subito ceu concidentium montium audiebatur. Exiliebant primum lapides ingentes quasi ad summa montium exirent; deinde tantus fuit ignis, et fumus ut aera obumbraret, totum vero Solem occultaret ceu defectum. Mox vero ex die nox et tenebrae ex luce factae sunt, et existimabant gigantes insurrexisse. Apparebant quidem illorum effigies in fumo, praeterea tubarum sonitus audiebantur. Putabant alii advenisse chaos, vel per ignem mundum absumi . . . Tantus fuit pulvis, ut ab eo loco in Africam, et Syriam, et Aegyptum penetraverit. Pervenit etiam Romam. Quin etiam aer totus imminens pulvere oppletus fuit. Sol etiam obtenebratus Romae obscuratusque est; nec parvus metus fuit per multos dies. Nesciebant homines quod factum est, nec conjectari unde factum est. Che se si considera, che quasi tutti que' siti, in cui sono da *Livio* rammemorati que' prodigj, sono riconosciuti per vulcanici, non si potrà ragionevolmente dubitare della loro origine. Solo potrà far maraviglia come i Romani, e gli Scrittori antichi nelle piogge pietrigne, ed in altri simili fenomeni non si curassero d'investigarne la cagione, e di descriverne gli effetti. Certamente una pioggia di sassi, che durava due, ed anche tre giorni, dovea formare un monte non minore del Monte nuovo, e dovea provenire da un Cratere ben visibile. In ogni modo i Romani non riguardavano tali fenomeni se non come prodigj, e non si curavano se non di espiarli con sacrifizj. Essi erano animosi a mostrare nelle guerre la superiorità delle loro forze sui loro simili, e non ardivano far un passo per riconoscere da vicino le forze di natura.

Ora essendo nel breve giro di pochi secoli intervenute tante eruzioni, le quali non sono rammemorate da *Livio* se non in parte, e solo per rapporto alla Religione de' Romani, ni, che solevano espiare tali prodigj con Sacrifizj, è da credere, che altrove molte parimente ne sieno intervenute ne' secoli storici, e forsechè esaminando altri antichi Scrittori, se ne troveranno non dubbiosi indizj. Quindi se gli antichi non rammemorano espressamente Vulcani in fuoco, ciò non può dare argomento di una grande antichità dei Vulcani ora estinti.

Neppure tal argomento si può derivare dal vedere ora rovesciati i fianchi di Crateri, che dai loro residui si comprende essere stati molto elevati. I rovescj ne' siti massimamente vulcanici possono, e sogliono intervenire in brevissimo tempo. A tali siti sogliono essere sottoposte ampjssime caverne, ed un tremuoto, o l' urto di una eruzione subitamente fa in queste subbissare anche altissimi monti.

Un altro argomento dell' antichità del globo terrestre desumono alcuni dal trovarsi talora strati alternativi di terra vegetale, e di lave. Questo fenomeno però fu già da me in altra mia spiegato senza che fosse bisogno di riportarlo ad una data molto vecchia.

Una simile spiegazione ammette un altro fatto geologico, che da alcuni si riguarda pure come una pruova dell'accennata antichità; e questo è il trovarsi strati di lave inseriti in strati calcarei sollevati, ed incurvati dalla forza delle lave, ed inoltre coperti di corpi marini. Questa costituzione di materie è facilmente spiegata dicendo, che le lave, e le materie calcaree colle conchiglie sieno state eruttate alternativamente dallo stesso Vulcano in una sola, o in vicine eruzioni. Il che non deve sembrare strano a chi sa, che i Vulcani comunicano generalmente col mare, e che perciò possono eruttare anche conchiglie, e terre calcaree insieme con acqua, come sappiamo anche per osservazione, essere talora intervenuto.

L' osservato fenomeno però mi sembra più plausibilmente spiegabile con una generale, e breve inondazione, la cui realtà io stimo di avere abbastanza provata colle osservazioni geologiche in una mia Memoria (1). In questo sconcerto di natura dovettero certamente agire simultaneamente i Vulcani ed i tremuoti. Quindi facilmente s' intende come le acque inondatrici potettero depositare materie calcaree e marine sopra gli strati di lave, e ciò con una certa alternazione. Nè dee far maraviglia l' eruzione di Vulcani dalle stesse acque marine; giacchè questa è comprovata anche da recenti esempj, come sono la formazione del Monte nuovo nel 1538., e nel presente secolo l' isola nata vicino a Santorini, e l' altra nel mare Settentrionale della Danimarca. Questa contemporanea azione di forze vulcaniche, e di depositi di acque marine viene comprovata dal trovarsi gli strati calcarei incurvati: la qual incurvazione non potè intervenire se non in una materia flessibile, e perciò abbastanza molle; e tale non potè essere, se non fosse stata recentemente depositata da acque inondatrici.

Mi rimane ora da esaminare se sia vero, che in Italia quasi tutto il terreno sia vulcanico. Questa asserzione fu già avanzata dal Conte di *Buffon*, Suppl. t. V. pag. 143., e prima di Lui dal Sig. *de Condamine* (Acad. R. Par. 1757.) e da altri pure è seguita: l'origine di questa opinione provenne dall' essere realmente vulcanica quella striscia di paese, per cui sogliono viaggiare i forestieri, andando dalla Toscana a Napoli, e dall'essersi quindi attribuito a quasi tutta l' Italia ciò che è proprio soltanto di una piccola parte di essa. Come la cosa sia realmente così, apparirà dal confronto tra i siti vulcanici, e non vulcanici del continente Italico. Il tratto vulcanico più lungo è su di una linea, che comincia verso la montagna di Radicofani, e passando per le vicinanze di Ronciglione, di Viterbo, e di Roma giugne sino a Velletri: la qual linea è lunga 112. miglia. La larghezza di questo trat-

---

(1) *Mem. Geol.* sulle rivoluzioni del globo terrestre ec. parte seconda inserita negli Atti della Società Italiana.

tratto è al più di 24. miglia, la qual lunghezza tra mezzodì, e ponente è terminata quasi tutta dal Mediterraneo, e dall' altra è determinata da una retta, che passa vicino a Tivoli, ed Otricoli: onde la sua superficie è di 2688. miglia quadrate.

Un altro tratto considerabile, che è nel Regno di Napoli, in lunghezza si stende al più a 50. miglia, cominciando cioè da Teano, ed andando sino oltre a Castell'a mare, ed in larghezza ha circà 20. miglia: il che forma una superficie di 1000. miglia quadrate, dentro la quale è compreso anche il Vesuvio, e la Solfatara colle loro vicinanze.

Un terzo tratto vulcanico è posto parte nel Vicentino, e parte nel Veronese. La sua lunghezza può essere presa su di una linea, che passa tra Vicenza, e Recoaro, ed è di circa 25. miglia, la larghezza si può assumere di 10. miglia comprendendovi così anche la Valle di Tretto, e di S. Gioanni Ilarione. Quindi la sua superficie è circa di 250. miglia quadrate.

I monti Euganei nel Padovano formano una superficie vulcanica, la cui lunghezza si può prendere su di una linea che passa tra Padova ed il monte Venda, e la cui larghezza è molto piccola; ma per comprendere in una sola misura anche quei siti vulcanici, che sono sparsi in altri distretti assumerò che la larghezza sia di 8. miglia: onde la superficie vulcanica nel Padovano sarà press'a poco di 80. miglia quadrate.

La somma delle accennate estensioni è di 4018. miglia quadrate, ed oltre a questa appena si troverà nel continente d' Italia qualch'altra considerabile porzione decisamente vulcanica. In ogni modo per comprender più sicuramente il totale assumerò, che la sua superficie vulcanica sia di 4200. miglia quadrate, ritenendo però, che questa è bensì l'estensione, dentro la quale trovansi materie vulcaniche, ma che non perciò è tutta vulcanica. Ora la superficie del continente d' Italia, eccettuate cioè le Isole, è circa di 100800. miglia quadrate, epperò la sua estensione vulcanica è soltanto la ventesimaquinta parte del totale , cioè non è che il 4. per 100 : che è pure una piccola cosa . Non è dunque vera l'asserzione avanzata dai sopranominati Scrittori .

Riflettendo alla posizione delle indicate linee vulcaniche, vedesi che esse corrono in vicinanza del mare , giacchè la prima da Radicofani sino a Castell' a mare è distante dal Mediterraneo solo 24. miglia , e le altre che sono nello stato Veneto sono lontane dall' Adriatico al più 50. miglia : il che può servire a confermare che i Vulcani comunichino per vie sotterranee colle acque marine : e che queste contribuiscono all' accensione de' fuochi sotterranei .

Dalle cose dette voi facilmente rileverete , che chi fa molto vecchio il mondo , non ha potuto ancora mostrarlo sdentato .

Quì annetto la Tabella delle Elevazioni , che a principio vi accennai : sulla quale è da avvertire , che la prima misura riguardante l'elevazione di S. Venanzio è dipendente dall' elevazione di Milano sul livello del mare , che io ho assunta di piedi 366. , quale fu da me calcolata parte su livellazioni reali , e parte sulla pendenza congetturale del Pò inferiore sino all'Adriatico . Questa misura di 366. piedi può facilmente essere diversa da quella , che si calcola , assumendo per principio l' elevazione media del Barometro al livello del mare , essendo tal principio molto ambiguo . Percciocchè l' altezza media si cominciò ad assumere di 28. pollici parigini ; dipoi il *Sckeukburg* la fissò a pollici 28. 2, 26, ed il *Wanswinden* la trovò di pollici 28. lin. 9. Onde la differenza massima tra le altezze medie finora assunte è di 9. linee , a cui corrisponde l' altezza quasi di una montagna , cioè un' elevazione di circa 700. piedi . Attesa tale ambiguità ho creduto di dover ritenere l' elevazione di Milano, quale fu già da me calcolata nel modo indicato , sebbene possa non essere esattissima .

Un' altra cagione di errore nelle altezze da me esposte può trovarsi nell' essere le due corrispondenti osservazioni ba-

barometriche fatte non contemporaneamente, ma in tempi diversi di più ore, la qual cagione però non sembra poter produrre un errore molto considerabile. In ogni modo io nella Tabella espongo insieme con altre circostanze anche le ore, in cui sono state fatte le osservazioni, onde vediate quanto possiate confidare nei risultati. E poichè lo scopo di prender tali misure è diretto non alla condotta di acque, nè ad altre simili operazioni delicate, ma solo a riconoscere in grande le differenze delle elevazioni montuose, mi lusingo, che sarete contento di quella esattezza, che può aversi dalle osservazioni, che un Geologo fa tra mezzo alle fatiche di pesanti viaggj, e che ad altri comunica, nient' altro esigendo se non compatimento al caso, che taluno esaminandole comodamente seduto al suo tavolino vi trovi qualche errore.

LETTERA NONA.

Milano 6. *Novembre* 1792.

A Voi, che ottimamente conoscete Napoli, ed i suoi contorni, sarà noto il singolare fenomeno Geologico, che è segnato non nelle montagne, nè in altra opera di natura, ma bensì in un' antica opera dell' arte, i cui avanzi offre allo spettatore la Città di Pozzuoli: Alla distanza cioè di circa 50. passi dal mare vi si veggono le rovine di un antico Tempio, chiamato volgarmente di Serapide, di cui rimangono ancora in piedi tre grosse ed alte colonne di marmo Cipollino, e queste, cominciando dall' elevazione di circa 10. piedi sul livello del mare, sono in un' altezza di sei piedi tutto all' intorno forate da quelle conchiglie marine, che *Forapietre* si chiamano, così che l' estremità superiore dei fori è elevata 16. piedi sul livello del mare stesso. Due volte io esaminai questo fenomeno, cioè prima della visita, che feci sulle coste marittime del Principato di Salerno per riconoscervi un simile fenomeno, che da altri era stato enunciato;

di

ze asso- di ciaš. luogo		mom. taccat.	Stato dell' Atmosfera	Altezze relative dei due luoghi prossimi di osservazione	Altezze assolute di ciascun luogo
parig.		Gr.		Piedi parig.	Piedi parigini
9. 7.		.	Sereno		1289. 2, 7
		'.	Vento, e pioggia.	+ 666. 1, 2	
1. 11.		'.	Vento		1955. 3, 9
		'.	Vento impetuoso	+ 1842. 10, 7	
9, 6.	Nella	'.	Vento impetuoso		3798. 2, 4
		.	Sereno	— 703. 0, 5	
3. 2.	Toscana	.	Sereno		3095. 1, 9
		.	Sereno	- 1853. 1, 10	
11. 8.					
		.	Sereno		1241. 11, 11
		. ½	Piovoso	- 567. 10, 5	
1.					
					54.
6. 5.					3496. trigon. M.
	Nel Regno	½	Sereno		
	di Napoli	½	Sereno	— 395 2, 10	
1. 2.					
		½	Sereno		
		½	Sereno	— 17 7, 7	
		½	Sereno		413.

		Luoghi	Giorno del Mese	Ore	Barometro	Termometro Reaum. attaccato	Termometro distaccato	Stato dell' Atmosfera	Altezze relative dei due luoghi prossimi di osservazione	Altezze assolute di ciascun luogo
			An. 1792.	Pomeridian. o Matutine	Pol. Lin.	Gradi	Gradi		Piedi parig.	Piedi parig.
Nel Modenese	1	S. Venanzio	Luglio 11.	pom. 10.	27. 3,2	21.	20. $\frac{1}{4}$	Sereno calmo		952. 9. 7.
		Paullo	12.	mat. 10. $\frac{3}{4}$	26. 0,3	18. $\frac{1}{4}$	17. $\frac{1}{2}$	Sereno con vento	+ 1238.4. 4.	
	2	Paullo	12.	pom. 3.	26. 0,3	17.	17.	Nuvoloso con vento		2191. 1. 11.
		Barigazzo	12.	p. 8. $\frac{1}{2}$	24. 6,7	14. $\frac{1}{4}$	13. $\frac{3}{4}$	Sereno con vento	+ 1522.7. 7.	
	3	Barigazzo	13.	m. 9. $\frac{1}{2}$	24. 6,7	14.	14.	Sereno		3713. 9, 6
		Pieve Pelago	13.	p. 0. $\frac{1}{2}$	25. 10,1	17.	16. $\frac{1}{2}$	Sereno	— 1331.6. 4.	
	4	Pieve Pelago	15.	p. 1.	25. 11.	18.	18.	Sereno		2381. 3. 2.
		Alpe di Doccia	15.	p. 6. $\frac{3}{4}$	24. 3.	15. $\frac{1}{4}$	14. $\frac{1}{2}$	Sereno	+ 1756. 7. 11.	
	5	Alpe di Doccia	16.	m. 1.	24. 2,7	13. $\frac{1}{2}$	14.	Sereno		4137. 11. 1.
		Sommità del Cimone	16.	m. 4.	22. 0,5	7.	7.	Sereno con vento	+ 2410. 1. 11.	6548. 1.
	6	Pieve Pelago	17.	m. 7 $\frac{3}{4}$	25. 10,3	17.	17.	Sereno		
		Bosco lungo	17.	p. 0. $\frac{1}{2}$	24. 1,7	13. $\frac{1}{2}$	13. $\frac{1}{2}$	Sereno	+ 1796. 5. 7.	
Nella Toscana	7	Bosco lungo	17.	p. 2. $\frac{1}{2}$	24. 1,7	13. $\frac{1}{2}$	13. $\frac{1}{2}$	Sereno		4177. 6. 9,
		S. Marcello	17.	p. 9.	26. 4,3	18.	18.	Sereno	— 2302. 11. 9.	
	8	S. Marcello	18.	m. 4. $\frac{1}{2}$	26. 4.	17.	17.	Sereno		1874. 7. 0.
		Firenze in luogo 22. pied più alto dell'Arno	18.	p. 9. $\frac{1}{2}$	28. 1,7	20.	20.	Sereno	— 1790. 7.	
	9	Firenze	24.	m. 7. $\frac{1}{2}$	28. 1,7	20.	20.	Sereno		84.
		Ponte a Sieve	24.	p. 0. $\frac{1}{2}$	27. 9,7	22. $\frac{1}{4}$	22. $\frac{3}{4}$	Minaccia temporale	+ 332. 9. 3.	
	10	Ponte a Sieve	24	p. 2.	27. 9,7	22. $\frac{1}{4}$	22. $\frac{3}{4}$	Pioggia temporalesca		416. 9. 3.
		Vall' Ombrosa	24.	p. 7. $\frac{1}{2}$	25. 2,5	18. $\frac{1}{2}$	18.	Nuvoloso	+ 2646.	
	11	Vall' Ombrosa	26.	m. 5. $\frac{1}{2}$	25. 2,5	16. $\frac{1}{2}$	16.	Sereno		3062. 9. 3.
		Ponte a Popi	26.	p. 3.	27. 1,7	23. $\frac{1}{4}$	23.	Sereno	—1953. 2. 1.	
	12	Ponte a Popi	26	p. 4.	27. 1,7	23. $\frac{1}{4}$	23.	Sereno		1109. 7. 2.
		Convento di Vernia	26	p. 10.	24. 9,2	18.	18.	Sereno	+ 2300. 11. 3.	
	13	Convento di Vernia	27.	m. 8.	24. 9,2	16. $\frac{3}{4}$	16. $\frac{3}{4}$	Sereno		3410. 6. 5.
		Cima di Vernia	27.	m. 10. $\frac{1}{2}$	24. 3,6	16. $\frac{1}{2}$	16.	Sereno	+ 503. 6. 9.	
	14	Cima di Vernia	27.	m. 11.	24. 3,6	16. $\frac{1}{2}$	16.	Sereno		3914. 1. 2.
		Borgo S. Stefano	27.	p. 8. $\frac{1}{2}$	26. 9,3	19.	19.	Sereno	—2624. 10. 7.	

		Luoghi	Giorno del Mese	Ore	Barometro	Termom. attaccato	Termom. distaccat.	Stato dell' Atmosfera	Altezze relative dei due luoghi prossimi di osservazione	Altezze assolute di ciascun luogo
			An. 1792.	Pomeridian. e Matutine	Pol. Lin.	Gr.	Gr.		Piedi parig.	Piedi parigini
Nella Toscana	15	Borgo S. Stefano	Luglio 28.	m. 4. $\frac{1}{2}$	26. 9, 2	19.	19.	Sereno		1289. 2, 7
		Palazzi di Concelalto	28.	m. 10.	26. 1, 5	20.	20.	Vento, e pioggia.	+ 666. 1,2	
	16	Palazzi di Concelalto	28.	p. 0. $\frac{1}{2}$	26. 1, 5	20.	20.	Vento		1955. 3, 9
		Cima del sasso Simone	28.	p. 7.	24. 3, 7	10.	10.	Vento impetuoso	+ 1842. 10, 7	
	17	Cima del sasso Simone	28.	p. 7. $\frac{1}{2}$	24. 3, 7	10.	10.	Vento impetuoso		3798. 2, 4
		Petrella	28.	p. 8. $\frac{1}{2}$	25.	14.	14.	Sereno	— 703. 0, 5	
	18	Petrella	29.	m. 6.	25. 1,	15.	15.	Sereno		3095. 1, 9
		Anghiari	29.	p. 11. $\frac{3}{4}$	26. 10, 5	18.	18.	Sereno	- 1853. 1,10	
	19	Anghiari	30.	m. 6.	26 10, 1	17.	17.	Sereno		1241. 11, 11
		Arezzo	30.	p. 9.	27. 5.	16.	15. $\frac{1}{2}$	Piovoso	— 567. 10, 5	
Nello Stato Romano	20	Arezzo	31.	m. 7. $\frac{1}{2}$	27. 4, 5	15. $\frac{1}{2}$	15. $\frac{1}{4}$	Nuvoloso		674. 1, 6
		Camoscie sotto Corona	31.	p. 9.	27. 4, 1	17. $\frac{1}{4}$	17.	Piovoso	+ 38. 11, 9	
	21	Camoscie	Agosto 1.	m. 5.	27. 4.	17. $\frac{1}{2}$	18.	Nuvoloso		713. 1, 3
		Bagni di Nocera	4.	p. 2.	26. 5, 5	19.	19.	Piovoso	+ 877. 1, 11	
	22	Bagni di Nocera	4.	p. 3.	26. 5, 5	19.	19.	Piovoso		1590. 3, 2
		Nocera	4.	p. 8.	26. 7, 2	18.	18.	Nuvoloso	— 141, 7, 7	
	23	Nocera	4.	p. 8.	26. 7, 2	18.	18.	Nuvoloso		1448. 5, 7
		Foligno	5.	m. 10.	27. 6.	18. $\frac{1}{2}$	19. $\frac{1}{2}$	Sereno con nebbie	-888. 11, 10	
	24	Foligno	5.	m. 10.	27. 6.	18. $\frac{1}{2}$	19. $\frac{1}{2}$	Sereno neb.°		559. 5, 9
		Osteria sotto Spoleto al fiume	5.	p. 8.	27. 2, 1	19.	19.	Sereno neb.°	+ 310. 5, 4	
	25	Osteria sotto Spoleto	6.	m. 5. $\frac{1}{2}$	27. 2, 5	18.	18.	Sereno		869, 11, 1
		Terni	6.	p. 0. $\frac{1}{4}$	27. 9, 3	20. $\frac{1}{2}$	21.	Sereno	— 544 9, 3	325. 1, 10
		Roma al Tevere secondo Schuckburg								54.
Nel Regno di Napoli		Monte Bulgaria nel Princip. di Salerno								3496. trigon. M.
	26	Cima del Monte nuovo	18.	m. 9. $\frac{1}{2}$	27. 10, 2	14.	22. $\frac{1}{2}$	Sereno		
		Piano del Cratere di M.e nuovo	18.	m. 10. $\frac{1}{2}$	28. 3, 1	25.	24. $\frac{1}{2}$	Sereno	—395 2, 10	
	27	Piano del Cratere	18.	m. 10. $\frac{1}{2}$	28. 3, 1	25.	24. $\frac{1}{2}$	Sereno		
		Al mare pie. 1. $\frac{7}{12}$ sul livello	18.	m. 11. $\frac{3}{4}$	28. 3, 5	27.	25. $\frac{1}{2}$	Sereno	— 17 7, 7	
		Cima del M.e nuovo	18.	m. 9. $\frac{1}{2}$	27. 10, 2	14.	22. $\frac{1}{2}$	Sereno		413.

di poi dopo esserne ritornato mal concio di salute, e con una gamba, che dal deposito di febbre provenutami dall' aria pestifera di quelle spiagge era forata in guisa, che si rassomigliava ad una di quelle colonne. In questa seconda visita io osservai con sei occhj, avendomi favorito della loro compagnia due valenti Mineralogisti ed Osservatori, il Sig. Dottore in Medicina *D. Guglielmo Thomson, ed il P. Scipione Breislach* delle Scuole Pie Professore di Chimica, e di Mineralogia al Corpo Reale d' Artiglieria di Napoli.

Se nel pensare alla spiegazione di questo strano fenomeno io la prima volta mi sentii girare il capo, alla seconda fu messo in un vortice tale, che disperando di poter dire qualche cosa di plausibile, mi risolvetti a non pensarvi più oltre, ma anche mio malgrado io veniva spesso rapito da tale oggetto, siccome quello che sembra avere molta relazione colle rivoluzioni del globo terrestre prodotte dall' azione delle acque, su di cui già da qualche tempo mi vado occupando. Quindi ne' giorni stessi della mia seconda convalescenza, che per altro tutt' ora va zoppicando, non potetti a meno di pensarvi con qualche serietà, e sembrandomi di averne trovato una plausibile spiegazione, ho stimato di farne il soggetto della presente lettera: nella quale se a giudizio vostro io non fossi riuscito a sciogliere il problema, avrò almeno il vantaggio di essermi dimenticato delle noje della convalescenza nello scrivervi.

Per mettere in vista la singolarità del fenomeno, e la plausibilità della spiegazione, che io sono per esporre, è da premettere, che molte sono le specie de' vermi che hanno la proprietà di forare certe pietre, e di annicchiarvisi. Alcuni di essi sono nudi, cioè senza guscio, altri sono muniti di un guscio a due, o più valve. Quella specie che dal Linneo è chiamata *Mytilus litophagus* è bivalva; l' altra da Lui chiamata *Pholas dactylus* è multivalva. Volgarmente però ambedue le specie vengono sotto il nome di Datteri di mare, in quanto che si rassomigliano al frutto della Palma. La specie

cie da me trovata nelle rovine del nomato Tempio è il Mitilo litofago, cioè Mangiapietre, o anzi Forapietre, e ne osservai di diversa grandezza, la quale però non eccedeva la grossezza di un pollice, nè la lunghezza di tre pollici. La pietra, che viene forata da tutti que' vermi, non è la selciosa, nè altra di tal durezza che battuta coll' acciarino dia fuoco; ma suole essere la pietra calcaria, o altra arenosa, o argillosa: ed in fatti anche i pezzi del Tempio così forati sono calcarei, così che nelle grandi colonne di marmo Cipollino, nel quale sono mischiate alcune glandole di quelle pietre selciose, che chiamasi quarzo, e Feldispato, queste si trovano del tutto intatte.

Per forare la pietra sono questi vermi, per quanto io penso, proveduti dalla natura di un umore, il quale per se la rammollisce nella superficie, ed ajutato dal moto di certe parti dell' animale giugne a staccare successivamente dalla pietra stessa un certo numero di particelle, le quali susseguentemente vengono via trasportate dal moto dell' acqua, in cui quegli Animali vivono.

A misura che i vermi colla loro conchiglia vanno crescendo aumentano anche l' ampiezza del rispettivo loro foro, il quale esssendo stato cominciato alla superficie della pietra vi si conserva; e per esso la loro abitazione comunica coll' acqua del mare. Ma il foro, che rimane alla superficie esterna della pietra, suol essere assai più piccolo della conchiglia, così che l' animale vi rimane come chiuso in una prigione, dalla quale non è tratto se non per passare anche vivo nella bocca di chi ne è ghiotto. Tali cose io stesso ho riconosciuto in alcune pietre isolate, che feci levare dal fondo del mare delle coste di Genova, nelle quali speditemi dentro acqua marina, e di poi da me spezzate trovai i Mitili litofagi, ed alcuni vermi nudi ancora viventi.

Ogni Mitilo abita in un foro distinto; talora però sembra, che uno abbia voluto invadere l' abitazione dell' altro, trovandosi varj fori che tra loro in parte s' intersecano. Ma questo è un effetto , che viene prodotto allora quando due vermi vicini ingrandendo la loro abitazione consumano la parete divisoria ; e così si trovano in un appartamento quasi comune , il quale però ad ambedue non basta . Come tra loro in tal caso si accomodino io non saprei dirlo . Ma sembra che siccome uno farà vicendevolmente noja all' altro , così ognuno procurerà di liberarsi dall' importunità del vicino, ed il più forte prevalerà al più debole .

Alloggiando generalmente ciascun verme in una nicchia distinta , da cui non può uscire, sarete forse curioso di sapere come essi moltiplichino la loro specie ; ed io più che volentieri vi soddisfarei, se la cosa anche per me non fosse tuttavia una curiosità . In qualunque modo però ciò si effettui è certo , che i semi, o almeno i piccoli vermi già nati vengono deposti , o portati fuori dalla nicchia abitata dalla rispettiva loro madre . La pruova si è , che nelle pareti interne del foro di un grosso verme non mai, per quanto io mi sappia , trovasi scavato un piccolo foro che sia abitazione di un altro verme della stessa specie . Per contrario alla superficie esterna delle pietre forate veggonsi grandi, e piccoli fori , cioè proporzionati alla grandezza, che i vermi sino dalla loro nascita vanno successivamente prendendo . Da che vuolsi conchiudere , che i semi o i piccioli vermi vengono deposti immediatamente nelle acque marine, oppure, se sono deposti alla superficie delle pietre abitate dalle madri , possono però esserne staccati dal moto delle acque marine , ed essere da queste altrove trasportati ; la qual conclusione è di molta importanza, siccome quella , che servirà alla spiegazione del proposto fenomeno .

Scrissero altri, tra' quali il Sig. *Ferber* (Lettres sur la Mineralogie de l' Italie p. 266.) , che questi vermi non abitano sul fondo del mare , ma soltanto all' altezza , a cui giugne la superficie dell' acqua . Questa asserzione fu certamente azzardata come altre molte senza essere preceduta da esatte osservazioni . Io non saprei dire quanta sia la profondità d' acqua, al-

alla quale fissano la loro stazione. Ma certamente que' pezzi isolati, che io ricevetti da Genova con entro i Datteri vivi, furono tratti dal fondo del mare, ossia da terreno costantemente coperto dall' acque marine; ed allorachè per lautezza di mensa si fanno estrarre dagli scogli del Genovesato questi Datteri, i nuotatori vi scendono ad una sensibile profondità.

Alla storia locale di questi vermi, così come alla spiegazione del proposto fenomeno potrebbe appartenere la domanda, se ora se ne trovino nella spiaggia di Baja, e quale situazione vi abbiano. Per rispondere alla qual dimanda io confesso di non avere sufficienti osservazioni. In ogni modo posso dire, che negli scoglj del Ponte di Caligola io trovai annicchiata qualche piccola conchiglia simile ai Datteri di mare: il che può dar argomento da credere, che questi tutt' ora vivano in que' contorni. Ma quand'anche non ve ne esistessero, ciò non proverebbe, che non ve ne fossero ne' passati secoli: perciocchè noi abbiamo una ragione sufficiente della loro distruzione nelle eruzioni vulcaniche, e massime in quella del Monte nuovo, che ben possono averli seppelliti sotto le copiose materie eruttate in tutti que' contorni. Della scomparizione di animali marini da certi tratti di mare noi abbiamo varii esempii, tra' quali è rimarchevole quello riportato dal *Pennant* (Le Nord du Globe). Egli ci assicura, che gli Arenghi frequentarono in gran copia le coste della Livonia, e della Curlandia sino all' anno 1313; nel qual tempo abbandonate quelle coste si avvicinarono alla Danimarca, e finalmente abbandonarono il Baltico per qualche secolo; ma nel 1713. cominciarono a ricomparire sulle coste della Svezia, ove si pescano nell' estensione di 35. leghe.

A questa breve Storia de' Mitili litofagi non sarà fuori di proposito l' aggiugnerne un' altra brevissima del Tempio. La magnificenza dell' Edifizio, e l' Architettura Corintia, che vi domina con tutti i più delicati ornati mostra, che quello fu edificato o almeno riedificato non molto prima del secolo d' Augusto. Dalle iscrizioni, che erano alle basi delle colonne ne dell' Atrio consta, che fu ristorato, e più riccamente ornato di marmi sotto gli Auspicj degli Imperatori *Settimio Severo*, e *M. Aurelio Severo Antonino*. Gli Antiquarj sembrano convenire, che questo Tempio fosse veramente dedicato a quella Divinità, da cui ora si suole denominare, cioè a Serapide. Ai fondamenti di tale opinione arrecati dal Sig. *D. Gaetano d' Ancora* nella bella recente sua opera (*Guida ragionata per le antichità, e per le curiosità naturali di Pozzuoli*) si può aggiugnere, che *Settimio Severo* secondo la testimonianza di *Elio Spartiano* fu singolarmente divoto di Serapide, sì che il miglioramento fattosi a quel Tempio sotto il suo Impero può riguardarsi come derivato dalla sua divozione verso questa immaginaria divinità.

L' essere un Tempio così vasto eretto in una regione sottoposta ai tremuoti, e situato al piede di un monte vulcanico, quale è la Solfatara, ci somministra la cagione, per cui ebbe bisogno di frequenti riparazioni, ed ora non ne rimangono che le rovine.

Al presente il pavimento del Tempio è circa un piede più basso del livello del mare, e n' è distante solamente 100. piedi : onde non è verisimile, che questa sia la sua originaria elevazione, e tanto più quanto che sarebbe stato certamente esposto alle inondazioni sì delle acque marine, come delle terrestri e piovane. La bassa situazione, che ora ha il Tempio per rapporto al livello del mare può veramente essere provenuta o da elevazione delle acque marine rimanendo immobile il Tempio, o da abbassamento del Tempio rimanendo invariato il livello del mare, o da ambedue le cagioni insieme. Ma dalle circostanze locali, e dalle storie rilevasi, che la cagione prevalente fu l' abbassamento dell' edifizio.

Le vicinanze di Pozzuoli furono spessevolte soggette a terribili tremuoti, e si sa che l' effetto di questi è anche di subbissare edifizj intieri. Le storie inoltre ci assicurano, che in alcuni tremuoti molti edifizj di Pozzuoli furono subbissati:

il che *Scipione Mazzella* (*Situs & antiquitas Puteolorum*) racconta come intervenuto nei tremuoti del 1458., e del 1538. Altronde nè per istoria, nè per veruno argomento può provarsi che il mare siasi sensibilmente alzato di livello dai tempi di Settimio Severo sino ai nostri. Poste le quali cose possono a confermazione dell' abbassamento del Tempio di Serapide servire anche quei molti edifizj, che ora in quelle vicinanze si veggono coperti dal mare, siccome quelli che dovettero in simili circostanze essersi abbassati. Tali sono le colonne di Granito, di cui in altra mia vi parlai, le quali quantunque spezzate pure si veggono ancora in piedi poco lungi dal Tempio di Serapide, come pure la strada selciata nel seno di Baja ec. (V. Gaetano d'Ancora l. c.)

Quando sia accaduta la rovina di questo Tempio non si può facilmente determinare, giacchè a spogliare Pozzuoli del suo antico decoro concorsero non solo gli sdegni della natura, ma anche la barbarie di diverse nazioni. Nell' anno 406. fu devastata questa Città con ferro, e fuoco da Alarico Re de' Visigoti; nell' anno 456. da Genserico Re de' Vandali; nel 545. da Totila Re de' Goti, che ne diroccò anche le mura; e nel 715. da Romualdo II. Duca di Benevento che la incendiò. L' eruzione della Solfatara accompagnata da tremuoto nel 1198., l' altro tremuoto del 1458., e l' eruzione del monte nuovo nel 1538. furono altrettante cagioni rammemorate dagli Storici, le quali furono più che sufficienti a distruggere insieme cogli altri anche questo antico edifizio. Al mio oggetto non molto appartiene il determinare per quale di queste cagioni sia rovinato. Quello che c' importa di stabilire è, che verso la fine del secolo decimosesto le rovine di questo Tempio non erano note, sebbene fossero ancora in piedi, come tuttavia sono, le tre grandi colonne soprammemorate oltre a molte pareti e celle ad esso circostanti. Una positiva pruova se ne ha ne' Scrittori di que' tempi, i quali non fanno alcuna menzione di quel magnifico edificio, abbenchè ne descrivano altri minori. Tra gli altri merita particolare attenzione

Ferrante Loffredo, il quale, come egli attesta, diligentemente esaminò sopra luogo le antichità di Pozzuolo, di cui ci dette la descrizione nel 1570., e nulladimeno niente accenna, che possa riportarsi a questo Tempio. Quì però non devo dissimulare, che *Giulio Cesare Capaccio* (Capit. XXIV. *Antiquit. & histor. Campaniae*), e *Scipione Mazzella* (*Situs & Antiquitas Putcolorum ex versione Havercampi*) rammemorarono tre colonne ancora esistenti al loro tempo a Pozzuolo, le quali quantunque da essi sieno riportate ad un altro Tempio, cioè a quello di Nettuno, pure per la corrispondenza del numero, e della grandezza loro potrebbero da altri riguardarsi per quelle tre colonne del Tempio di Serapide, che tuttavia si veggono in piedi; e tanto più quanto che quei due Scrittori sembrano accennare che quelle esistessero ritte sulle loro basi. Ma il dubbio svanisce esaminando le parole del *Loffredo*, che così si esprime secondo la traduzione dell' *Havercampio*. *Ex tribus illis columnis prolapsis una penes alteram in horto Hyeronimi a Sangro existentibus concludendum est, ipsas ad porticum ejusdem Templi Neptuni olim pertinuisse, atque ex alto praecipitatas in illum locum fuisse. In vicinis enim ibidem planis nec minimae quidem inveniuntur alicujus aedificii reliquiae, ad quod illae pertinere potuerint*. Da queste parole appare, che le tre colonne rammemorate da *Loffredo* a suo tempo erano sdrajate, ed esistevano nella Villa *Sangri*, onde non possono riportarsi alle colonne del Tempio di Serapide, che tuttavia esistono sulla loro antica base. Ma le tre colonne, di cui parlasi dal *Capaccio*, e dal *Mazzella*, sono quelle stesse che rammemoransi dal *Ferrante*; giacchè tutti e tre questi Scrittori convengono nel dirle situate nella Villa Sangri, e nel riportarle al Tempio di Nettuno. Perlocchè esse non possono confondersi colle tre colonne del Tempio di Serapide. Che se il *Capaccio*, ed il *Mazzella* scrivono che quelle erano in piedi, ciò al più prova, che dopo i tempi di Loffredo furono in qualche modo rialzate.

Se si cerca come questo Tempio di Serapide sia stato almeno in parte seppellito, facilmente trovasi la cagione nelle eruzioni de' vicini Vulcani. Nell' anno 1198. seguì l' eruzione della Solfatara, e nel 1538. quella del Monte nuovo. Ambedue furono sì grandi, che ben potettero seppellire il Tempio, come avvenne ad altri edifizj di que' contorni; altronde vedesi chiaramente, che la materia, la quale tuttavia ingombra una parte del Tempio, è un tufo vulcanico. Non trovandosi tra l' età di Settimio Severo, e la nostra veruna menzione di altre grandi eruzioni in quelle vicinanze, conviene ad una di esse ascrivere l' indicato effetto.

Questo edifizio fu diseppellito verso la metà del corrente secolo: onde appare che rimase in quello stato almeno 200. anni, giacchè sono più di due secoli, da che avvenne l' eruzione del Monte nuovo, che fu l' ultima in que' contorni.

Premesse tali cose, sono ora da esaminare le ipotesi finora immaginate per ispiegare il fenomeno. Il Sig. *Ferber* (*Lettres sur la Miner. d' Italie*), ed altri stimano, che il mare sia stato più elevato di quel che sia al presente: la qual' elevazione maggiore devesi ammettere almeno di circa 16. piedi parigini: giacchè altrettanta è l' elevazione del limite superiore delle corrosioni fattevi dai vermi marini. In questa ipotesi si assume, che l' edifizio non siasi sensibilmente abbassato, epperò ammettesi, che tale elevazione di mare sia accaduta dopo il tempo, in cui per le Storie consta essere stato quell' edificio accessibile: il qual tempo cade nel secolo terzo dell' Èra Cristiana. Quindi i sostenitori di tal ipotesi devono provare 1.° che da quel secolo in poi siasi il mare elevato 16. piedi, e siasi a tale altezza mantenuto almeno per alcuni anni, cioè per quelli che erano necessarii ai Mitili Litofagi per compire con successive loro generazioni tutto quel lavoro, che ora si vede, 2.° che dopo di tal tempo il mare siasi di nuovo abbassato. Per dare una tal pruova conviene o arrecare delle Storie, o assegnare in natutura una cagione sufficiente di tale elevazione, ed abbassamento, la quale possa verisimilmente avere agito. Ma da nessuna Storia rilevasi tal' elevazione ed abbassamento generale del mare in que' tempi. Parimenti in natura non abbiamo esempio che il mare siasi elevato di 16. piedi, e mantenuto a tal' elevazione per un certo numero di anni. Abbiamo bensì esempj di subitanee elevazioni anche maggiori di 16. piedi, ma in ognuna sempre intervenne un rapido ritorno al primiero livello. Certamente per le leggi d' equilibrio dei fluidi non poteva il mare mantenersi per alcuni anni 16. piedi più elevato di prima nelle vicinanze di Pozzuoli, se non nel caso che di altrettanto fosse elevato anche il rimanente del Mediterraneo, almeno nelle parti non molto rimote da Pozzuoli. Quindi sarebbero state per quel tempo inondate tutte le terre circostanti al Mediterraneo, che erano elevate meno di 16. piedi sul presente livello: il che avrebbe in vaste estensioni di paese prodotte pubbliche calamità, le quali nella moltitudine di Scrittori di que' tempi, sarebbero state almeno da alcuni rammemorate, e poichè nissuno ne parla, il loro silenzio accompagnato dalla fisica inverisimiglianza del fatto supposto forma una positiva prova contro l' accennata spiegazione del fenomeno.

Non potendosi spiegare la cosa per l' indicata elevazione di mare, e consecutivo suo abbassamento per rapporto all' edifizio supposto immobile, immaginarono altri una contraria ipotesi dicendo, che l' edifizio per l' azione di tremuoti primamente si abbassò di circa 16. piedi, e per l' abbassamento rimase inondato dal mare esistente anche allora al livello presente; dipoi per altra simile cagione fu rialzato come ora si trova. Chi fece così danzare il Tempio mostrò più abilità d' immaginare, che di osservare. L' osservazione ci mostra, che le tre grosse colonne del Tempio e le molte pareti, che lo circondano, sono ancora a perpendicolo sulle loro basi: e che inoltre il piano del pavimento è ancora in gran parte lastricato di marmi, ed orizzontale. Ora chi mai comprenderà, rà, che negli irregolari movimenti de' tremuoti abbia non solo potuto cadere verticalmente, ma anche rialzarsi a perpendicolo senza scomporsi il suo piano. Se un edifizio viene subbissato, ciò avviene perchè al di sotto vengono a mancargli i sostegni per una o più caverne che vi si formano: il quale abbassamento continuato per 16. piedi sebbene difficilmente, pure in qualche modo può intendersi che avvenga mantenendosi l'edificio in piano, giacchè la forza, per cui cade è la gravità, che per se agisce verticalmente. Ma se deve rialzarsi verticalmente richiedesi, che al disotto agisca un immensa forza distribuita uniformemente su tutto il piano dell' edificio, e che inoltre vi subentri una materia che sodamente riempia il vuoto sottoposto, che risulta dall' elevazione dell'edifizio, e vi formi successivamente un sostegno tale, per cui sempre rimanga in piano a misura che si va elevando, e si fermi quindi in un piano parimenti orizzontale. Ma sebbene non possa esservi difficoltà ad ammettere una forza sufficiente ad elevare un vasto Tempio, pure non mai s' intenderà come possa quella agire con tutte quelle circostanze, che sono necessarie a mantenerlo nella sua primitiva situazione.

Poichè nel moto nè del mare, nè del Tempio non trovasi una soddisfacente spiegazione della cosa, si rivolsero altri ad una ipotesi che prescinde da ambedue que' movimenti dicendo, che le colonne furono forate da' vermi marini non nell' edificio, in cui si trovano, ma altrove, e prima che vi fossero poste in opera. A questa opinione opponesi primamente l' inverisimiglianza dell' uso di colonne si difettose in un Tempio di tanta magnificenza; ed è bensì vero, che poteva coprirsi il difetto collo stucco. Ma oltre a che male sarebbesi proveduto con tale ripiego, noi non ne vediamo al presente verun vestigio in quelle colonne. Che se si dicesse, che fu consunto dalle ingiurie dell' aria sarebbe un vano sutterfugio: perciocchè primamente gli stucchi antichi erano di molta durata anche all' acqua, come vedesi in quello, che tutt' ora sussiste nell' antichissimo acquedotto scavato nella

Lava in vicinanza di Pozzuolo, come accenna il Ch. *P. Breislak* (pag. 169. *Essais Mineralogique sur la Solfatare de Pozzuole*). Oltre a che se si conservarono nei fori i gusci delle Conchiglie che li formarono, molto più avrebbe dovuto conservarsi lo stucco, che in essi dovette penetrare ed involgere i gusci medesimi. Ma quello che rende apertamente falsa tal opinione si è, che tra le rovine veggonsi varj tronchi di colonne spezzate, le quali sono forate non solo nella superficie esterna, ma anche nel piano della loro spezzatura, ed al medesimo inoltre sono aderenti, e rilevati i gusci di altri vermi marini, che *Serpule* si chiamano. Ora quando le colonne erano intere, il piano delle spezzature non esisteva, e le *Serpule* in esso rilevate non permettono, che si dica che le Colonne erano composte di fusti già spezzati: perciocchè nel commetterli, le *Serpule* ora rilevate si sarebbero schiacciate. Dal che è manifesto, che questi pezzi furono pertugiati dappoichè il Tempio fu rovinato, cioè dappoichè essi vi furono posti in opera. Per lo che anche le tre colonne, che tutt' ora si veggono sulle loro basi, voglionsi riguardare come forate in quel sito ove ora si trovano, quando pure non si voglia, che gli traforamenti esistenti nei diversi pezzi di quelle rovine sieno stati fatti parte prima di essere posti in opera, e parte dappoi per un' elevazione del mare, che abbia inondate, e di poi nuovamente abbandonate le rovine medesime: il che sarebbe moltiplicare le ipotesi senza giugnere alla divisata spiegazione.

Il rifiutare le opinioni altrui fu sempre un assunto più facile, che stabilirne una propria, ed in questa difficoltà io tanto più ora mi trovo, in quanto che sembra non potersi per la spiegazione del fenomeno ricorrere se non ad alcuna delle rifiutate. A spianarmi tale difficoltà io comincerò a fissare ciò, che per osservazione è certo, cioè che quei traforamenti furono fatti in quel sito o circondario, in cui ora si trovano, siccome poc' anzi provai; quindi per naturale conseguenza risulta, che le acque del mare sieno giunte, e rimaste

ste per un certo tempo sino a quell'altezza, in cui le tre colonne sono forate dai vermi marini. Ma in due modi le acque vi potettero giugnere e rimanervi per un certo tempo, cioè o per un abbassamento, e consecutivo rialzamento del Tempio, oppure per alzamento, e consecutivo abbassamento delle acque marine, o per ambedue le cagioni insieme. L'indicata mutazione nella posizione del Tempio fu già mostrata inverisimile. Dunque rimane, che si ascriva l' effetto all' azione delle acque marine. Questa in due modi può intendersi, in quanto che le acque nel tempo che inondarono il Tempio potettero o nò avere comunicazione col resto del mare. Se le acque inondanti il tempio avessero comunicato col resto del mare, questo sarebbe stato per lungo tempo ad un' elevazione sensibilmente maggiore della presente: il che ho mostrato essere alieno dal vero. Rimane pertanto, che si dica, che le acque marine inondatrici del Tempio vi soggiornarono senz' aver comunicazione coll' alveo marino. Così dunque una distinzione tra mare, ed acqua di mare mi conduce ad una spiegazione del fenomeno diversa dalle tre accennate, la quale consiste nell' assumere, che sulle rovine del Tempio siasi formato un laghetto di acque marine.

Ma mi richiederete come potè egli formarsi dall' acqua marina un Lago ad un livello più elevato del mare? Come in quest' acque esistevano, e vissero i vermi marini? Come vi si conservarono per tanto tempo, quanto era necessario per compire quel lavoro che ora vi appare? Se a tali ed altre simili dimande io darò una facile soluzione, e questa coerente alle osservazioni locali, ed alle relazioni istoriche, io mi crederò di aver messa la mia opinione al disopra delle semplici ipotesi.

Per soddisfare alla prima quistione conviene primamente assegnare il modo, con cui nel circondario del Tempio si formò un alveo atto a ritenere le acque, di poi come vi pervennero le acque marine. Già abbiamo veduto, che le rovine di questo Tempio rimasero per lungo tempo seppellite da ceneri ed altre materie vulcaniche, le quali, come è noto, prendono prestamente una considerabile consistenza, e dopo un certo tempo si uniscono tra loro formando un tufo di considerabile durezza. Ciò vedesi manifestamente anche al Monte nuovo, la cui formazione è molto recente, siccome quella che avvenne nel 1538. Tanto più facilmente le materie vulcaniche prendono consistenza se sono miste con acqua, e tale mischianza aveano le fanghiglie, che vennero gettate nell' eruzione del Monte nuovo, e che giunsero sino a Pozzuoli. Una simile materia dovette essere eruttata anche dalla Solfatara nel 1198., giacchè nella Valle, in cui questa arde, le acque vi ristagnano, e devono infiltrarsi in cavità sotterranee, da cui escono di poi in occasione dell' eruzione. Quindi la materia, da cui furono ricoperte le rovine del Tempio, era atta a ritenere l' acqua. In essa parimenti dovevano esistere molte concavità più o meno profonde, in cui le acque potevano raccogliersi: il che facilmente intendesi, attesa l' irregolarità delle materie eruttate, ed in esso cadute, e le ineguali elevazioni, che aveano le diverse parti del Tempio già rovinato. Che anzi se si riflette, che intorno al Tempio esistevano le Celle, ed altre parti già mezzo rovinate, vedesi che quand' anco le materie eruttate vi fossero cadute equabilmente, pure il suo circondario a motivo di que' rialzi già esistenti doveva unitamente colle materie cadutevi avere un' altezza maggiore di quella, che verso il mezzo del Tempio sarà stata formata dalle sole materie vulcaniche: onde il Tempio interrito deve avere avuta quasi la figura dell' alveo di un piccolo lago, in cui le tre colonne più elevate saranno stati come tre scoglj.

Così dunque troviamo preparato da Vulcano un letto o anzi una culla a Nettuno, e se io dirò che Vulcano stesso ve lo fece entrare, non sarà questo alieno dalla sua consuetudine. Perchè ciò non vi sembri un paradosso, io non una, ma due maniere arrecherò, con cui facilmente potè entrare l' acqua del mare in quell' alveo; e queste si riducono o ad una eruzione dell' acqua stessa da Cratere vulcanico, o ad una elevazione subitanea, e passeggera del mare prodotta da tremuoti originati verisimilmente, o almeno accompagnati da vulcanica azione. A provare la prima maniera io potrei molte storie arrecare di simili fatti in diverse parti accaduti; ma sarebbero inutili, da che noi sappiamo che realmente nell' eruzione del Monte nuovo uscì una grande quantità d' acqua, che giunse non solo a Pozzuoli, ma anche fino a Napoli. Ciò è asserito da due Testimonj di vista, *Marcantonio delli Falconi*, e *Pietro Giacomo da Toledo* nelle loro relazioni, di cui altrove già parlai. Essi veramente non dicono, che l' acqua fosse marina, ma è facile a provare, che essa era tale. Certamente il Cratere del Monte nuovo si approfondava sino sotto al livello del mare, giacchè dalle misure da me prese anche al presente il fondo visibile del Cratere medesimo è quasi allo stesso livello col mare, oltre a che le sabbie stesse, che sono al piede del monte, e che rimangono sempre coperte dal mare sono tanto calde, che appena si possono tenere in mano: il che indica che tuttavia esiste colà qualche caverna infuocata al disotto della superficie del mare. Di più il Cratere del Monte nuovo è ora distante dal mare soltanto qualche centinajo di piedi; ed al tempo dell' eruzione dovette essere ad una minore distanza, atteso che allora non eranvi tra mezzo le materie eruttate, che secondo le storie cadettero in mare, rialzandone il suo fondo, e costringendolo così a ritirarsi. Ora se il Cratere era più basso del livello del mare, ed in molta vicinanza di questo, è chiaro che le acque marine dovettero avere una comunicazione colle caverne, da cui esciva l' eruzione. Ciò viene confermato dal ritiro subitaneo del mare su di una estensione considerabile, che *Pietro da Toledo* dice essere stata di 200. passi sulla spiaggia di Pozzuoli: il qual ritiro nelle circostanze delle vicinanze vulcaniche di Pozzuoli ben può plausibilmente spiegarsi, ascrivendolo almeno in parte, ad un subitaneo ingresso di acque marine nelle cavità apertesi sotto il li-

livello delle acque medesime. Un' altra confermazione si può derivare da quel fonte di acqua salsa, che in quell' occasione sprizzò sulle coste del golfo Bajano, come asserisce *Marcantonio delli Falconi*. Potè adunque dal Cratere del Monte nuovo essere eruttata acqua marina sufficiente a formarne uno stagno nei rinvallamenti rimasti del Tempio di Serapide.

L' altra maniera di passeggera elevazione delle acque marine è conforme a ciò, che molte volte altrove avvenne. Il Sig. *Kracheninni-Kow* (Hist. du Kamtschat-Ka) scrive, che nell' eruzione del Vulcano di Awatcha accompagnata nel 1737. da grande tremuoto il mare vi si alzò 18. piedi, poi ritirossi; quindi rialzossi altrettanto, e si ritirò sino a vista d' occhio; finalmente fece un terribile alzamento di 180. piedi, inondando tutta la costa, e rapidamente si ritirò. Dai Sigg. *Giorgio Juan*, ed *Antonio Ulloa* (Relacion historica del viage a la America meridional tom. III. lib. 1.) sappiamo che nel tremuoto, in cui Lima con Callao nell' anno 1746. fu in poco più di tre minuti distrutta, il mare si ritirò, poi restituitosi fece una inondazione tanto elevata, che sorpassò le muraglie, e gli edifizj di quella Città. Il *Bougainville*, per lasciare altri Scrittori, riferisce (Voyage autour du monde) che nella nuova Brettagna durante il tremuoto del 1768. il mare si alzò, ed abbassò più volte a considerabile altezza.

Chi dunque potrebbe oppormisi se dicessi, che una simile elevazione di mare sia intervenuta in occasione dell' eruzione del Monte nuovo, la quale altronde si sa essere stata accompagnata anche da tremuoti? Mi si opporrà forse, che gli Scrittori contemporanei non facciano menzione di tale elevazione, anzi dicano espressamente che il mare siasi ritirato? Ma il ritiro del mare da essi accennato non potè avvenire se non in quanto che era stato preceduto da una straordinaria e breve elevazione.

Per provare tal cosa conviene avvertire, che il ritiro del mare da una spiaggia è sempre accompagnato da un abbassamento del livello delle acque ad essa circostanti sino ad una certa distanza. Perciocchè ogni spiaggia ha una pendenza verso il mare, la quale può assumersi almeno di 2. pollici per ogni passo: onde il ritiro per 200. passi importerebbe l'abbassamento di 400. pollici, ossia di circa 33. piedi. Ciò posto le circostanze, con cui gli Scrittori riportano quel ritiro dell'acque marine sembrano provare, che questo sia stato preceduto da una straordinaria elevazione. Essi scrivono che per tale ritiro rimase sulla spiaggia una grande copia di pesci. Ora lungo quelle spiagge non sogliono abitare molti pesci, e quando anche vi fossero stati non sarebbero rimasti in secco per un subitaneo ritiro del mare: perciocchè essi sogliono seguire le acque, e perciò con queste essi si sarebbero pure ritirati. Per contrario se il mare prima di ritirarsi avesse fatta una rapida irruzione sulla spiaggia, poteva esso portarvi i pesci anche da siti rimoti dalla spiaggia stessa, ed essendovi questi sbattuti con impeto potettero rimanervi o estinti, o sbalorditi in modo da non potersi ritirare nel pronto ritiro delle acque. Sembra pertanto, che questa circostanza dei pesci non possa spiegarsi, se non ammettendo, che il ritiro del mare fosse una conseguenza di una precedente straordinaria elevazione del medesimo: il che confermasi anche dalla circostanza de' tremuoti, che precedettero l'eruzioni del Monte nuovo, giacchè, come appare dagli esempj poc'anzi accennati, il mare in occasione de' tremuoti suole in alcuni tratti fare qualche straordinario gonfiamento. Certamente quel ritiro non potè essere un abbassamento costante del precedente livello del mare, perciocchè in tal caso sarebbe intervenuto un simile abbassamento di circa 33. piedi su tutte le coste del Mediterraneo: di che non trovansi nè indizj locali, nè memorie storiche: altronde essendo stata parziale nel golfo di Baja e Pozzuolo la cagione di quel ritiro, non poteva produrre su tutto il Mediterraneo un tale abbassamento.

È dunque da dire, che prima di quel ritiro di mare accennato dagli Scrittori v' intervenne una elevazione straordinaria maggiore di 16. piedi, la quale perciò ben potette portatare le acque marine dentro il vicino Tempio di Serapide, sormontando le sponde di quei rinvallamenti, in cui esse potettero fermarsi. Egli è il vero, che questi Scrittori non fanno menzione di elevazione straordinaria del mare, ma solo di un ritiro del medesimo. Ma non è maraviglia se in un tempo, in cui tutti fuggivano sbigottiti, e la faccia del paese fu mutata dai tremuoti e dalle materie eruttate dal Monte nuovo, non sieno state avvertite quelle circostanze, che per esser verificate richiedevano un' attenta osservazione locale; e se per rapporto al mare sia stato solamente notato il ritiro, non in quanto che gli Scrittori lo abbiano osservato, ma piuttosto in quanto che lo congetturarono dai pesci rimasti sul lido, e che furono forse veduti soltanto da quella bassa gente, che fuggiva dopo d' averli rapidamente raccolti.

Poichè le acque marine potettero entrare nella capacità del Tempio non solo per eruzione dal Cratere del Vulcano, ma anche per rapida elevazione del mare, non sarà difficile lo spiegare come con esse sieno anche entrati i Datteri di mare, ovvero i loro semi, o germi; giacchè facilmente intendesi, che quelli potettero essere contenuti nelle acque stesse, come suole avvenire anche per riguardo ad altri corpi organizzati marini. Nè potrebbe far difficoltà, che al presente tali vermi non esistano nel golfo di Baja; perciocchè ben potettero esistervi prima dell' eruzione del Monte nuovo, e quindi esservi periti a cagione delle materie vulcaniche di cui furono dappoi ricolmate quelle spiagge, come avvenne alle tanto celebrate Ostriche del vicino Lago Lucrino.

A chi ammettesse, che quelle acque sieno state eruttate dal Cratere potrebbe fors' anco opporsi, che l' acqua per l' azione del fuoco vulcanico dovette divenire assai calda, sì che quei corpi organizzati avrebbero dovuto cuocervisi non meno che le uova nell' acqua bollente, e così essere inabilitati a vivere. Tale difficoltà però sarebbe agevolmente sciolta riflettendo, che a riscaldare sensibilmente una massa d'acqua non basta, che essa sia vicina al fuoco, ma richiedesi inoltre che l' attività del fuoco sia proporzionata alla massa dell' acqua, e che su questa agisca per un dato tempo. Ora nell' eruzione del 1538. l' azione del fuoco non fu molto grande, giacchè non formò correnti di lave, ma solo eruttò con acqua materie solide già fuse per innanzi: altronde l' acqua eruttata fu in molta quantità, essendo quella stata mista con terra giunta sino a Napoli, e più oltre ancora. Di più l' eruzione fu molto rapida, siccome quella che in non molte ore formò un considerabile monte, la cui altezza secondo le misure da me prese è di piedi 413. Conviene pertanto dire, che le circostanze non furono tali da poter riscaldare considerabilmente tutta la massa d' acqua, che fu eruttata, e quand' anco si ammetta, che essa abbia avuto un certo grado di calore, non però si potrà provare, che questo fosse sì grande da rendere que' corpi inetti alla vita. Certamente tra i fonti, che si videro sprizzare in quella eruzione, uno era di acqua fredda, abbenchè fosse 250. passi più vicino all' eruzione di quel che fosse un altro caldo: inoltre in maggior vicinanza dell' eruzione si formò un piccolo torrente di acqua fresca (*V. M. Ant. delli Falconi* l. c.). Da che viene confermato, che non ostante la vicinanza del fuoco potè almeno una porzione dell' acqua rimanere facilmente ad un grado di calore non molto maggiore di quello, che aveano naturalmente le acque marine.

Per la soluzione del proposto Problema sarà indifferente il derivare la formazione dell' accennato Laghetto da acque marine o eruttate da un Cratere vulcanico, ovvero elevatesi per subitaneo, e passeggero gonfiamento del mare; e forse che ambedue insieme queste cagioni vi concorsero; come pure sarà indifferente il riportare tal effetto al tempo dell' eruzione o del Monte nuovo, oppure della Solfatara, o anche ad altra più antica eruzione di que' contorni; le quali tutte si sa, che generalmente furono accompagnate da tremuoti, ossia da una cagione solita a produrre straordinarii gonfiamenti nel mare . Io però inclinerei a riportare la cosa al tempo dell' eruzione del Monte nuovo , e ciò a motivo di una osservazione , che feci sui gusci dei Mitili Litofagi , che io stesso estrassi dalle rovine del Tempio di Serapide. Osservai cioè , ch' essi non sono nè calcinati , nè pietrificati , ma quasi nel loro stato naturale , giacchè nell' interno risplende ancora quel languido colore perlato che hanno , quando sono viventi , e nell' esterno hanno perduto soltanto quella membrana di color ranciato , la quale per altro spontaneamente si stacca spesse volte anche dai loro gusci conservati nei Musei . Essendo questi gusci per natura molto sottili , e fragili , ed essendo essi così ben conservati non ostanti le ingiurie dell' atmosfera , a cui furono esposti , il loro annicchiamento in quegli antichi marmi devesi ascrivere ad una molto recente data ; e questa per altri fatti non sembra potersi riferire se non all' eruzione del 1538.

È ora da spiegare come le acque di mare portate nell' indicato Laghetto siensi conservate tanto tempo , quanto era richiesto ai vermi marini per crescervi e fare nelle rovine del Tempio quei lavori che vi si osservano . Per giugnere a tal fine basta provare , che in questo Laghetto influì per un certo tempo qualche fonte ben anche di acqua dolce , il quale riparò la perdita di acqua che il Lago dovea soffrire massime a motivo della svaporazione ; giacchè si sa , che l' acqua svaporante dal mare non porta seco i sali , e che questo si conserva salso , non ostante che in esso influisca continuamente una grande quantità di fiumi . La pruova di una precedente influenza di qualche fonte o rivo si rileva dalle circostanze locali . Primamente il nominato Tempio è situato quasi al piede della Solfatara , il piano della quale è più elevato del mare piedi 291. , e quello così come altri siti inferiori , è soggetto a ristagni di acque , le quali per vie sotterranee si vanno più o meno portando verso la radice del monte stesso . Di più essendo tal monte vulcanico , in esso devono essere intervenute considerabili variazioni nel corso , e nele nella direzione delle acque da esso defluenti. È pertanto del tutto verisimile che da esso decorresse verso il Tempio qualche fonte, e che di poi siasi diseccato o diminuito in modo, che non fosse sufficiente ad alimentare il Lago, e questo perciò siasi diseccato. L' osservazione concorda con tutto ciò mirabilmente. Anche al presente nel piano centrale del Tempio vi ristagna a poca altezza un' acqua dolce, la quale, poichè vi si conserva anche nelle più arse estati, mostra di essere proveniente non da piogge, ma da infiltrazioni derivanti dall' indicato monte. Di più le pareti delle Celle e dei portici circostanti al Tempio presentano sino all'altezza di quasi 7. piedi una incrostazione stallactitica, simile a quella che viene formata da depositi di acque cariche di terra calcarea. Ora tale incrostazione non può essere provenuta dal mare, giacchè esso dopo l' erezione del Tempio non mai fu di permanenza ad un' altezza sensibilmente maggiore della presente: altronde quella può con tutta la verisimiglianza ascriversi ad un ristagno di acque terrestri formatosi dopo le prime rovine del Tempio, antecedentemente alle eruzioni vulcaniche, da cui furono seppellite; le quali acque non potettero concorrervi se non dal vicino monte: e poichè al presente non più vi risiedono in tanta quantità, perciò confermasi, che realmente intervenne una diminuzione di acque, a motivo della quale il Lago finalmente dovette asciugarsi.

Io non voglio quì ommettere un argomento preso dalla Storia, il quale a mio parere ha grandissima forza per provare in genere, che sul Tempio esistesse già un Lago. Abbiamo veduto, che quantunque le antichità di Pozzuolo fossero state da diversi visitate, e descritte dopo l'eruzione del 1538., pure nessuno prima dell' anno 1768., in cui il *Paoli* ne dette il disegno nelle sue *Antichità* di Pozzuoli, fece veruna menzione di questo Tempio, nè di alcuna parte del medesimo, il quale per altro era forse il più magnifico, e grandioso di que' contorni. Questo indica, che l' edificio era interamente coperto, e sottratto del tutto alla vista. Ma essendo stato espressamente diseppellito verso la metà del corrente secolo, cioè poco prima dell' anno 1768. conviene, che allora vi comparisse qualche cosa di grande che meritasse la spesa di tale operazione. Conviene pertanto dire, che quando nulla vi si vedeva di rimarchevole, la parte superiore delle sue rovine fosse coperta da una materia, che spontaneamente, ossia per naturale operazione potesse diminuirsi, e svanire; e tale non poteva essere se non l' acqua del Lago da me assunto, il quale per essere in siti vulcanici, rapidamente potè diseccarsi, come altrove è talora accaduto. Certamente se fosse stato tutto coperto di terre, o altre materie solide non si potrebbe così agevolmente trovare una cagione, la quale naturalmente ne detraesse una considerabile porzione, lasciando al loro sito i residui dell' edifizio.

Il fenomeno adunque sembra spiegato dicendo 1.° che il Tempio rovinò prima dell' eruzione della Solfatara accaduta nel 1198.; 2.° che le rovine furono in parte seppellite da materie eruttate o in quell' anno, o nel 1538. nell' eruzione del Monte nuovo; 3.° che sulle materie cadute nel Tempio si formò un Lago d' acqua marina mista coi vermi di mare; 4.° che quest' acqua fu portata a quell' altezza essendovi spinta o per immediata azione vulcanica, o per un subitaneo elevamento, ed abbassamento del mare; 5.° che per un certo tempo si conservò quel Lago per l' influenza di acque, le quali derivavano dal vicino Monte.

Stando alle cose finora da me esposte sembra, che niente più si possa desiderare per una compiuta spiegazione del fenomeno. Che se si avrà riguardo alle variazioni, che in diversi tempi dovettero avvenire sì nei fondi, e nelle altezze d' acqua di quel Laghetto, come anche nelle varie parti delle rovine, si potranno spiegare altre circostanze di quelle corrosioni, che altronde sarebbero inesplicabili. Trovansi per esempio alcuni tronchi di colonne ora sdrajati, i quali sono forati dai vermi marini non solo sul contorno esterno, ma anche

che sul piano della loro spezzatura. Essendo la linea superiore della corrosione del contorno in un piano perpendicolare all' asse della colonna sembra chiaro, che tal corrosione fu fatta mentre la colonna era in piedi; altronde la corrosione nel piano della spezzatura non poteva farsi se non dappoichè la colonna era spezzata, e rovinata. Come pertanto si spiegherà tale circostanza? La spiegazione è facile dicendo, che la corrosione del contorno esterno potè farsi mentre la colonna era in piedi; e l' altra nel piano della spezzatura, dappoichè la colonna fu rovinata, nel mentre che esisteva tuttavia quel Laghetto o colla stessa altezza d' acqua di prima, o anche con altra minore.

Un' altra circostanza, che merita spiegazione, è che essendo le colonne forate di due grandezze sensibilmente diverse, le maggiori hanno la linea di corrosione del loro contorno più elevata sul livello del mare, di quel che sarebbe la linea di corrosione delle colonne minori, se queste, che ora sono tutte rovinate, fossero rimesse sulle loro basi; quandochè sembrerebbe che la linea di corrosione dovesse essere allo stesso livello. Di questa osservazione alcuni si servirono per provare, che le colonne furono forate prima di essere poste in opera nel Tempio di Serapide, e la ragione loro era appoggiata all' ipotesi, che i Mitili Litofagi non vivano, e non si stabiliscano se non verso la superficie dell'acqua. Ma come già sul principio accennai tale ipotesi non è vera, trovandosi anche in piccioli tratti dei presenti mari questi vermi annicchiati a diverse altezze, e quand'anco fosse vera, nulladimeno non servirebbe all' intento loro. Perciocchè il Laghetto dovette in diversi tempi essere soggetto a molte, e grandi variazioni nell' altezza delle sue acque, e facilmente potè avvenire che le colonne minori sieno state forate dappoichè cessò la corrosione nelle maggiori, cioè dappoichè il Lago si abbassò costantemente ad un livello minore.

Finalmente alcuni riflettono, che le corrosioni veggonsi soltanto in alcuni pezzi di colonne ed in qualche altra parte ro-

rovinata dell' edifizio, essendo il pavimento ed altre molte parti senza alcun segno di tali corrosioni: il che ad essi sembra inesplicabile nell' ipotesi, che le acque marine o in forma di Lago, o altrimenti vi abbiano fatta una lunga permanenza di più secoli. Tale riflessione però non si oppone anzi è favorevole alla mia opinione. Io assumo, che per pochi secoli le acque marine abbiano soggiornato sulle rovine del Tempio di Serapide, giacchè esse cominciarono ad esistervi nel 1538., o al più nel 1198., e verso il principio del corrente secolo quel Lago già era asciugato. Quindi non potettero i vermi marini moltiplicarsi tanto da annicchiarsi in ogni parte di quelle rovine. Oltre a che se certi siti rimasero intatti, ciò potè anche derivare dall'essere quelli coperti da terre.

Se altri rilevasse qualche altra difficoltà, la quale dipendesse dalla presente situazione dei pezzi rovesciati, egli dovrà avvertire, che la presente loro situazione deve essere molto diversa da quella che ebbero per innanzi, e che perciò su di tal situazione non si può formare nissun plausibile argomento. Dovrà pure ritenere, che nel tempo stesso della permanenza di quel Laghetto, potè succedere la rovina di diverse parti, che per innanzi erano in piedi, e mutarsi la disposizione del suo fondo sì, che alcune parti che prima erano ricoperte di terra potettero venire in contatto dell'acqua, e vicendevolmente essere coperte da terre altre parti che prima ne erano scoperte.

Parimenti se alcuno stimasse che fosse necessario molto tempo ai vermi marini per fare quei loro lavori, egli facilmente muterà parere considerando due cose, cioè 1.° che non sono tanti que' fori, quanti sembrano a prima vista a chi li riguarda sorpreso dalla novità, e straniezza del fenomeno. 2.° che sebbene, per quanto io mi sappia, non sia finora determinato quanto tempo sia richiesto ai Mitili Litofagi per essere atti alla moltiplicazione della loro specie, e per giugnere alla grossezza in cui ora si trovano, pure dalle osservazioni fatte in altri generi analoghi di conchiglie si può di-

dire che sino dal primo anno della loro nascita sieno molto fecondi, e che crescano rapidamente, e prestamente si scavino la loro prigione. Onde vuolsi conchiudere che in ben pochi anni sieno stati da essi compiti quei fori, che ci sono rimasti.

Restami da rispondere a quelli, che obbjettassero non trovarsi veruna menzione di questo Laghetto o stagno negli Scrittori delle antichità, e de' contorni di Pozzuoli. A quelli io primamente dimanderei, se essi abbiano fatte sufficienti ricerche negli Scrittori da poter assicurare, che questi non ne facciano nissuna menzione. Dippoi io dirò, che quand' anco così fosse, pure non si potrebbe conchiudere che quello non abbia esistito. Perciocchè l' esame, che per antico altri fecero intorno a Pozzuoli era diretto soltanto a riconoscerne le antichità, ed inoltre essi generalmente si accontentavano di visitar quelle, che erano in luoghi di facile accesso. Ora uno stagno di acque, il cui diametro era al più di qualche centinajo di piedi non era un oggetto d' Antiquarii; ed inoltre essendo esso piccolo, e circondato da dirupate sponde formate da rovine coperte di materie vulcaniche, facilmente può essere stato o non veduto, o negligentato.

Io mi lusingo che voi siate per riguardare le cose da me esposte come più che sufficienti per la spiegazione del proposto fenomeno; e quando pure non fossero tali, da esse però certamente risulta, che quello ebbe origine da una cagione parziale, ossia che non ha rapporto a veruna delle generali rivoluzioni o variazioni intervenute sulla superficie del globo terrestre: a stabilire la qual verità furono principalmente dirette le mie investigazioni.

La spiegazione però da me arrecata mi presenta la spiegazione di un fenomeno del tutto geologico, il quale mi era finora sembrato inesplicabile nella supposizione, che il mare non sia stato permanente per lungo tempo ad un livello molto superiore del presente. Questo si osserva principalmente in alcune colline del Senese, nelle quali trovansi pezzi calcarei, in cui sono annicchiate certe Conchiglie simili alle Forapietre .

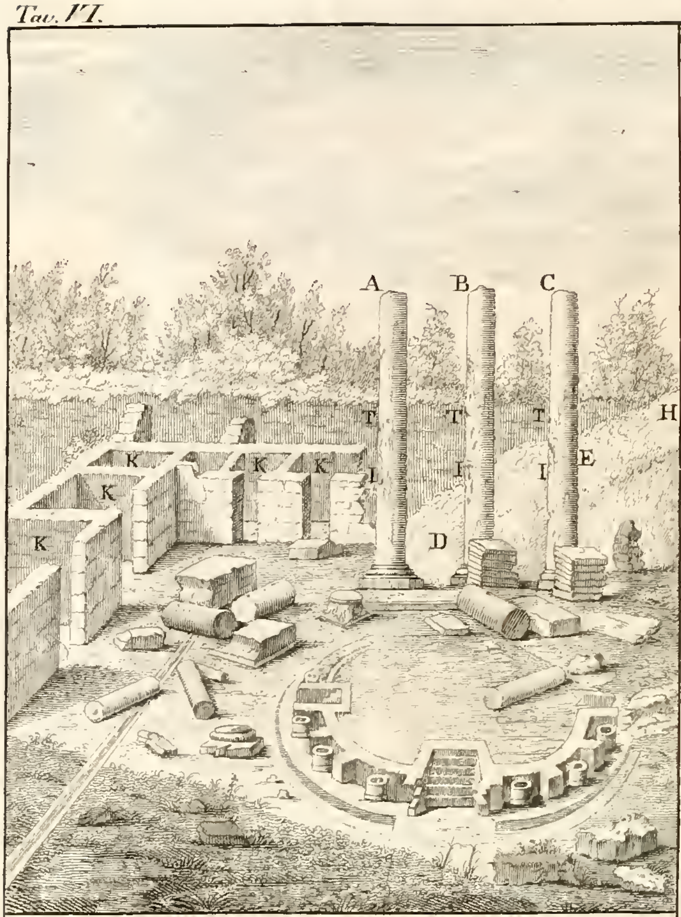
Che il mare sia stato permanente non per lungo, ma solo per breve tempo sino alle cime dei monti, mi sembra d' averlo più che abbastanza provato nella mia Memoria Geologica, che già vi accennai, e quel fenomeno, di cui detti una spiegazione, della quale mi mostrai non pienamente soddisfatto, ora mi sembra potersi compiutamente spiegare nel seguente modo . In quella generale inondazione molti animali acquatici, e massime i vermi marini, devono certamente essersi conservati vivi senza l' intervento di una particolare provvidenza . È parimenti da ammettere, che nel ritirarsi delle acque inondatrici al loro livello, saranno rimasti nei luoghi rinvallati molti Laghi, e stagni permanenti ; giacchè ambedue questi fenomeni intervengono nelle inondazioni del Pò, e di altri fiumi, ed in ogni straordinaria escrescenza di acque .

In alcune di queste acque rimaste nei rinvallamenti superiori al livello presente del mare dovettero trovarsi o animali marini vivi, o almeno i loro semi, o germi ; e questi potettero così moltiplicarsi fuori del mare presente . Così dunque le Conchiglie Forapietre potettero dopo il ritiro del mare annicchiarsi nelle pietre circostanti a que' Laghi o stagni montuosi, o in quelle giacenti sul loro fondo. Questi di poi si asciugarono, come sappiamo essere spesse volte intervenuto in altri Laghi, e dopo l'asciugamento vennero nei soliti disfacimenti dei monti trasportate altrove quelle pietre, che ora si trovano con Forapietre annicchiate .

Se alcuno mi obbjettasse, che le acque rimaste negli accennati Laghi doveano non essere salse come sono quelle del mare, e che perciò i vermi marini avrebbero dovuto perire; io gli risponderei primieramente, che anche al presente si trovano in diverse elevazioni Laghi salsi ; di poi aggiugnerei che il mare presente non ha lo stesso grado di salsedine, e che nulladimeno ci vivono molti animali della stessa specie, dei quali anche alcuni possono vivere in acque dolci . Finalmente direi, che nell' inondazione generale, abbenchè questa fosse intervenuta per soprabbondanza di acque non salse, nulladimeno non dovette formarsi un misto uniforme delle salse colle dolci . Perciocchè noi vediamo anche al presente conservarsi molte correnti di acque dolci tra mezzo alle acque marine : onde ben potettero nell' inondazione generale conservarsi alcune correnti di acque salse tra mezzo alle dolci, ed in quelle essere trasportati animali marini, o i loro semi, e germi . Ed è bensì vero che questi accidenti sono difficili ad intervenire ; ma è altresì vero, che rari pure sono i fenomeni dipendenti da tali accidenti .

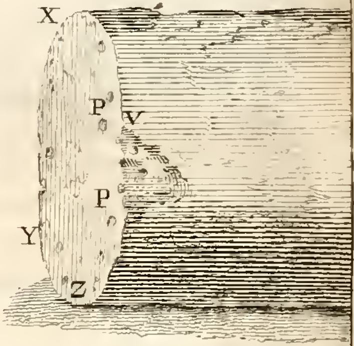
Quello che ho detto può servire a render ragione di altri fenomeni simili, che sembrano non poter essere avvenuti se non in una lunga permanenza di acque marine nei siti dove quelli si osservano . Tale è l' esistenza di copiose Madrepore, e di massi d' Ostriche che si vedono in alcuni monti . Questa lunga permanenza però non sarà da riportarsi a centinaja di secoli, sapendosi ora che que' vermi marini quando sono viventi si moltiplicano anche al presente con una prodigiosa rapidità .

Ecco dunque come le rovine di un Tempio, piccolo residuo dell' arte, mi hanno presentata la spiegazione anche di quel fenomeno geologico, a verificare il quale sulle coste Salernitane io intrapresi questo per me rovinoso viaggio ; e nella persuasione, che la mia spiegazione sia sufficiente a rovesciare la difficoltà, che quel fenomeno presenta alla generale ma breve inondazione da me sostenuta, io non mi dolgo sulle rovine di mia salute . In ogni modo voi da ciò riconoscerete come il piccolo ci conduce al grande, e nel grande sia la cagione sufficiente, ossia la potenza efficiente del piccolo, e questo stesso divenga grande per quei rapporti, ai quali l' intelligenza spesse volte non giugne se non dopo moltiplici sviamenti, e replicate considerazioni .

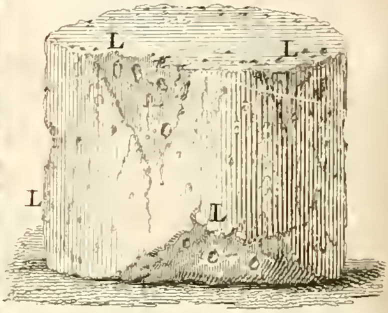

A
B
C
T
T
T
H
K
K
K
K
K
L
I
I
E
D

Veduta del Tempio detto di Serapide discoperto a Pozzuoli nell'an. 1750.

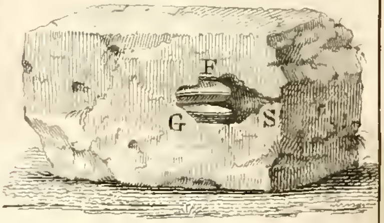
N.° 5.



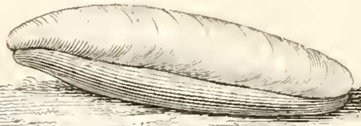
N.° 4.



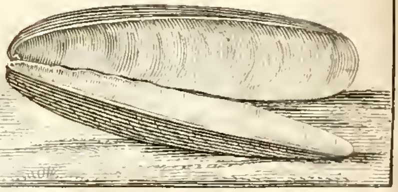
N.° 3.



N.° 1.



N.° 2.



DICHIARAZIONE

DELLA TAVOLA:

A, B, C	Colonne di Cipollino corrose dai Mitili Forapietre tra i punti I, T.
D, E, H	Terre residue allo sgombramento del Tempio.
K K	Celle annesse al Tempio, nelle quali veggonsi incrustazioni Stallattitiche.
N. 1.	Mitilo Forapietre estratto dalla Colonna A nell' anno 1792.
N. 2.	Nicchio di un Mitilo Forapietre naturale per metà aperto.
N. 3.	Pietra calcarea tolta dal fondo delle rive del Genovesato, da cui si è detratto un pezzo per rendere visibile una porzione F G di un Mitilo, ed il piccol foro S, per cui il verme vivente comunica coll' acque marine.
N. 4.	Pezzo della Colonna A ingrandito per riconoscervi le corrosioni, ed i fori L L dei Mitili.
N. 5.	Tronco sdrajato di una Colonna simile alle tre A, B, C, nel cui piano di troncatura Y X V Z veggonsi i fori P, P dei Mitili.

INDICE

DELLE LETTERE

COMPONENTI IL VIAGGIO GEOLOGICO.

Lettera Prima. Dell' utilità della Geologia. Pag. 118.

Lettera II. Osservazioni geologiche tra Modena e Firenze. 135.

Lettera III. Osservazioni tra Firenze e Nocera. 145.

Lettera IV. Osservazioni tra Nocera e Roma. 156.

Lettera V. Osservazioni tra Roma e Napoli. 166.

Lettera VI. Osservazioni tra Napoli e Salerno. 172.

Lettera VII. Viaggio sulle coste maritime del Principato di Salerno diretto a riconoscere, se in esse si trovavano fuori dell' acqua annicchiati Vermi marini fossili, come da alcuno erasi pubblicato. 184.

Lettera VIII. Viaggio da Roma a Bologna per la Toscana accompagnato da riflessioni sull' estensione de' terreni vulcanici nell' Italia, e dalla spiegazione di diversi fenomeni vulcanici accennati dagli Antichi, o riguardati da qualche moderno come comprovanti una grande antichità del Mondo. Aggiugnesi una Tavola delle elevazioni di diverse montagne, massime degli Apennini, misurate nel presente viaggio. 191.

Lettera IX. Spiegazione dello strano fenomeno, che presentano i vermi marini annicchiati nelle Colonne del Tempio di Serapide situato in Pozzuoli. 204.

SU LA

MISTERIOSA ALEMBERTIANA EQUAZIONE

$(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$

LETTERA SCRITTA LI 9. LUGLIO 1783.

Dal P. Pietro Cossali

Al medesimo Sig. D' Alembert

Ricevuta il dì 30. *Luglio* 1801.

Nell' esaminare le nuove dottrine analitiche del Sig. Abate Nicolai Prof., ed Accadem. di Padova un forte seducente incantesimo mi avvenne di sentire là, dove dell'autorità vostra egli si serve, o preclaro Signore; ed il peso gravissimo di essa, e l' apparente giustezza nel calcolare, ed inferire di lui guadagnato mi avrebbero, se le conseguenze dedotte $1 = -1$, $\pm 1 = \sqrt{-1}$ non mi avessero ritenuto, con presentarmi una troppo aperta ripugnanza. Il perchè io mi son veduto costretto a rimontare dall' esame delle illazioni all' esame del principio, cioè all' investigazione, al conoscimento intimo della natura dell' equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$, cui voi il primo, o Signore, dimostraste nelle Mem. di Berlino per l' anno 1746., ed a varj usi poi conduceste nel tomo 3.° delle Miscell. di Torino pag. 383., e nel tomo 5.° degli eccellenti opuscoli vostri pag. 206. Voi mi perdonate, o prestantissimo Signore, se ardisco di accignermi a fare delle riflessioni su di una cosa vostra analitica, tranquillamente, e con plauso accolta dagli Analisti, quale teorema, misterioso sì, ma nulla meno prezioso. Io son di parere, che egli crescerà tanto più di pregio, quanto verrà in esso meno il mistero. E sì, che io confido di chiaramente dimostrare che alcuno non ne comprende, e che per lo appunto allor quando veste apparenza di mistero, si riduce realmente alla massima semplicità, ed evidenza. Riuscendomi però l' intrapresa, a voi ne sarà originalmente dovuto il riuscimento; poichè tutta l'opera mia altro non sarà, che metter nel suo vero lume la base, su cui voi la equazion vostra fondaste, su di essa insistere, e con essa sempre all' occhio determinare dell' equazione medesima ne' varj casi i convenevoli modi, e significati. Nè si ricerca di più ad intercluder l' adito alle assurdità, che dalla equazion vostra vorrebbesi trarre; anzi a spogliarla d' ogni mistero, o paradosso mal conveniente a cosa matematica, o sia di scienza, che nella più pura evidenza ha la gloria sua. Io dunque vi presento, Chiarissimo Signore, una figlia sgombra, come spero, di qualunque oscurezza, assicurata dall' esser tradotta a patrocinio di deformi chimere, per ogni parte di splendore ammantata. Ella non può non riescir più aggradevole ad un Padre di lume ricco, e tutto amore di lume.

Voi o Signore nel luogo citato de' vostri opuscoli §. 40., esposta la vostra equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ avvertite su di essa così: *il ne s'ensuit pas de-là (ce qui est contraire en apparence aux principes reçus dans l'algébre ordinaire) que* $1 + h\sqrt{-1} = 1 - h\sqrt{-1}$, *à moins que* h *ne soit* $= 0$; *espèce de paradoxe digne d'être observé. Ce n'est pas tout; de ce que* $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$, *il n'en faut pas conclure que* $(1 + h\sqrt{-1})^{mn} = (1 - h\sqrt{-1})^{mn}$, n *étant un nombre quelconque; à moins que ce ne soit un nombre entier, positif, ou négatif*. E §. 42. soggiugnete. *Au fond il n'est guéres plus surprenant que* $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ *ne donne pas* $1 + h\sqrt{-1} = 1 - h\sqrt{-1}$, *qu'il ne l'est que* $(+a)^2 = (-a)^2$ *ne donne pas* $+a = -a$. *Cependant il y a encore ici cette différence remarquable entre les quantités réelles, et les imaginaires, que* $+a$, $-a$ *ne différent que par le signe, au lieu que* $1 + h\sqrt{-1}$

et $1-h\sqrt{-1}$ *différent par la quantité, si on peut dire que des quantités imaginaires différent ainsi.*

Il Prof. Nicolai nella 1.ª delle sue Mem. §. 38. sciogliendo la vostra equazione nella forma $(1+h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}} \times (1+h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}} = (1-h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}} \times (1-h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}}$, ne deduce immediatamente $\frac{(1+h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}}}{(1-h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}}} = \frac{(1-h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}}}{(1+h\sqrt{-1})^{\frac{m}{2}}}$; e quinci, fatto $m=2$, ne tira $\frac{1+h\sqrt{-1}}{1-h\sqrt{-1}} = \frac{1-h\sqrt{-1}}{1+h\sqrt{-1}}$; e, posto $h=-1+q$, ne cava $\frac{1+\sqrt{(1-q)}}{1-\sqrt{(1-q)}} = \frac{1-\sqrt{(1-q)}}{1+\sqrt{(1-q)}}$. Poscia §. 39., 40., 41. indirettamente pretende dimostrare $2\sqrt{(1-q)} = -2\sqrt{(1-q)} \ldots \frac{1}{\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{-1} \ldots \frac{1+\sqrt{(1-q)}}{1-\sqrt{(1-q)}} = \frac{1+\sqrt{(-1+q)}}{1-\sqrt{(-1+q)}}$, che importa $\pm 1 = \sqrt{-1}$: e tutto ciò, perchè queste equazioni non fanno, che portare all'equazione $(1+\sqrt{-1})^2 = (1-\sqrt{-1})^2$. Finalmente §. 44. afferma: *suggerirgli il suo nuovo metodo, che la vostra equazione deve sempre verificarsi in ogni valore di* m, *ma non poterlo per ora dimostrare direttamente*. Intanto però, applicando all' equazion vostra il metodo Newtoniano per la elevazion del binomio alla podestà m, ne cava per necessaria conseguenza $+\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$, $1+\sqrt{-1} = 1-\sqrt{-1}$. Ecco un cumulo di misteri, e di paradossi. Ma il mistero, il paradosso non si confà punto con la semplicissima natura, e coll' evidenza dell' analisi, ed io soglio, siami permesso il dirlo, riguardar tai vocaboli per bei colori della ripugnanza, e per indizj certi di qualche deviazione da' principj, ed imperfezione ne' metodi. La ripugnanza delle sopra riferite equazioni dell' Ab. Nicolai è aperta, è solenne, è la massima, che immaginar si possa. Per altra parte non si sa scoprire nel calcolo, con cui dedotte sono, materiale errore. Dunque il difetto deve stare in dar alla formola $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$ un senso, e farne un' applicazione ad essa non conveniente. Ecco il bisogno in cui creduto mi sono d' investigarne a fondo la natura, salendo alla sua origine, per quindi discendere a svilupparne ogni mistero, sciogliere qualunque paradosso, separare la verità dalla ripugnanza, e rompere lo specioso passaggio da quella a questa. Dividerò a maggior chiarezza le mie considerazioni in due articoli, il primo de' quali verserà sulla base, e sulla original forma dell' equazion $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$; il secondo su questa derivata forma propriamente.

ARTICOLO I.

L' Origine della equazione $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$ sta per le dimostrazioni vostre nelle due seguenti equazioni

$$(1^a)\quad (\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = \cos.mA + \text{sen}.mA\sqrt{-1}$$

$$(2^a)\quad (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = \cos.mA - \text{sen}.mA\sqrt{-1}$$

Fatto in queste $\text{sen}.mA = 0$, e conseguentemente $\cos.mA = \pm 1$, si riducon esse alle due

$$(3^a)\quad (\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = \cos.mA = \pm 1$$

$$(4^a)\quad (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = \cos.mA = \pm 1$$

e quinci, per la evidente equazione $\pm 1 = \pm 1$, ne viene

$$(5^a)\quad (\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$$

Da questa si deduce

$$(\cos.A)^m\left(1+\frac{\text{sen}.A}{\cos.A}\sqrt{-1}\right)^m = (\cos.A)^m\left(1-\frac{\text{sen}.A}{\cos.A}\sqrt{-1}\right)^m,$$

donde, dividendo per $(\cos.A)^m$, e ponendo $\frac{\text{sen}.A}{\cos.A} = \text{tang}.A = h$, si ottiene

$$(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$$

L'equazione (5^a) $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$

quella si è che io chiamo la *original forma* della $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$. La ipotesi sen. $mA = 0$, cos. $mA = \pm 1$, su cui è fondata, la denomino l' *ipotesi fondamentale*. E siccome due combinazioni comprende, appellerò *combinazion* 1.ª quella di sen. $mA = 0$, cos. $mA = 1$; e *combinazion* 2.ª quella di sen. $mA = 0$, cos. $mA = -1$. E dirò poi *equazion causale*, e *rappresentata* la semplicissima equazione $\pm 1 = \pm 1$, che è la causa dell' inferire l' equazione $(\cos. A + \text{sen.}\, A\sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen.}\, A\sqrt{-1})^m$, e cui questa in fondo con aspetto sì composto rappresenta, e nella quale deve in ultimo cadere. Poste tali denominazioni io procedo ai teoremi, che seguono.

Teorema I. La equazione $(\cos. A + \text{sen.}\, A\sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen.}\, A\sqrt{-1})^m$ è vera senza limitazione alcuna dell' esponente m, così che può esser esso qualunque numero, intero, fratto, positivo, negativo; purchè però tale sia l' arco A, che sussista la fondamentale ipotesi sen. $mA = 0$, cos. $mA = \pm 1$: cioè purchè per queste due condizioni venga determinata la grandezza dell' arco A, e quinci il suo seno, ed il suo coseno.

Di fatto l' ipotesi fondamentale sen. $mA = 0$, cos. $mA = \pm 1$ non addomanda, se non che nella 1.ª combinazione di sen. $mA = 0$, cos. $mA = 1$, dinotata per π la circonferenza, ed indicato per N un termine qualunque della serie naturale 0. 1. 2. 3. 4. 5. . . . . . sia $mA = N\pi$; e nella 2.ª combinazione di sen. $mA = 0$, cos. $mA = -1$, sia $mA = (2N + 1).\frac{\pi}{2}$. Ma queste due equazioni $mA = N\pi$, $mA = (2N + 1).\frac{\pi}{2}$ lascian libero il valore di m, e sotto qualunque valore, che ad arbitrio gli si attribuisca, possono adempiersi, e verificarsi; dunque l'equazion $(\cos. A + \text{sen.}\, A\sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen.}\, A\sqrt{-1})^m$ per qualunque valore di m indistintamente può esser vera, purchè però convenientemente giusta la fondamental ipotesi, o sia per l' una, o per l' altra delle due equazioni $mA = N\pi$, $mA = (2N+1)\frac{\pi}{2}$ che chiamerò rispettivamente *formole determinative di A* 1.ª e 2.ª, giusta le due combinazioni 1.ª e 2.ª onde nascono, si determini la grandezza di esso arco A.

Teorema II. Osservata la legge esposta nell' antecedente teorema, il sen. A, ed il cos. A prenderanno sempre nell' equazione $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^m$ valori tali, sebben ne' diversi casi diversi, che la equazione stessa generalmente, in qualunque caso, o supposto di m, rappresenterà la semplicissima equazione $\pm 1 = \pm 1$, ed all' ultimo in questa costantemente ricaderà.

Ciò facilmente si raccoglie dalla serie del calcolo, onde l'equazion $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^m$ ha sua generazione. Poichè, avverata la ipotesi fondamentale sen. $mA = 0$, cos. $mA = \pm 1$, sarà $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = \pm 1$, e parimente $(\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = \pm 1$; conseguentemente l' equazione $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^m$ altro in fondo non sarà che l' equazione $\pm 1 = \pm 1$, alla quale, qualunque aspetto assumer possa, dovrà in ultimo ridursi. Ed il conseguimento o nò di tal riduzione sarà il criterio della convenienza, o nò tra i valori assegnati ad m, ed alle quantità circolari sen. A, cos. A.

Con la scorta di questi due teoremi non si può errare, nè più temere d' incontrare oscurità, ed immergersi in misteri, o paradossi nella ricerca degli accidenti di qualsivoglia caso dell' equazione $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^m$, o degli effetti di un qualunque operare intorno alla medesima. Sia dunque

Quesito I.° Assegnare gli accidenti dell' equazione $(\cos. A + \text{sen}. A\sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen}. A\sqrt{-1})^m$, supposto m numero intero positivo?

Si prenda l' ipotesi fondamentale sen. $mA = 0$, cos. $mA = \pm 1$, e primieramente si metta in uso la combinazion 1.ª, sen. $mA = 0$, cos. $mA = 1$, la qual somministra la formola determinativa $mA = N\pi$. Quindi ne viene

$$A = \frac{N}{m} . \pi \ldots \text{sen.} A = \text{sen.} \frac{N}{m} . \pi \ldots \text{cos.} A = \text{cos.} \frac{N}{m} . \pi$$

In luogo di N si può sostituire un qualunque termine della serie naturale 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. . . . Ma è da riflettere, che prendendo $N = m$ si avrà $A = \pi$, sen. $A = 0$, cos. $A = 1$, cioè non altro seno, e non altro coseno, che quando si prese da principio $N = 0$, e si ebbe $A = 0$; e che proseguendo ordinatamente a prendere $N = m + 1$, $N = m + 2$, $N = m + 3$ . . . . . risulterebbe $A = \pi + \frac{\pi}{m}$, $A = \pi + \frac{2\pi}{m}$, $A = \pi + \frac{3\pi}{m}$ . . . . i quali archi hanno i seni, e coseni medesimi, che gli archi $\frac{\pi}{m}$, $\frac{2\pi}{m}$, $\frac{3\pi}{m}$ . . . . ottenuti già col prendere $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$ . . . . . Tanti dunque, nè più, nè meno saranno gli archi A diversi da collocare nell' equazione $(\text{cos.} A + \text{sen.} A \sqrt{-1})^m = (\text{cos.} A - \text{sen.} A \sqrt{-1})^m$, quanti nella serie 0. 1. 2. 3. 4. . . . . i termini sino al numero $m - 1$, che sono in numero m. Ed altrettanti perciò saranno gli aspetti diversi, che l' equazione vestirà. Trasferendo questi riflessi sulla combinazion 2.ª si vedrà facilmente, che per essa del pari conseguiremo nell' equazione stessa un numero m di aspetti diversi a cagione di un numero m di archi differenti determinati per la determinativa formola $mA = (2N + 1) . \frac{\pi}{2}$. Dunque

Teorema III. Nel caso di m numero intero positivo l' equazione $(\text{cos.} A + \text{sen.} A \sqrt{-1})^m = (\text{cos.} A - \text{sen.} A \sqrt{-1})^m$ veste un numero $2m$ di aspetti diversi, i quali però tutti vanno a finire in $\pm 1 = \pm 1$: cioè in $1 = 1$ gli aspetti numero m provenienti dalla combinazion 1.ª, ed in $-1 = -1$ quelli parimenti in numero m, provenienti dalla combinazion 2.ª.

Ecco a maggior comodità la risoluzion del quesito in tavola.

Combinazion 1.ª

$$\text{sen}.mA = 0 \quad \ldots \quad \cos.mA = 1$$

Formola determinativa di A

$$mA = N.\pi \;\ldots\ldots\; \text{e quindi} \quad A = \frac{N}{m}.\pi$$

Valori diversi di A, od archi diversi

$$0,\ \frac{\pi}{m},\ \frac{2\pi}{m},\ \frac{3\pi}{m},\ \frac{4\pi}{m},\ \frac{5\pi}{m}\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{(m-1)\pi}{m}$$

Combinazion 2.ª

$$\text{sen}.mA = 0 \;\ldots\ldots\; \cos.mA = -1$$

Formola determinativa di A

$$mA = (2N+1).\frac{\pi}{2} \quad \ldots\ldots\; \text{e quinci} \quad A = \frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2}$$

Valori diverrsi di A, od archi diversi

$$\frac{1}{m}.\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{m}.\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{m}.\frac{\pi}{2},\ \frac{7}{m}.\frac{\pi}{2},\ \frac{9}{m}.\frac{\pi}{2}\ \ldots\ldots\ \frac{2(m-1)+1}{m}.\frac{\pi}{2}$$

Esempio 1.° Sia $m = 2$ si avrà

Per la combinazion 1.ª $A = 0$, $A = \frac{\pi}{2}$; $\text{sen}.0 = 0$, $\cos.0 = 1$; $\text{sen}.\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos.\frac{\pi}{2} = -$: onde i due aspetti, che veste l'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$, sono $(1 + 0\sqrt{-1})^2 = (1 - 0\sqrt{-1})^2 \ldots (-1 + 0\sqrt{-1})^2 = (-1 - 0\sqrt{-1})^2$, che si riducono ad $(1)^2 = (1)^2 \ldots\ldots (-1)^2 = (-1)^2$, ed ambedue cadono in $1 = 1$.

Per la combinazion 2.ª $A = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$, $A = \frac{3}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$; $\text{sen}.\frac{\pi}{4} = 1$, $\cos.\frac{\pi}{4} = 0$; $\text{sen}.\frac{3\pi}{4} = -1$, $\cos.\frac{3\pi}{4} = 0$: e quindi i due aspetti nella equazione indotti $(0 + 1\sqrt{-1})^2 = (0 - 1\sqrt{-1})^2 \ldots (0 - 1\sqrt{-1})^2 = (0 + 1\sqrt{-1})^2$, che si riducono a $(1\sqrt{-1})^2 = (-1\sqrt{-1})^2 \ldots (-1\sqrt{-1})^2 = (1\sqrt{-1})^2$, ambedue le quali equazioni, fatti i quadrati giusta le vere leggi degli immaginarj, cadono in $-1 = -1$.

Esempio 2.° Supponiamo $m = 1$.
Per la combinazion 1.ª sarà $A = 0$, sen.$A = 0$, cos.$A = 1$, e perciò l' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ prenderà l'aspetto $(1 + 0\sqrt{-1})^1 = (1 - 0\sqrt{-1})^1$, che subito cade in $1 = 1$.

Per la combinazion 2.ª risulta $A = \frac{\pi}{2}$, sen.$A = 0$, cos.$A = -1$, così che l' equazione assume l' aspetto $(-1 + 0\sqrt{-1})^1 = (-1 - 0\sqrt{-1})^1$, che immediatamente finir vedesi in $-1 = -1$.

Teorema IV. Si rende dall' analisi di questi due esempj manifesto, ed irrefragabilmente provato, che le due equazioni $(1 + \sqrt{-1})^2 = (1 - \sqrt{-1})^2$, $1 + \sqrt{-1} = 1 - \sqrt{-1}$ non sono per verun modo comprese nell' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$, e che le sono affatto estranee, e sommamente ripugnanti, quanto ripugna, che l' arco stesso abbia il suo seno, ed il suo coseno ambedue $= 1$.

Esempio 3.° A maggior lume del modo, onde ad onta della diversità degli aspetti, l' equazione ricade sempre nella semplicissima equazione $\pm 1 = \pm 1$, aggiungo il terzo esempio, facendo $m = 3$.

Per la combinazion 1.ª si trova

$$A = 0, \quad A = \frac{\pi}{3} = 120°, \quad A = \frac{2\pi}{3} = 240°$$

$$\text{sen}.0 = 0, \quad \text{sen}.120° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{sen}.240° = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos.0 = 1, \quad \cos.120° = \frac{-1}{2}, \quad \cos.240° = \frac{-1}{2}$$

E quindi i tre diversi aspetti dell' equazione

$$(1 + 0\sqrt{-1})^3 = (1 - 0\sqrt{-1})^3 \ldots \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 \ldots \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3$$

Per la combinazion 2.ª

$A =$

$$A = \frac{\pi}{6} = 60^\circ \;..\; A = \frac{3\pi}{6} = 180^\circ \;...\; A = \frac{5\pi}{6} = 300^\circ$$

$$\text{sen.}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \;..\; \text{sen.}180^\circ = 0 \;...\; \text{sen.}300^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos.60^\circ = \frac{1}{2} \;..\; \cos.180 = -1 \;...\; \cos.300^\circ = \frac{1}{2}$$

e conseguentemente i tre diversi aspetti dell' equazione

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 \ldots (-1 + 0\sqrt{-1})^3 =$$

$$(-1 - 0\sqrt{-1})^3 \ldots \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3.$$

Il primo de' tre nati dalla combinazion 1ª cade patentemente in $1 = 1$, ed il secondo dei tre nati dalla combinazion 2.ª patentemente in $-1 = -1$; ma fatti i cubi si ritroverà, che in $1 = 1$ cadono similmente gli altri due della combinazion 1.ª, ed in $-1 = -1$ gli altri due eziandio della 2.ª; ed il calcolo insegnerà, come si elidano tutte le diversità, sì che in fine uno stesso sia il risultato dei tre primi, ed un solo del pari il risultato de' tre secondi.

Teorema V. Li valori diversi dei binomj $\cos.A + \text{sen.}A\sqrt{-1}$, $\cos.A - \text{sen.}A\sqrt{-1}$ nell'equazione $(\cos.A + \text{sen.}A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen.}A\sqrt{-1})^m$, sono le radici diverse dell' equazione $x^m - 1 = 0$, ossia le diverse radici m^{esime} dell' unità positiva, quelli tratti dalla combinazione 1.ª; e sono le diverse radici dell' equazione $x^m + 1 = 0$, ossia le radici diverse m^{esime} dell' unità negativa, quelli tratti dalla 2.ª combinazione. Gli esempj mettono sott' occhio la verità del teorema. Ma ne è in pronto la ragione, o dimostrazion generale. Dovendo i diversi valori dei due binomj $\cos.A + \text{sen.}A\sqrt{-1}$, $\cos.A - \text{sen.}A\sqrt{-1}$, alla potenza m elevati, produrre tutti $+1$, se di quelli si parli, che per la 1.ª combinazion si determinano; e tutti produrre -1 gli altri determinati per la 2.ª combinazione: dunque i primi esser non possono, che le diverse radici m^{esime} di $+1$, o sia le diververse radici dell' equazione $x^m - 1 = 0$; nè altro i secondi, che le diverse radici m^{esime} di -1, o sia le radici dell' equazione $x^m + 1 = 0$.

Quesito II. Esporre l' avvenimento dell' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ qualora *m* sia un numero intero negativo?

Sostituendo $-m$ ad m, avremo

$$\frac{1}{(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m} = \frac{1}{(\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m},$$

e quinci $(\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$; donde chiaramente apparisce, che questo caso cade in quello di m positivo; poichè la permutazione da destra a sinistra, e reciprocamente, dei due membri non induce cangiamento veruno intrinseco all' equazione.

Quesito III. Esaminare il caso in cui m sia fratto $= \frac{1}{t}$? Ponendo $\frac{1}{t}$ in luogo di m nella formola determinativa dalla 1.ª combinazione tratta, $mA = N\pi$, si ha $\frac{1}{t}A = N\pi$, e quinci $A = tN.\pi$, donde, fatto $N = 0$, risulta l' arco $A = 0$; e, preso per N un qualunque numero intero, risulta A un multiplo della circonferenza π. Per la qual cosa avendo tanto l' arco zero, quanto un multiplo qualunque della circonferenza il seno $= 0$, ed il coseno $= 1$, dalla 1.ª combinazione non ne seguirà nell'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}} = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}}$, che l' unica forma $(1 + 0\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}} = (1 - 0\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}}$, che da se ristrignesi ad $(1)^{\frac{1}{t}} = (1)^{\frac{1}{t}}$. Questa equazione è moltiplice, e comprende tante equazioni, quante sono le diverse radici t^{esime} dell' unità. Ma siccome pel teorema II. l' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ deve, in forza di sua origine, generalmente, ed in qualunque supposto di m, rappresentare l'equazione $1 = 1$, ed in questa cadere; così tra le numero t equazioni diverse comprese nella $(1)^{\frac{1}{t}} = (1)^{\frac{1}{t}}$, non vi ha propriamente che la più semplice $1 = 1$ formata per la radice razionale, reale, positiva dell' unità, di cui sempre, sia t dispari, sia pari, si debbe tener quì conto, sebben nel caso di t pari vi sia anche l'altra razionale, e reale $-1 = -1$. Del resto, quanto alla virtù comprensiva dell' equazione $(1)^{\frac{1}{t}} = (1)^{\frac{1}{t}}$ è chiaro non estendersi essa, che al numero t di equazioni, che formar si possono, prendendo in ambedue i membri una stessa delle numero t radici t^{esime} dell' unità. Ed anderebbe ben errato chi per confermar le accuse del Nicolai contro gli usati principj di Algebra, e per torta opinione di rilevarne la sublimità con circondarla di misteri, presa nel primo membro una radice t^{esima} dell' unità, la uguagliasse ad altra diversa presa nel secondo: il paradosso, lungi dall' essere effetto dell' equazione, non sarebbe che colpa d' irragionevolissimo arbitrio, e solenne capriccio.

Passando ad applicare all'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}} = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}}$ la formola determinativa di A propria della combinazion 2.ª, $mA = \frac{1}{t}A = (2N + 1).\frac{\pi}{2}$: venendone $A = t(2N + 1).\frac{\pi}{2}$, bisogna distinguere tre casi: di t dispari, di t pari dispari, di t pari pari.

Nel 1.° caso, essendo il prodotto $t(2N + 1)$ dei due numeri dispari, t e $2N + 1$, necessariamente numero dispari, se si rappresenti per $2x + 1$, ne segue $A = \frac{2x + 1}{2}.\pi =$

$x\pi + \frac{1}{2}\pi$, che non ci dà per sen.A, se non che sen.$\frac{1}{2}\pi = 0$, e per cos.A non altro che cos.$\frac{1}{2}\pi = -1$; il perchè l'equazione diviene $(-1+0\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}} = (-1-0\sqrt{-1})^{\frac{1}{t}}$, vale dire $(-1)^{\frac{1}{t}} = (-1)^{\frac{1}{t}}$, la quale, per esser t dispari, con prender la prima, o più semplice delle t$^{\text{esime}}$ radici di -1, trovasi coincider, come deve, con $-1 = -1$.

Nel 2.° caso, rappresentando t per $2u$, con intender che u sia un numero dispari, la formola determinativa porge $A = 2u(2N+1)\frac{\pi}{2} = u(2N+1)\pi$, dove essendo $u(2N+1)$ un multiplo della circonferenza intera π, scorgesi evidentemente non risultarne, che sen.$A = 0$, cos.$A = 1$, e quinci $(1+0\sqrt{-1})^{\frac{1}{2u}} = (1-0\sqrt{-1})^{\frac{1}{2u}}$, o sia $(1)^{\frac{1}{2u}} = (1)^{\frac{1}{2u}}$, la quale comprende due equazioni razionali, e reali, cioè del pari $1 = 1$, che $-1 = -1$; ma però a questa sola si deve quì aver riguardo, come alla sola appartenente alla combinazion 2.ª.

Nel 3.° caso, significando per $4v$ un numero qualunque pari pari, avremo $A = 4v(2N+1)\frac{\pi}{2} = 2v(2N+1)\pi$, tornando, come si vede, un multiplo dell' intera circonferenza π, con la sola, nulla importante, diversità, d' esser quì un multiplo pari, in luogo, che di sopra era un multiplo dispari. Non avremo dunque di nuovo, che sen.$A = 0$, cos.$A = 1$, e conseguentemente $(1+0\sqrt{-1})^{\frac{1}{4v}} = (1-0\sqrt{-1})^{\frac{1}{4v}}$, equazione in simil modo, che la superiore del caso 2.° comprendente tanto $1 = 1$, quanto $-1 = -1$, ma in ragione della proprietà della combinazion 2.ª non rappresentante, che $-1 = -1$.

Abbiamo dunque, nel supposto di m fratto $= \frac{1}{t}$, sempre, sia t pari, o dispari, un' equazione molteplice, che è $(1)^{\frac{1}{t}} = (1)^{\frac{1}{t}}$ per la combinazion 1.ª, ed $(-1)^{\frac{1}{t}} = (-1)^{\frac{1}{t}}$, ovvero $(1)^{\frac{1}{t}} = (1)^{\frac{1}{t}}$ per la combinazione 2.ª, giusta che t è dispari, o pari; ma la cui molteplice virtù siamo obbligati a non valutare, restringendoci a non considerar, che una delle molte equazioni comprese, cioè la $1 = 1$ nella 1.ª combinazione, e la $-1 = -1$ nella combinazion 2.ª in ambedue i casi di t dispari, o di t pari. Nè recar dee maraviglia, che una equazione, di virtù in se molteplice, venga per una particolare ipotesi, qual' è nel proposito nostro la fondamentale ipotesi sen.$\frac{1}{t} A = 0$, determinata a rappresentare non più, che una equazione.

Teorema II. Nel supposto di m fratto, ed $= \frac{1}{t}$, i binomj cos.$A +$ sen.$A\sqrt{-1}$, cos.$A -$ sen.$A\sqrt{-1}$ dell' equazione $(\text{cos.}A + \text{sen.}A\sqrt{-1})^m = (\text{cos.}A - \text{sen.}A\sqrt{-1})^m$ non ricevono per ciascheduna delle due combinazioni, che un valor solo, ed esso reale, e razionale; laddove, essendo m numero intero maggiore dell' unità, ne ricevono molti, due al più de' quali reali, ± 1, e gli altri immaginarj. Perciò vi ha una differenza tra il caso di m intero, e maggiore dell' unità, ed il caso di m fratto $= \frac{1}{t}$. Siccome però il numero de' valori immaginarj diminuisce a misura, che l' intero numero m divien minore, e cessano affatto essi valori immaginarj, facendosi $m = 1$, non rimanendo ai due binomj, che i due valori reali, $+1$, -1, l' uno nell' una, l' altro nell' altra combinazione; così vi ha in ciò una gradazione, e la differenza non induce punto di paradosso: il che si renderà più chiaro pel teorema, che vo a soggiugnere.

Teorema VII. Si è veduto nel teorema V, che i valori diversi dei binomj $\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1}$, $\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1}$, dell'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$, nel supposto di m intero, sono nella 1.ª combinazione le diverse radici dell'equazione $x^m - 1 = 0$; e le radici diverse dell'equazione $x^m + 1 = 0$ nella 2.ª combinazione: facciamo in queste due equazioni $m = \frac{1}{t}$, ed avremo, $x^{\frac{1}{t}} - 1 = 0$, $x^{\frac{1}{t}} + 1 = 0$, donde $x = (1)^t$, $x = (-1)^t$. Or da ciascuna di queste due equazioni non si ha, per qualunque caso di t, che un valore; e distintamente, dalla prima per ogni caso di t dispari, o pari, non vien prodotto che $x = 1$, qual appunto si è trovato essere per ogni caso di t dispari, o pari nella frazione $\frac{1}{t}$ il valore dei binomj $\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1}$, $\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1}$ nella combinazion 1.ª; e dalla equazion seconda $x = (-1)^t$ nasce $x = -1$ nel caso di t dispari, ed $x = 1$ nel caso di t pari, secondo per lo appunto, che nei due casi risulta il valor dei due binomj per la combinazion 2.ª Dunque la pluralità dei valori dei due binomj nel supposto di m intero, maggior dell'unità, e la unicità nel supposto di $m = 1$, od $= \frac{1}{t}$, tanto è lungi, che si contrastino tra loro, ed involgano alcuna difficoltà, o paradosso veruno, che si richiaman anzi ad un comune principio, cioè alle due equazioni $x^m - 1 = 0$, $x^m + 1 = 0$, e la differenza si dimostra nascer tutta dalla differenza gradualmente da m intero maggior dell'unità ad $m = 1$, e quinci ad $m = \frac{1}{t}$.

Quesito IV. Svolgere in serie l'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$, ed assegnare il valore della parte reale di ciaschedun membro, ed il valore della parte immaginaria, o a meglio dire della somma delle quantità moltiplicate per $\sqrt{-1}$?

Segnando in grazia di brevità per $a, b, c, d, e, f \ldots$ ordinatamente i coefficienti $\frac{m}{1}$, $\frac{m(m-1)}{1.2}$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ . . . . . si ha $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m =$ $\cos.^m A + a\cos.^{m-1} A\,\text{sen}.A\sqrt{-1} - b\cos.^{m-2} A\,\text{sen}.^2 A - c\cos.^{m-3} A\,\text{sen}.^3 A\sqrt{-1} + d\cos.^{m-4} A\,\text{sen}.^4 A + e\cos.^{m-5} A\,\text{sen}.^5 A\sqrt{-1} - \ldots$ dove già si manifesta all' occhio la legge progressiva di due termini alternativamente positivi, e negativi. E separando la parte reale dalla parte immaginaria ne viene $\cos.^m A - b\cos^{m-2} A\,\text{sen}.^2 A + d\cos.^{m-4} A\,\text{sen}.^4 A - f\cos^{m-6} A\,\text{sen}.^6 A + h\cos^{m-8} A\,\text{sen}.^8 A - k\cos.^{m-10} A\,\text{sen}.^{10} A + \ldots\ldots + (a\cos.^{m-1} A\,\text{sen}.A - c\cos.^{m-3} A\,\text{sen}.^3 A + e\cos.^{m-5} A\,\text{sen}^5 A - g\cos^{m-7} A\,\text{sen}.^7 A + i\cos.^{m-9} A\,\text{sen}.^9 A - l\cos.^{m-11} A\,\text{sen}.^{11} A + \ldots)\sqrt{-1}$ con alternazione di segni di termine in termine, tanto nella reale parte, quanto nell' immaginaria.

Se la parte reale si rappresenti tutta per P, e la immaginaria tutta per $Q\sqrt{-1}$, si avrà $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = P + Q\sqrt{-1}$ . . . . e quinci $(\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = P - Q\sqrt{-1}$. A determinare il valore della parte reale P, e quello della somma Q delle quantità moltiplicate per $\sqrt{-1}$, basta richiamar a memoria, che, per l' ipotesi fondamentale, alla verità dell' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ dev' esser $A = \frac{N}{m}\pi$ pella 1.ª combinazione, od $= \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}$ pella 2.ª. E che determinato l' arco A per la prima formola, l' equazione deve sempre in fondo rappresentare la semplice equazione $1 = 1$, e conseguentemente ciascun de' membri essere in sostanza non altro che 1; determinato poi l' arco A per la formola seconda, l' equazione stessa deve sempre in ultimo presentare $-1 = -1$, e per conseguenza ciascun dei due membri valere -1. Quindi siamo condotti a stabilire.

Teorema VIII. Distinguendo per P la parte reale della

potenza $(\cos.\, A \pm \text{sen}.\, A \sqrt{-1})^m$, preso $A = \frac{N}{m}\pi$, e per P^1 essa parte, preso $A = \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}$; e dinotando per $\pm Q$ la parte moltiplicata col radicale immaginario nel primo caso, e per $\pm Q^1$ essa parte nel caso secondo: è sempre
$P = 1 \ldots P^1 = -1 \ldots \pm Q = 0 \ldots \pm Q^1 = 0$
E spiegatamente

$$P = \cos.^m \frac{N}{m}\pi - \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} \cos.^{m-2} \frac{N}{m}\pi \;\text{sen}.^2 \frac{N}{m}\pi +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \cos.^{m-4} \frac{N}{m}\pi \;\text{sen}.^4 \frac{N}{m}\pi -$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} \cos.^{m-6} \frac{N}{m}\pi \;\text{sen}.^6 \frac{N}{m}\pi$$

$$+ \ldots\ldots = 1$$

$$P^1 = \cos.^m \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} \cos.^{m-2} \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} \,.\, \text{sen}.^2 \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \cos.^{m-4} \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} \,.\, \text{sen}.^4 \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} -$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} \cos.^{m-6} \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} \,.\, \text{sen}.^6 \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots = 1$$

$$\pm Q = \pm \Big(m \cos.^{m-1} \frac{N}{m}\pi \;\text{sen}. \frac{N}{m}\pi - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \cos.^{m-3} \frac{N}{m}\pi \;\text{sen}.^3 \frac{N}{m}\pi$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \cos.^{m-5} \frac{N}{m}\pi \;\text{sen}.^5 \frac{N}{m}\pi -$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7} \cos.^{m-7} \frac{N}{m}\pi \;\text{sen}.^7 \frac{N}{m}\pi$$

$$+ \ldots\ldots \Big) = 0$$

$$\pm Q^1 = \pm \Big(m \cos.^{m-1} \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} \,.\, \text{sen}. \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} -$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \cos.^{m-3} \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} \,.\, \text{sen}.^3 \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\cos.^{m-5}\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2}.\ \mathrm{sen.}^{5}\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2}-$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}\cos.^{m-7}\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2}.\mathrm{sen.}^{7}\frac{2N+1}{m}.$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots) = 0.$$

Esempio. Sia $m = 3$; si ha

$$P = \cos.^3\frac{N}{m}\pi - 3\cos.\frac{N}{3}\pi\ \mathrm{sen.}^2\frac{N}{3}\pi$$

e dando ad N successivamente i valori 0, 1, 2

$$P = \cos.^3\frac{0}{3}\pi - 3\cos.\frac{0}{3}\pi\ \mathrm{sen.}^2\frac{0}{3}\pi = 1^3 = 1$$

$$P = \cos.^3\frac{1}{3}\pi - 3\cos.\frac{1}{3}\pi\ \mathrm{sen.}^2\frac{1}{3}\pi = \left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 3.\frac{-1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{-1}{8} + \frac{9}{8} = 1$$

$$P = \cos.\frac{2}{3}\pi - 3\cos.\frac{2}{3}\pi\ \mathrm{sen.}^2\frac{2}{3}\pi = \left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 3.\frac{-1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{-1}{8} + \frac{9}{8} = 1$$

$$P^{1} = \cos.^3\frac{2N+1}{3}.\frac{\pi}{2} - 3\cos.\frac{2N+1}{3}.\frac{\pi}{2}.\mathrm{sen.}^2\frac{2N+1}{3}.\frac{\pi}{2}$$

e dando ad N successivamente i valori 0, 1, 2

$$P^{1} = \cos.^3\frac{1}{3}.\frac{\pi}{2} - 3\cos.\frac{1}{3}.\frac{\pi}{2}\mathrm{sen.}^2\frac{1}{3}.\frac{\pi}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3.\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{9}{8} = -1$$

$$P^{1} = \cos.^3\frac{3}{3}.\frac{\pi}{2} - 3\cos.\frac{3}{3}.\frac{\pi}{2}\ \mathrm{sen.}^2\frac{3}{3}.\frac{\pi}{2} = (-1)^3 = -1$$

$$P^{1} = \cos.^3\frac{5}{3}.\frac{\pi}{2} - 3\cos.\frac{5}{3}.\frac{\pi}{2}\ \mathrm{sen.}^2\frac{5}{3}.\frac{\pi}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3.\frac{1}{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{9}{8} = -1$$

$$Q = 3 \cos.^2 \frac{N}{3}\pi \ \text{sen.} \frac{N}{3}\pi - \text{sen.}^3 \frac{N}{3}\pi$$

e dando ad N successivamente i valori 0, 1, 2

$$Q = 3 \cos.^2 \frac{0}{3}\pi \ \text{sen.} \frac{0}{3}\pi - \text{sen.}^3 \frac{0}{3}\pi = 0$$

$$Q = 3 \cos.^2 \frac{1}{3}\pi \,\text{sen.} \frac{1}{3}\pi - \text{sen.}^3 \frac{1}{3}\pi = 3\left(\frac{-1}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0$$

$$Q = 3 \cos.^2 \frac{2}{3}\pi \,\text{sen.} \frac{2}{3}\pi - \text{sen.}^3 \frac{2}{3}\pi = 3\left(\frac{-1}{2}\right)^2 . \frac{-\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0$$

$$Q^1 = 3 \cos.^2 \frac{2N+1}{3} . \frac{\pi}{2} . \text{sen.} \frac{2N+1}{3} . \frac{\pi}{2} - \text{sen.}^3 \frac{2N+1}{3} . \frac{\pi}{2}$$

e dando ad N successivamente i valori 0, 1, 2

$$Q^1 = 3 \cos.^2 \frac{1}{3} . \frac{\pi}{2} \ \text{sen.} \frac{1}{3} . \frac{\pi}{2} - \text{sen}^3 \frac{1}{3} . \frac{\pi}{2} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 . \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$- \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0$$

$$Q^1 = 3 \cos.^2 \frac{3}{3} . \frac{\pi}{2} \ \text{sen.} \frac{3}{3} . \frac{\pi}{2} - \text{sen.}^3 \frac{3}{3} . \frac{\pi}{2} = 0$$

$$Q^1 = 3 \cos.^2 \frac{5}{3} . \frac{\pi}{2} \ \text{sen.} \frac{5}{3} . \frac{\pi}{2} - \text{sen.}^3 \frac{5}{3} . \frac{\pi}{2} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 . \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$- \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{-3\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0$$

Ecco visibilmente comprovata la verità del teorema.

Quesito 5.° Indagare se, ed a quali condizioni sia lecito dall'equazione $(\cos.A + \text{sen.}A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen.}A\sqrt{-1})^m$ inferire quest'altra equazione $(\cos.A + \text{sen.}A\sqrt{-1})^{m^n} = (\cos.A - \text{sen.}A\sqrt{-1})^{m^n}$?

L'equazione $(\cos.A + \text{sen.}A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen.}A\sqrt{-1})^m$ fu dedotta dalle due

$$(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = \cos.mA + \text{sen}.mA\sqrt{-1}$$
$$(\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = \cos.mA - \text{sen}.mA\sqrt{-1}$$

per mezzo dell' ipotesi da me chiamata fondamentale, $\text{sen}.mA = 0$

Si sostituisca nelle due equazioni m'' in luogo di m, per lo che diverranno

$$(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m''} = \cos.m''A + \text{sen}.m''A\sqrt{-1}$$
$$(\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m''} = \cos.m''A - \text{sen}.m''A\sqrt{-1}$$

Ponendo $\text{sen}.m''A = 0$, ipotesi che chiamerò *fondamentale ipotesi* 2.ª si avrà

$$(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m''} = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m''}$$

Acciocchè dall'essere vera l'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ si possa inferire quest' altra $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m''} = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m''}$, bisognerà, che si verifichino insieme, il che non può essere, se non si verificano insieme le due ipotesi fondamentali. Per verificarsi $\text{sen}.mA = 0$ fa d'uopo, che sia $mA = N\pi$ secondo la 1.ª combinazione, ovvero $= (2N+1)\frac{\pi}{2}$ giusta la combinazion 2.ª; ed affinchè si verifichi insieme la condizione $\text{sen}.m''A = 0$ dell' ipotesi fondamentale 2.ª, sarà mestieri, che distinte similmente in essa la combinazion 1.ª di $\text{sen}.m''A = 0$, $\cos.m''A = 1$, e la combinazione 2.ª di $\text{sen}.m''A = 0$, $\cos.m''A = -1$, e dinotato per H un altro numero della serie 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6 .... sia ad un tempo $m''A = H\pi$ giusta la 1.ª combinazione, ovvero $m''A = (2H+1)\frac{\pi}{2}$ giusta la combinazion 2.ª, intendendo per A nelle due ipotesi un medesimo arco. Componiamo le due ipotesi successivamente giusta la 1.ª e giusta la 2.ª combinazion di ciascheduna.

Composizion 1.ª Supponiamo dunque in primo luogo $mA = N\pi$, $m''A = H\pi$; ne verrà quinci $A = \frac{N}{m}\pi =$

$\frac{H}{m^n}\pi$, onde $\frac{Nm^n}{m}$, ossia $Nm^{n-1} = H$. Da questa formola che chiamerò la *formola definitiva della* 1.ª *composizione* apparisce

1.° Che la composizione delle due ipotesi è sempre possibile, se, essendo m numero intero positivo, sia pur n numero intero positivo; poichè sempre in tali supposti Nm^{n-1} darà numero intero positivo, qual si vuol H.

2.° Se stando m numero intero positivo, n sia intero ma negativo, cioè se in luogo di n abbiasi $-n$, in tal caso il congiungimento delle due ipotesi fondamentali sarà pur possibile, ma N sarà soggetto a particolar condizione. Poichè $\frac{N}{m^{n+1}}$ non può produr numero intero, che mediante la legge di prender $N =$ ad un numero composto, il quale abbia a suo fattore la potenza m^{n+1}, che sia in somma della forma Hm^{n+1}. Di quì risulterà $A = \frac{N}{m}\pi = Hm^n\pi$, e per conseguenza sen. $A = 0$, cos. $A = 1$; per la qual cosa l'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ si ridurrà ad $(1)^m = (1)^m$, e l'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^{-n}} = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^{-n}}$ ad $(1)^{m^{-n}} = (1)^{m^{-n}}$, o sia ad $(1)^{\frac{1}{m^n}} = (1)^{\frac{1}{m^n}}$; onde l'argomentare dalle prime alle seconde sarà nulla più, che argomentare da $(1)^m = (1)^m$ ad $(1)^{\frac{1}{m^n}} = (1)^{\frac{1}{m^n}}$: argomentar assolutamente vero nell'estensione di ciascheduna delle numero m^n radici dell'unità, ma in forza delle ipotesi fondamentali ristretto alla radice reale, razionale e positiva $1 = 1$. Poichè siccome per ragione dell'ipotesi fondamentale 1.ª l'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ deve rappresentare, ed in ultimo dar sempre $\pm 1 = \pm 1$, e distintamente $1 = 1$ usando della 1.ª sua combinazione; così, e non altrimenti per l'ipotesi fondamentale 2.ª l' equazione $(\cos. A + \text{sen}. A \sqrt{-1})^{m^n} = (\cos. A - \text{sen}. A \sqrt{-1})^{m^n}$.

3.° Cerchiamo se sia possibile il connettere le due fondamentali ipotesi, posto m numero intero, ed n fratto $= \frac{1}{r}$, che è quanto dire, se essendo N, m, H numeri interi, possa mai essere $N m^{\frac{1}{r} - 1} = H$. Or, un po' di attenzion, che vi si applichi, si scorge, che, essendo $N m^{\frac{1}{r} - 1} = \frac{N}{m^{\frac{r-1}{r}}}$, ciò non può essere, a meno, che m sia un numero tale, che considerar si possa qual potenza di grado r, e rappresentare in conseguenza per a^r. Supposto ciò avremo $\frac{N}{a^{r-1}} = H$, e non resterà, che prender $N =$ ad un numero composto della forma $H a^{r-1}$; e si avrà così, $A = \frac{N}{m} \pi = \frac{H a^{r-1}}{a^r} \pi = \frac{H}{a} \pi$, e giustamente si argomenterà dall' equazione $\left(\cos. \frac{H}{a} \pi + \text{sen}. \frac{H}{a} \pi \sqrt{-1}\right)^{a^r} = \left(\cos. \frac{H}{a} \pi - \text{sen}. \frac{H}{a} \pi \sqrt{-1}\right)^{a^r}$ a quest' altra $\left(\cos. \frac{H}{a} \pi + \text{sen}. \frac{H}{a} \pi \sqrt{-1}\right)^a = \left(\cos. \frac{H}{a} \pi - \text{sen}. \frac{H}{a} \pi \sqrt{-1}\right)^a$: il che, riflettasi esser quanto, che dall' equazione $(\cos. A + \text{sen}. A \sqrt{-1})^{m^n} = (\cos. A - \text{sen}. A \sqrt{-1})^{m^n}$ inferire la $(\cos. A + \text{sen}. A \sqrt{-1})^m = (\cos. A - \text{sen}. A \sqrt{-1})^m$, della quale illazione non vi ha niente minor ragione, che della illazione da questa a quella, se bene dell' inferire si consideri la base, che è l' avveramento simultaneo delle due equazioni pel simultaneo avveramento delle due ipotesi fondamentali. E' pertanto manifesto, che

che nel caso di $m = a^r$, $n = \frac{1}{r}$, altro non succede fuori, che la illazione da $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ a $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^n} = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^n}$ convertesi nella sua ugualmente giusta, e necessariamente connessa reciproca.

4.° Abbiamo sino ad ora variato n, ma ritenendo sempre m numero intero. Poniamo al presente m numero fratto $= \frac{1}{t}$; per lo che il congiungimento delle due ipotesi fondamentali importerà $\frac{N}{t^{n-1}} = H$. Questa condizione, se n sia numero intero positivo, non può avverarsi, se non pigliando N della forma composta Ht^{n-1}. All' incontro, se n sia intero negativo, poichè ad n sostituendo $-n$, risulta $Nt^{n+1} = H$, si vede chiaro restare a pieno arbitrio il numero intero N. Che se N sia numero fratto positivo, o negativo $= \pm\frac{1}{r}$, la condizione diverrà $N t^{\frac{r \mp 1}{r}} = H$, all' avveramento della quale sarà mestieri, che il numero t denominatore del fratto valor di m sia una potenza c^r, e ciò posto, la condizione riducendosi ad $Nc^{r \mp 1} = H$, lascierà di nuovo in tal particolarissimo caso ad assoluto piacimento il numero intero N.

5.° Un caso che singolarmente importa di esaminare si è quello di $n = 0$, cioè se essendo m diverso da 1 si possa dall'equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ inferire $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^0} = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^0}$, o che è lo stesso $\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1} = \cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1}$. La formola definitiva della illazione, $Nm^{n-1} = H$, diventa in tal caso $Nm^{-1} = \frac{N}{m} = H$, la qual' esige, che prendasi per N un numero composto Hm. Dal che ne segue $A = \frac{N}{m}\pi$

=

$= \frac{Hm}{m} \pi = H \pi$, sen. $A = 0$, cos. $A = 1$, e le due equazioni simultaneamente vere vengono ad essere, non altro, che $(1)^m = (1)^m$, ed $1 = 1$.

Composizion 2.ª Passiamo in 2.° luogo a comporre le due ipotesi fondamentali giusta la 2.ª combinazion di ciascuna, supponendo $mA = (2N + 1)\frac{\pi}{2}$, ed $m^n A = (2H+1)\frac{\pi}{2}$. Abbiamo di quì, a condizion generale della illazione dall' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ alla $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^n} = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^n}$, o sia del simultaneo avveramento loro, la formola $(2N+1)m^{n-1} = 2H + 1$, che chiamerò *formola definitiva* della composizion 2.ª. Or comprendesi tosto

Teorema IX. Le due equazioni $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$, $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^n} = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^n}$ non possono simultaneamente avverarsi per composizione delle due ipotesi giusta la lor combinazion 2.ª, se non essendo m numero intero dispari, o avendo, se fratto ed $= \frac{1}{t}$, il denominatore t numero dispari. Quindi

1.° Espresso m intero dispari per $2d+1$, e posto n un numero intero positivo qualunque, si avrà $(2N+1)(2d+1)^{n-1} = 2H + 1$, equazione, che al suo avveramento non richiede altra legge, e lascia N a pieno arbitrio.

2.° Sostituito $-n$ ad n, ne proviene $\frac{2N+1}{(2d+1)^{n+1}} = 2H+1$, onde s' induce la legge di prender N della forma composta $(2H + 1)(2d + 1)^{n+1}$.

3.° Se sia n fratto $= \frac{1}{r}$ si ha $\frac{2N + 1}{(2d + 1)^{\frac{r-1}{r}}} = 2H + 1$, equazione, che non può avverarsi, se non aggiunte due condidizioni: la prima che $2d+1$ sia un numero di podestà r, ed esprimibile per $(2e+1)^r$ $(2e+1)^r$; la seconda di prender $2N+1$ della forma composta $(2H+1)$ $(2e+1)^{r-1}$.

4.° Che se pongasi $m = \frac{1}{2f+1}$, ed n sia intero positivo, si avrà $\frac{2N+1}{(2f+1)^{n-1}} = 2H+1$, e perciò dovrà $2N+1$ pigliarsi della forma $(2H+1)(2f+1)^{n-1}$. Ma se n si faccia negativo, risultandone in tal caso, sostituito $-n$ ad n, $(2N+1)(2f+1)^{n+1} = 2H+1$, non si avrà più per N legge di particolare composta forma. E finalmente, se sarà n fratto $= \frac{1}{r}$, converrà adempiere l'equazione $(2N+1)$ $(2f+1)^{\frac{r-1}{r}} = 2H+1$, la quale aggiugne la condizione, che $2f+1$ sia un numero di podestà r, o della forma $(2g+1)^r$, e per conseguenza $m = \frac{1}{(2g+1)^r}$. Raccogliendo si deduce

Teorema X. L'avveramento simultaneo delle due equazioni $(\cos.A+\text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A-\text{sen}.A\sqrt{-1})^m$, $(\cos.A+\text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^n} = (\cos.A-\text{sen}.A\sqrt{-1})^{m^n}$ per composizion delle due ipotesi fondamentali giusta la lor combinazion 1.ª è esteso a più casi (*Teor.* IX), che per composizione delle stesse ipotesi giusta la 2.ª lor combinazione. 2.° In alcuni casi nelle espressioni dell'arco $A = \frac{N}{m}\pi$, ovvero $= \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}$, il numero N resta libero, in altri viene assoggettato a legge di certa forma. 3.° I binomj ricevono ne' primi casi molti valori, ne' secondi un solo, e conseguentemente il simultaneo avveramento delle due equazioni in quelle è molteplice, in questi semplice, ed unico. Mi riservo una più precisa distinzione, e spiegazione nell'articolo secondo, applicando il teorema alle equazioni $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$, $(1+h\sqrt{-1})^{m^n}$

$=$

$= (1 - h\sqrt{-1})^{m''}$, essendo ormai tempo di procedere a fare immediate parole di ciò, che è il proprio oggetto di questa Lettera.

ARTICOLO II.

Io mi spedirò quì più in breve con una ordinata serie di teoremi, la verità de' quali si comprenderà agevolmente, tenendo fissa l' attenzione al modo, nel principio dell' articolo antecedente descritto, col quale l' equazione $(\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ si trasforma nella $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$, e ricorrendo di teorema in teorema i relativi luoghi del medesimo articolo antecedente.

Teorema I. L'equazione $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$ non è di una verità assoluta, ma ipotetica, od il valore della quantità h non è arbitrario, ma dipendente dall' esponente m, ed è per esso, e per una ipotesi fondamentale determinato. Ecco in ristretto quadro la fondamentale ipotesi dell' equazione, e la determinazione di h.

Ipotesi fondamentale.

$\text{sen}.\ mA = 0 \ \ldots\ \cos.mA = \pm 1$

che ammette due combinazioni,

Combinazion 1.ª ... $\text{sen}.mA = 0 \ \ldots\ \cos.mA = 1$

Combinazion 2.ª ... $\text{sen}.mA = 0 \ \ldots\ \cos.mA = -1$

conseguenza della combin. 1ª ... $mA = N\pi$

conseguenza della combin. 2.ª $mA = (2N + 1) \cdot \dfrac{\pi}{2}$.

Formola determinativa dell' arco A per la combinazion 1.ª

$$A = \frac{N}{m}\pi.$$

Formola determinativa di esso Arco A per la combin. 2.ª

$$A = \frac{2N + 1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Espression di h generale . . . $h = \text{tang.}A$

Valore di h per la combin. 1.ª . . . $h = \text{tang.}\frac{N}{m} . \pi$

Valore di h per la combin. 2.ª. . . $h = \text{tang.}\frac{2N+1}{m} . \frac{\pi}{2}$.

Teorema II. L'equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ giusta la combinazion 1.ª, cioè l'equazione $(1 + \text{tang.}\frac{N}{m}\pi\sqrt{-1})^m = (1 - \text{tang.}\frac{N}{m}\pi\sqrt{-1})^m$ rappresenta sempre l' equazione

$$\frac{1}{(\cos.\frac{N}{m}\pi)^m} = \frac{1}{(\cos.\frac{N}{m}\pi)^m},$$

ed in ultimo generalmente in questa cade. E l' equazione stessa $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ giusta la combinazion 2.ª, cioè l' equazione $(1 + \text{tang.}\frac{2N+1}{m} . \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}) = (1 - \text{tang.}\frac{2N+1}{m}\sqrt{-1})^m$ rappresenta costantemente, ed all' ultimo esibisce l' equazione

$$\frac{-1}{(\cos.\frac{2N+1}{m} . \frac{\pi}{2})^m} = \frac{-1}{(\cos.\frac{2N+1}{m} . \frac{\pi}{2})^m}.$$

La cosa si fa chiara, se a ciò, che stabilito si è nel teorema II. dell' articolo I., si aggiunga il riflesso, che

$$(1 \pm h\sqrt{-1})^m = (1 \pm \frac{\text{sen.}A}{\cos.A}\sqrt{-1})^m = \frac{(\cos.A \pm \text{sen.}A\sqrt{-1})^m}{(\cos.A)^m}.$$

Teorema III. Se m sia numero intero, h avrà per la combinazion 1.ª un numero m di valori, che si offeriranno, sostituendo in luogo di N successivamente i termini della serie $0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5$ . . . . sino ad $m - 1$. E parimente un numero m di valori avrà h per la combinazion 2.ª risultanti dal sostituire gli stessi numeri per N in $2N + 1$: così che h riceverà un numero $2m$ di valori, e per conseguenza anche i binomj $1 + h\sqrt{-1}$, $1 - h\sqrt{-1}$ riceveranno ciascuno un numero $2m$ di valori. Quanto all' equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$, rappresentando nella combinazion 1.ª l' equazion $\frac{1}{(\cos.\frac{N}{m}\pi)^m} = \frac{1}{(\cos.\frac{N}{m}\pi)^m}$, e nella combinazion 2.ª

l' equazione $\frac{-1}{(\cos.\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2})^m} = \frac{-1}{(\cos.\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2})^m}$, vestirà essa successivamente un numero m di forme per la combinazion 1.ª, ed altrettante per la 2.ª, e conseguentemente in somma un numero $2m$; onde, comprendendo un numero $2m$ di equazioni, dir si potrà un' equazione virtualmente molteplice di grado $2m$. Si deve però riflettere, che, al caso di essere m un numero pari, un coseno positivo, ed un ugual negativo elevati alla potenza m daranno la stessa quantità. Così, essendo $m = 2$, si ha (esempio 1.° sotto il teor. III. dell' artic. I.) $\cos.\frac{0}{2}\pi = 1$, $\cos.\frac{1}{2}\pi = -1$, che elevati al quadrato producono ambedue 1; per la qual cosa le due forme, che l' equazione $(1 + h\sqrt{-1})^2 = (1 - h\sqrt{-1})^2$ riceve, l' una dopo l' altra, per la combinazion 1.ª coincidono tra loro. Può inoltre ristrignersi il numero delle forme diverse dell' equazione, tanto nel caso di m pari, quanto nel caso di m dispari, per risultare dalle formole $\frac{N}{m}\pi$, $\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2}$ degli archi diversi, ai quali convenga un ugual coseno, avendo il solo seno differente. Di fatto nell' esempio 3.° del luogo citato, posto $m = 3$, ne provengono nella 1.ª combinazione gli archi 120°, 240° forniti dello stesso coseno $= \frac{-1}{2}$; e per la 2.ª i due archi 60°, 300°, a' quali è comune il coseno $\frac{1}{2}$. Dunque, se piaccia di non tener conto, che delle forme diverse, e dal numero di queste misurare la virtù della moltеplicità, l'equazione $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$ si dirà tanto in virtù molteplice, quanti, tutti insieme paragonati, saranno i diversi valori di $\frac{1}{(\cos.\frac{N}{m}.\pi)^m}$, e di $\frac{-1}{(\cos.\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2})^m}$. Dico paragonati tutti insieme, cioè non solo tra loro quelli di $\frac{1}{(\cos.\frac{N}{m}\pi)^m}$, e separatamente tra loro quelli di $\frac{1}{(\cos.\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2})^m}$, ma eziandio i primi co' secondi; poichè se sia un $\cos.\frac{N}{m}\pi = p$, ed un $\cos.\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2} = -p$, o viceversa, e sia m dispari, sarà, rispetto a tali coseni, $\frac{1}{(\cos.\frac{N}{m}.\pi)^m} = \frac{-1}{(\cos.\frac{2N+1}{m}.\frac{\pi}{2})^m}$, e si restrignerà, anche per tal ragione, d' altrettanto il numero delle diverse forme. Accade effettivamente anche ciò nell' addotto esempio 3.°, avendosi per due archi, non che per uno, nella combinazion 1.ª il coseno $= -\frac{1}{2}$, e per due altri nella 2.ª il coseno $= \frac{1}{2}$, ed essendo manifestamente $\frac{1}{(\frac{-1}{2})^3} = \frac{-1}{(\frac{1}{2})^3}$.

Se facciamo $m = 2$, e nella equazione $(1 + h\sqrt{-1})^2 =$ $(1$

$(1-h\sqrt{-1})^2$ determiniamo h giusta la 2.ª combinazione per la formola $h = \text{tang.}\frac{2N+1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\text{sen.}\frac{2N+1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{\text{cos.}\frac{2N+1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}$, fatto $N=0$ si trova $h = \frac{\text{sen. }\frac{\pi}{4}}{\text{cos. }\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{0}$, e fatto $N=1$, trovasi $h = \frac{\text{sen.}\frac{3\pi}{4}}{\text{cos.}\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1}{0}$, onde le due forme, che l'equazione riceve, sono $(1+\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2 = (1-\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2 \ldots$ $(1-\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2 = (1+\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2$. Queste forme, che possiamo ristrignere nella sola $(1+\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2 = (1-\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2$ non consentono col teorema, non rappresentando punto l'equazione $\frac{-1}{0} = \frac{-1}{0}$, e non potendo in questa all'ultimo cadere. Poichè, effettuati i quadrati, l'equazione $(1+\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2 = (1-\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2$ si cangia in $1+\frac{2}{0}\sqrt{-1}-1 = 1-\frac{2}{0}\sqrt{-1}-1$, che si riduce a $+\frac{2}{0}\sqrt{-1} = -\frac{2}{0}\sqrt{-1}$ equazion ben lontana dalla $\frac{-1}{0} = \frac{-1}{0}$; ed in se assurdissima. E come conciliar tale mostruosità col teorema? Forse che dicendo che nei binomj $1+\frac{1}{0}\sqrt{-1}$, $1-\frac{1}{0}\sqrt{-1}$ a confronto dell'

dell' infinito, sebbene immaginario, $\frac{1}{0}\sqrt{-1}$ devesi contar per nullo, e rigettare il finito reale 1? Rigettandolo di fatto, resta $(+\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2 = (-\frac{1}{0}\sqrt{-1})^2$ che, eseguiti i quadrati, presenta $\frac{-1}{0} = \frac{-1}{0}$. Si deve, così è, dai binomj $1+\frac{1}{0}\sqrt{-1}$, $1-\frac{1}{0}\sqrt{-1}$ espeller il primo termine 1, ma vi ha di ciò fare sua intrinseca, essenziale, e convincente ragione. Si rimonti dall' equazione $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$ alla original di lei forma $(\cos.A+\text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A-\text{sen}.A\sqrt{-1})^m$. Dove $\cos.A$ sia $=0$, distrutto il primo termine de' suoi binomj, essa si contrae a $(\text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (-\text{sen}.A\sqrt{-1})^m$, o sia ad $(\pm 1\sqrt{-1})^m = (\mp 1\sqrt{-1})^m$, perchè $\cos.A = 0$ porta necessariamente seco $\text{sen}.A = \pm 1$. Corrispondentemente dunque, qualunque volta sia $\cos.A = 0$, devono i binomj $1+h\sqrt{-1}$, $1-h\sqrt{-1}$ perdere il primo lor termine 1. Questo è fondato sul supposto, che nell' original forma dell' equazione esista $\cos.A$, o sia che questo coseno abbia un qualche valore di grandezza, venendo meno il supposto, deve insieme venir meno ciò che da esso ha nascita, cioè il termine 1 dei binomj $1+h\sqrt{-1}$, $1-h\sqrt{-1}$. Nella divisione che si fa dei binomj $\cos.A+\text{sen}.A\sqrt{-1}$, $\cos.A-\text{sen}.A\sqrt{-1}$ per $\cos.A$, onde passare dall' equazione $(\cos.A+\text{sen}.A\sqrt{-1})^m = (\cos.A-\text{sen}.A\sqrt{-1})^m$ alla $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$, operando algebraicamente, cioè in maniera generale, e prescindente da' casi particolari, si concepisce $\cos.A$ come un prodotto di $\cos.A \times 1$; il concetto è esatto sinchè $\cos.A$ ha qualche grandezza, ma cessa d' esserlo, allorchè $\cos.A = 0$; poiche se è vero, che si può considerare indeterminatamente $0 = 0 \times a$, ed includentemente $= 0 \times 1$, egli è insieme manifesto non esservi maggior ragione di considerarlo $= 0 \times 1$

piuttosto, che $= 0 \times 2 \ldots$, ed è parimente irrefragabile includersi in $0 = 0 \times a$ eziandio $0 = 0 \times 0$, e la corrispondenza essenziale tra i cangiamenti dei binomj $\cos.A + \text{sen}.A\sqrt{-1}$, $\cos.A - \text{sen}.A\sqrt{-1}$, e dei binomj $1 + h\sqrt{-1}$, $1 - h\sqrt{-1}$ definisce, che nel caso di $\cos.A = 0$, questo 0 non si abbia a considerar, che come 0×0. Che se, senza punto detrarre alla generalità algebraica della trasformazione, considerando indistintamente $\cos.A = \cos.A \times 1$, e senza la pena di rimontare all'origine, piaccia all' analista, nel caso di $h = \frac{1}{0}$, ripiegare all' inconveniente della indistinta considerazione per tal caso risultante, con contar per nullo in confronto dell' infinito immaginario $h\sqrt{-1}$ il finito reale 1, l' effetto sarà il medesimo; ma chi non vuol urtata sua ragione, ma appagata ed illuminata, ricorrerà alla metafisica sopra esposta. Intanto stabiliamo

Teorema IV. Sempre, che nell' equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ sia $h = \frac{1}{0}$ si deve rigettar il primo termine dei binomj 1, e ristrigner l' equazione ad $(h\sqrt{-1})^m = (-h\sqrt{-1})^m$, e ciò per intrinseca, necessaria, originale ragione dell' equazion medesima:

Teorema V. Dall'equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ in niun modo discendono, anzi sono tanto aliene, quanto false, ed assurde, le due equazioni, delle quali l' Ab. Nicolai ha creduto di formar alle strane sue idee analitiche sì gran base, le due equazioni cioè: $1 + \sqrt{-1} = 1 - \sqrt{-1}$, $(1 + \sqrt{-1})^2 = (1 - \sqrt{-1})^2$. Poichè nè $\text{tang}.\frac{N}{1}\pi$, $\text{tang}.\frac{2N+1}{1}.\frac{\pi}{2}$; nè $\text{tang}.\frac{N}{2}\pi$, $\text{tang}.\frac{2N+1}{2}.\frac{\pi}{2}$ danno 1: vedi gli esempj 1° e 2° sotto il Teor. III. art. I. È bensì figlia dell' equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ l' equazione $(1 + \sqrt{-1})^4 = (1 - \sqrt{-1})^4$; imperciocchè

$\frac{2N+1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}$, fatto $N = 0$, dà $\frac{\pi}{8} = 45^\circ$, e sen.$45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$; e parimenti cos.$45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, onde tang.$45^\circ = h = 1$. Ma e che? Da $(1+\sqrt{-1})^4 = (1-\sqrt{-1})^4$ non è lecito inferire $(1+\sqrt{-1})^2 = (1-\sqrt{-1})^2$, nè $1+\sqrt{-1} = 1-\sqrt{-1}$? Nò, e lo dimostrerò più sotto nei teoremi IX. e XIV.

Teorema VI. Il caso di m negativo si converte in quello di m positivo, e per conseguenza vale per tal caso quanto pel caso di m positivo si è stabilito.

Teorema VII. Se m sia un numero fratto $= \frac{1}{t}$, sarà h $=$ tang.$Nt\pi$, ovvero $=$ tang.$(2N+1)t\cdot\frac{\pi}{2}$, cioè, e per la 1ª, e per la 2ª combinazione sarà $h = 0$.

Corollario dei teoremi III. VI. VII. Nell' equazione $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$, per la combinazion 1.ª, che determina $h =$ tang.$\frac{N}{m}\pi$, ha sempre h un valor $= 0$ proveniente al prender $N = 0$, e non è h che $= 0$ essendo m fratto $= \frac{1}{t}$, essendo intero $= 1$, essendo $= 2$; e solo divenendo $m = 3$ incomincia h ad acquistar vero valore o grandezza. E per la 2.ª combinazion, che determina $h =$ tang.$\frac{2N+1}{m}\cdot\frac{\pi}{2}$, non è h che $= 0$, essendo m fratto $= \frac{1}{t}$, ed essendo $= 1$; diventando $m = 2$, salta h a valor infinito, e comincia a ricevere valori finiti nel caso di $m = 3$. Rimangono poi simili gli avvenimenti in h, cangiando in negativi gli assegnati positivi valori di m.

Teorema VIII. Se determinata h per le formole tang.$\frac{N}{m}\pi$, tang.$\frac{2N+1}{m}\cdot\frac{\pi}{2}$, ne' casi, ne' quali non risulta essa, nè zero, nè infinita, ed in conseguenza i binomj restan tali, si svolga in serie $(1 \pm h\sqrt{-1})^m$, effettuando la podestà m, e si chiami R la parte reale della serie, avendo determinata h per la formola prima, ed R^{I} essa parte reale, avendo determinata h per la formola seconda; si denoti poi per $\pm S\sqrt{-1}$ la parte immaginaria della serie, usata la prima determinazione di h, e $\pm S^{\mathrm{I}}\sqrt{-1}$ la parte immaginaria, usata la seconda determinazione: sarà costantemente

$$R = \frac{1}{(\cos.\frac{N}{m}\pi)^m} \ldots R^{\mathrm{I}} = \frac{1}{(\cos.\frac{2N+1}{m}\cdot\frac{\pi}{2})^m} \ldots \pm S = 0$$

$\ldots \pm S^{\mathrm{I}} = 0$.

Va con ciò in un colpo a terra tutto il misterioso edificio, che l' Ab. Nicolai, svolti in serie i membri dell' equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$, paragonando reali a reali, ed immaginarj ad immaginarj, fabbricò su l' equazione $+S\sqrt{-1} = -S\sqrt{-1}$.

Teorema IX. A potere dall' equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ inferire l' equazione $(1 + h\sqrt{-1})^{m''} = (1 - h\sqrt{-1})^{m''}$, o, che è lo stesso, ad essere simultaneamente vere queste due equazioni, è d' uopo, che simultaneamente si avverino le due seguenti ipotesi fondamentali.

Due ipotesi fondamentali.

sen.$mA = 0$, cos.$mA = \pm 1$ ... sen.$m''A = 0$, cos.$m''A = \pm 1$.

E siccome l' una, e l' altra ammette due combinazioni, così ne nascono due composizioni, secondo che ambedue prese sono nella lor 1.ª, o 2.ª combinazione.

Composizion 1.ª ... sen.$mA = 0$, cos.$mA = 1$ ... sen.$m''A = 0$, cos.$m''A = 1$.

Conseguenze di questa composizione ... $mA = N\pi$, $m''A = H\pi$.

Formola determinativa dell' arco A ... $A = \frac{N}{m}\pi = \frac{H}{m''}\pi$

Formola definitiva della possibilità, e delle condizioni della 1.ª composizione, o sia del simultaneo avveramento per essa . . . $Nm^{n-1} = H$.

Composizion 2.ª . . . $\text{sen.} mA = 0$, $\cos. mA = -1$ . . . . $\text{sen.} m^n A = 0$, $\cos. m^n A = -1$.

Conseguenza di questa 2.ª composizione . . . $mA = (2N+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, $m^n A = (2H+1) \cdot \frac{\pi}{2}$.

Formola determinativa dell' arco A . . . $A = \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2H+1}{m^n} \cdot \frac{\pi}{2}$.

Formola definitiva della possibilità, e delle condizioni della 2.ª composizione, o sia del simultaneo avveramento . . . $(2N+1)m^{n-1} = 2H+1$.

Teorema X. Per via della 1.ª composizione è sempre, ed assolutamente possibile il simultaneo avveramento delle due equazioni $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$, ed $(1 + h\sqrt{-1})^{m^n} = (1 - h\sqrt{-1})^{m^n}$ nel caso di m, n positivi, ed interi, prendendo $h = \text{tang.} \frac{N}{m} \pi$; e l'avveramento sarà molteplice, ricevendo h varj valori, da $m = 3$ in su.

Teorema XI. Se stando m intero positivo, sia n intero negativo, cioè se in vece di n, abbiasi $-n$, il simultaneo avveramento delle due equazioni per via della composizion 1.ª non può aver luogo, che a condizione di prender N della forma Hm^{n+1}, e quindi $h = \text{tang.} Hm^n . \pi = 0$.

Teorema XII. Se n sia fratto $= \frac{1}{r}$, non è possibile per la 1.ª composizione il simultaneo avveramento delle due equazioni, se non che a due condizioni: 1.ª che m sia una potenza a^r; 2.ª di pigliar N della forma Ha^{r-1}, ed in conseguenza $h = \text{tang.}\frac{H}{a}\pi$.

Dunque affinchè simultaneamente si avverino le due equazioni $(1+h\sqrt{-1})^4 = (1-h\sqrt{-1})^4$, $(1+h\sqrt{-1})^2 = (1-h\sqrt{-1})^2$, essendo $m = 4 = 2^2$, $n = \frac{1}{2}$, si dovrà prender $h = \text{tang.}\frac{H}{2}\pi = 0$. Con che resta dimostrato incompossibile l'avveramento delle due equazioni $(1+\sqrt{-1})^4 = (1-\sqrt{-1})^4$, $(1+\sqrt{-1})^2 = (1-\sqrt{-1})^2$, ed illegittima del tutto l' illazione da quella a questa, che è ciò, che di dimostrar promisi nel teorema V.

Teorema XIII. Se m sia fratto $= \frac{1}{t}$, ed n intero positivo, non può il simultaneo avveramento delle due equazioni per la 1.ª composizione aver luogo, fuori che a condizione di prender N della forma Ht^{n-1}, il che produce $h = \text{tang.}Ht^n . \pi = 0$.

Teorema XIV. All' opposto N divien libero, ed il simultaneo avveramento assoluto, se in cambio di n intero positivo, si abbia $-n$ intero negativo; ma contuttociò a ragione di esser m rotto si ha $h = \text{tang.}\frac{N}{m}\pi = \text{tang.}Nt . \pi = 0$.

Teorema XV. Posti m, n ambedue rotti, il primo $= \frac{1}{t}$, il secondo $= \frac{1}{r}$, non è per mezzo della 1.ª composizione possibile il simultaneo avveramento delle due equazioni, che alla condizione, che t sia una potenza c^r, e ciò essendo, sarà $h = \text{tang.}Nc^r . \pi = 0$.

Teorema XVI. Ad ottener, che per la 1.ª composizione simultaneamente si avverino le due equazioni $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$, $(1+h\sqrt{-1})^{m^n} = (1-h\sqrt{-1})^{m^n}$

fatto $n = 0$, per lo che la seconda equazione cade in $1 + h\sqrt{-1} = 1 - h\sqrt{-1}$, richiedesi ad indispensabile condizione il pigliar N della forma Hm, in conseguenza di che proviene $h = \text{tang.} H\pi = 0$.

Rendesi quinci manifesto l'illegittimo argomentare, che sarebbe, l' inferire dall' equazion vera $(1 + \sqrt{-1})^4 = (1 - \sqrt{-1})^4$ la falsa ed assurda $1 + \sqrt{-1} = 1 - \sqrt{-1}$, siccome ho promesso di far palese nel teorema V.

Teorema XVII. Per via della 2.ª composizione non è mai possibile il simultaneo avveramento delle due equazioni, se m sia numero intero pari, o fratto di denominatore pari.

Teorema XVIII. Posto m numero intero dispari $= 2d + 1$, ed n un numero intero positivo qualunque, il simultaneo avveramento delle due equazioni per via della 2.ª composizione è assolutamente possibile, e molteplice, risultando $h = \text{tang.} \frac{2N+1}{2d+1} \cdot \frac{\pi}{2}$

Teorema XIX. Se in luogo di n intero positivo si abbia $-n$ intero negativo, il simultaneo avveramento delle due equazioni divien soggetto alla condizione di prender $2N + 1$ della forma composta $(2H + 1)(2d + 1)^{n+1}$, che rende $h = \text{tang.} \frac{(2H+1)(2d+1)^{n+1}}{2d+1} \cdot \frac{\pi}{2} = \text{tang.} (2H+1)(2d+1) \cdot \frac{\pi}{2} = 0$.

Teorema XX. Rimanendo $m = 2d + 1$, se sia $n = \frac{1}{r}$; non è possibile il simultaneo avveramento per via della 2.ª composizione, se non nel caso, che il numero m, oltre ad essere dispari $= 2d + 1$, sia eziandio una potenza $(2e + 1)^r$, ed a condizione di prender $2N + 1$ della forma $(2H + 1)(2e + 1)^{r-1}$, donde proviene $h = \text{tang.} \frac{2H+1}{2e+1} \cdot \frac{\pi}{2}$.

Teorema XXI. Se m sia fratto $= \frac{1}{2f+1}$, ed n intero positivo, il simultaneo avveramento delle due equazioni per mezzo della 2.ª composizione esige, che si prenda $2N+1$ della forma $(2H+1)(2f+1)^{n-1}$, la quale determina $h = \text{tang.}\,(2H+1)(2f+1)^n . \frac{\pi}{2} = 0$.

Teorema XXII. Che se ritenuto $m = \frac{1}{2f+1}$, in vece di n intero positivo, suppongasi $-n$ intero negativo, il simultaneo avveramento delle due equazioni per via della 2.ª composizione non imporrà legge di forma rispetto al numero $2N+1$, ma sarà ciononondimeno $h = \text{tang.}\,\frac{2N+1}{m} . \frac{\pi}{2} = \text{tang.}\,(2N+1)(2f+1) . \frac{\pi}{2} = 0$.

Teorema XXIII. E se finalmente sia $m = \frac{1}{2f+1}$, ed $n = \frac{1}{r}$, il simultaneo avveramento delle due equazioni non sarà per via della composizione 2.ª possibile, che nel caso di essere $2f+1$ una potenza $(2g+1)^r$, e ciò essendo, risulterà $h = \text{tang.}\,(2N+1)(2g+1)^r . \frac{\pi}{2} = 0$.

Corollario dei 14. teoremi X. . . . XXIII. Nella 1.ª composizione in due soli casi: in quello cioè 1.° di m intero qualunque pari, o dispari ed n intero positivo; 2.° in quello di n fratto $= \frac{1}{r}$, e di m intero, ma insieme di podestà r, e generalmente per a' esprimibile, h sussiste, o sia ritiene valor di vera quantità senza cadere a zero. E nella composizion 2.ª parimente ciò avviene in due casi soli: 1.° in quello di m intero dispari, ed n intero positivo qualunque; 2.° in quello di n fratto $= \frac{1}{r}$, ed m potenza r di numero dispari, quale $(2e+1)^r$. Quindi a questi soli quattro ca-

casi restrignesi il simultaneo avveramento delle due equazioni $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$, ed $(1 + h\sqrt{-1})^{m^n} = (1 - h\sqrt{-1})^{m^n}$, se intendasi, che h debba non essere zero, ma aver qualche grandezza. E perchè per l' osservazion fatta nell' Art. I. ques. 5.° Comp. 1. *n*. 3. i casi quì segnati per secondi rispetto all' una, ed all' altra Composizione non sono, che reciproci dei primi, null' altro facendo, che convertire l' inferimento dalla prima alla seconda equazione nel reciproco da questa a quella. Perciò il simultaneo avveramento restrignesi ancora più, e si riduce al caso di m intero, o positivo, o negativo, ed n intero positivo, con la distinzione, che se m sia numero dispari, l' avveramento ha due modi, l' uno per la 1.ª combinazione l' altro per la 2.ª, e non ne ha, che un solo, per la 2.ª cioè combinazione, se m sia numero pari.

Eccovi, o celebratissimo Signore, il mio studio sulla vostra equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ ad oggetto di sgombrarla da qualunque nebbia di mistero, o paradosso, e ridurla alla bella matematica lucidissima evidenza. Aggraditelo qual segno dell' altissima mia stima.

APPENDICE.

§. I. Nella prodotta lettera non parlai, che dei casi risguardanti m razionale, perchè i misteri dal D' Alembert medesimo proposti su la sua equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$, e le assurdità infinite accumulatevi sopra dall' Ab. Nicolai non eccedono la sfera di m razionale. Ma la natura dell' equazione limita ella entro di tale sfera l' esponente m?

Teorema I. Nell' equazione $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$ l' esponente m, ugualmente, che razionale, può essere irrazionale, e trascendente ancora.

L' ipotesi fondamentale sen. $mA = 0$, cos. $mA = \pm 1$ il consente, poichè la 1.ª sua combinazione sen.$mA = 0$, cos.$mA = 1$ altra condizion non importa, se non $mA = N\pi$; e la combinazion 2.ª sen.$mA = 0$, cos.$mA = -1$ non altra condizione, che $mA = (2N+1)\frac{\pi}{2}$: ed ambedue codeste condizioni permettono, che m sia irrazionale, o trascendente ugualmente, che razionale; e la sola differenza, che ne nasce si è, che, essendo m irrazionale, o trascendente, tale sarà pure la grandezza dell' arco A, il che produce i teoremi seguenti.

Teorema II. Essendo nell' equazione $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$ l' esponente m irrazionale, o trascendente, la quantità h sarà infinitamente molteplice, e ciò doppiamente, perchè sì per la 1.ª, e sì per la 2.ª combinazione. Ed il simile in conseguenza sarà dei due binomj, e dell' equazione medesima. La ragione si è, perchè nelle due espressioni di h, cioè $h = \text{tang.}\ \frac{N}{m}\pi$, $h = \text{tang.}\ \frac{2N+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}$, essendo m irrazionale, o trascendente, con sostituire ordinatamente ad N i termini della serie 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6 . . . , non risulterà mai nella prima $\frac{m}{m}\pi = \pi$, nè giammai nella seconda $\frac{2m+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}$; onde, proseguendo, anche all' infinito, non terminerà mai la serie degli archi di tangente diversa, non potendo mai provenire archi uguali ai già dianzi provenuti con l' aggiunta dell' intera circonferenza π, siccome accade, quando m è razionale. Art. I. Ques. 1. E' inoltre da osservare, che del numero infinito de' valori di h per la 1.ª combinazione non ve ne sarà, che uno $= 0$, il qual sarà quello di tang. $\frac{0}{m}\pi$, facendo $N = 0$; e niuno ve ne sarà del numero infinito de' valori per la combinazione 2.ª Nè per l' una poi, nè per l' altra combinazione riceverà h valore alcuno infinito.

Teorema III. Essendo m irrazionale, o trascendente, se eccettuato il fare $N = 0$, che, rendendo $h = \text{tang.} \frac{0}{m}\pi = 0$, tramuta i binomj in monomj, si svolga $\left(1 \pm \text{tang.} \frac{N}{m}\pi\right)^m$ in serie, e si chiami P la parte reale, che se ne svilupperà, e $\pm Q\sqrt{-1}$ la parte immaginaria: saranno P, e Q due serie infinite; ma non ostante l' infinito numero de' termini, sarà

L' infinita serie $P = 1$, e l' infinita serie $Q = 0$

Similmente, e senza eccezione, svolgendo $\left(1 + \text{tang.} \frac{2N+1}{m} . \frac{\pi}{2}\right)^m$, e chiamando P^1 la parte reale, e $\pm Q^1\sqrt{-1}$ la parte immaginaria, sarà l' infinita serie $P^1 = -1$, e l' infinita serie $Q^1 = 0$

§. II. Rispetto al simultaneo avveramento delle due equazioni $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$, $(1 + h\sqrt{-1})^{m''} = (1 - h\sqrt{-1})^{m''}$ non ho nella stessa lettera al Sig. D' Alembert esaminate, che due composizioni delle due fondamentali ipotesi, prendendo l' una, e l'altra nella 1.ª o nella 2.ª combinazione. Ma eccomi ad esaminarne brevemente due altre formate con prender la 1.ª fondamentale ipotesi nella sua combinazion 1.ª, e la 2.ª nella sua combinazione 2.ª; e con prendere a vicenda la 1.ª ipotesi fondamentale nella 2.ª sua combinazione, e la 2.ª fondamentale ipotesi nella sua combinazion 1.ª

La 1.ª fondamentale ipotesi nella sua 1.ª combinazione sen. $mA = 0$, cos. $mA = 1$ esige $mA = N\pi$; e la 2.ª ipotesi fondamentale nella 2.ª sua combinazione sen. $m''A = 0$, cos. $m''A = -1$ esige $m''A = (2H+1) . \frac{\pi}{2}$: onde la composizione esige $A = \frac{N}{m} \cdot \pi = \frac{2H+1}{m''} . \frac{\pi}{2}$; e quinci la *formola defini-*

nitiva di tal composizione, che direm 3.ª, viene ad essere $2Nm^{n-1} = 2H+1$.

L' ipotesi fondamentale 1.ª nella 2.ª sua combinazione sen. $mA = 0$, cos. $mA = -1$ esige $mA = (2N+1)\cdot\frac{\pi}{2}$, e la ipotesi fondamentale 2.ª nella sua 1.ª combinazione sen. $m^n A = 0$, cos. $m^n A = 1$ esige $m^n A = H\pi$. Dunque la composizion, che direm 4.ª, esige $A = \frac{2N+1}{m}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{H}{m^n}\cdot\pi$, donde si ha per *formola definitiva* di essa, $(2N+1)m^{n-1} = 2H$.

Teorema. I. La composizion 3.ª, essendo m razionale, è possibile in due casi. 1.° Se m sia un numero intero pari $2k$, ed n sia negativo, cioè in vece di n si abbia $-n$, poichè in tal caso la formola $2Nm^{n-1} = 2H+1$ si cangia in $2N = (2k)^{n+1}(2H+1)$; 2.° se m sia un fratto $= \frac{1}{2l}$, ed n sia positivo, cangiandosi la formola definitiva in $2N = (2l)^{n-1}(2H+1)$.

Teorema II. La composizion 4.ª è possibile, essendo m razionale, in due casi. 1.° Se sia m numero pari $2p$, ed n positivo; 2.° se m sia fratto $= \frac{1}{2q}$, ed n negativo: poichè la formola definitiva $(2N+1)m^{n-1} = 2H$ prende nel 1.° caso la modificazione $(2N+1)(2p)^{n-1} = 2H$, e nel secondo la modificazione $(2N+1)(2q)^{n+1} = 2H$.

Teorema III. Le quattro formole delle quattro composizioni 1.ª $Nm^{n-1} = H$ . . . 2.ª $(2N+1)m^{n-1} = 2H+1$ . . 3.ª $2Nm^{n-1} = 2H+1$ . . . . 4.ª $(2N+1)m^{n-1} = 2H$ non possono assolutamente aver luogo, se m sia trascendente. E se m sia irrazionale non possono ricever adempimento, se non che essendo m un radicale semplice di grado $n-1$, che generalmente si rappresenti per $\sqrt[n-1]{B}$; e dovrà inoltre esser B un numero intero dispari, o fratto di denominator dispari a poter soddisfare alla formola 2.ª; un fratto di denominator pari a poter rendere effettuata la 3.ª; ed un intero pari per convenire alla 4.ª Perciò le due equazioni $(1 + h\sqrt{-1})^m = (1 - h\sqrt{-1})^m$, $(1 + h\sqrt{-1})^{m^n} = (1 - h\sqrt{-1})^{m^n}$ non possono conseguire simultaneo avveramento, essendo m irrazionale, se non alle condizioni in genere, ed in particolare quì assegnate.

SOPRA DUE IDROPICI FORTUNATAMENTE GUARITI PER UNA CADUTA DALL' ALTO

MEMORIA

Di Gio. Verardo Zeviani

Ricevuta il dì 12. *Agosto* 1801.

Non solum Naturae, sed etiam Fortunae, imitator est Medicus. Galen. contra Julian.

Istoria Prima.

Il Cittadino Marco Busti Prete, essendo giovanetto di anni dodici, per una caduta dall' alto si fece a poco a poco ostrutto nel ventre; indi universalmente idropico. Usò indarno molti medicamenti prescrittigli da un dotto e sperimentato Medico: finchè per gioco messosi con empito a saltare su d' una panca, precipitò con sì grave scossa, che fu creduto e levato da terra per morto. Di lì a pochi giorni evacuò molta materia fetida acquosa verdastra, per vomito, per secesso, per urina: migliorando di giorno in giorno in salute, sino a dileguarsi totalmente e stabilmente la idropisia. Se non che dopo alquanti anni tornò a dolersi per una tumefazione alla regione del fegato. In fatti si aperse ivi un foro, che non cessava mai di tramandare molta materia. Trovò il Chirurgo che dietro all' interna parete scorreva una fistola sino al di dietro della schiena. Fece ivi una controfessura per il più pronto e facile colamento della materia. Un rinomato Professor Patavino poco dopo sopravvenuto, voleva che fosse fatta una grande spaccatura dall' uno all' altro dei fori; ma non fu da noi obbedito. Finalmente al primo sito si presentò non so quale dura membrana, che presa dall' attento Chirurgo con un uncino, a poco a poco fuor tirolla dall' angusto foro: ed era grande e cava come una scodella, liscia come sapone, e densa come grosso cartone, senza segno veruno di canali o che fosse organica. Poco dopo si chiusero un dopo l' altro i fori: e sono otto anni e più che vive sano ed allegro il nostro Marco, senza temere più di diventatare Simone, per un taglio così spropositato a traverso del corpo.

Istoria Seconda.

Cattarina Cortelazzi, essendo in età di quaranta anni, si trasferì dall' aria nativa di Verona in quella di Mantova. Fu ben tosto colà, e a lungo travagliata da febbri periodiche e mesenteriche, che le hanno cagionata una ostruzione nelle viscere tutte del basso ventre. Finalmente si fece idropica, a segno che da tutti era tenuta per gravida oltre i nove mesi. Provati inutilmente nel primo tempo i più forti e convenienti presidj dell' arte, abbandonò ogni cura, e visse idropica per il corso di molti anni. Quando per ventura cadde per terra, urtando forte con la pancia nel lastricato. La notte seguente evacuò per urina gran quantità di materia acquosa senza odore; e così seguitò a fare di giorno e di notte, scemandosi a gran passi il ventre: fatta in pochi giorni del tutto e stabilmente libera e sana.

Riflessioni.

Che per una scossa, per una contusione, per una caduta dall'alto un Uomo sano possa farsi idropico, facile è l'intenderlo; e molti esempj se ne leggono negli Autori. Segnatamente nella Biblioteca Chirurgica del Mangeti si riferisce l'osservazione del Fehrio, di una Gentildonna fatta idropica per esserle passata sul ventre una ruota, dopo caduta fuor di carrozza. Nella grande raccolta del Portalio, al libro primo, numero 1664. si contiene una osservazione del Fromanno, di una Giovane caduta dall' alto e fatta idropica. Nelle giunte del Mangeti al Boneti si legge di un' altra Giovane fatta idropica nel cadere dall' alto. Nell' Aenio la stessa cosa si legge in altra Donna. *Si limpha vasis lymphaticis coercenda ex iis ruptis effundatur in cavitates adjacentes*, *quod interdum fit in gestatione ponderis*, *motu corporis validiore*, *contusione* etc. *difficilem curatu hydropem generat*, leggesi nel Gortero. Ma che questa stessa causa che suol formare la idropisia vaglia in attimo a debellarla formata che sia per questa stessa o per altra cagione, questo è un paradosso, e una stupenda operazione del caso. E non sono soli i due casi quì sopra narrati: ma altri non pochi se ne leggono negli Scrittori. Negli Atti de' Curiosi della Natura all' anno 1730. si legge una osservazione di Cristoforo Goezio, di una Donna che sembrava guarita dalla sua idropisia per virtù di un empiastro; ma che ben presto tornò a farsi idropica, da che stabilmente guarì col cadere per terra. Merita questo fatto di essere riferito con le stesse sue parole: *Rediit autem post paucos annos Ascites*, *abdomine ad insignem rursus molem excrescente*, *et per plures duravit annos*; *nec prioribus*, *nec sexcentis aliis adhibitis cessans remediis*. *Ante aliquot denique annos fortuito casu e sella*, *cui insidebat*, *in pavimentum*, *et quidem abdomine*, *praesternebatur*; *simul autem sonum aliquem*, *seu fragorem notabilem percipiebat* (es platzte ettvvas) *succedente per muliebria et anum largissimo liquoris alicujus fluxu*: *quo successive elapso abdominis tumor penitus detumuit*; *et postea dein per reliquos octo annos quam optime valuit*. Leggesene una quasi simile del Benivenio, riferita dal Foresto al tomo secondo delle sue Opere pag. 379. Una se ne legge di Niccola Villi, un' altra di Ernesto Cono. Rammemora anche l' Offmanno una idropisia guarita per mezzo di una caduta dall' alto; la quale ha dato occasione al Dotto Alberti di stendere un Opuscolo intitolato: *de Hydrope saccato per lapsum in abdomen curato.* La più maravigliosa però opra d'ogni altra fu la guarigione di una idropica, pienamente descritta dal Penada, in un suo libro intitolato: *Saggio di Osservazioni*, la quale merita di essere quì compendiosamente riferita. Nell' anno 1778. Anna Alfonsi Padovana, in età di 37. anni, cominciò a gonfiarsi di modo tale che fu per lunghissimo tempo considerata e creduta gravida. All' anno 1781. crebbe a dismisura il ventre, e cominciossi a sentire la fluttuazione dell'acqua; avendo il male tutti i caratteri di una vera e confermata idrope ascite. Nell' anno 1782. era cresciuto a tal segno il volume del ventre, che dovea questa misera giacere immobile su d' una sedia, e riporre sopra di un' altra l' immensa mole del suo ventre. Alli 26. di Novembre 1783. stimolata essa da natural voglia di deporre le feccie, nell' ora della maggior quiete de' suoi domestici, volendosi alcun poco muovere dalla sua orizzontale situazione, strascinata dall' enorme volume del suo ventre stramazzò violentemente sul pavimento, rilevando una gagliarda percossa a quel lato appunto, sopra del quale si era rivoltata. Due ore dopo un tal accidente, ristabilita dal deliquio in cui era caduta, le sopravvenne una quasi involontaria uscita di urina in buona copia; di lì a poco la seconda e terza e quarta volta. Per quattro intieri giorni, ed altrettante notti senza la minima intermissione uscì dall' uretra di questa Inferma questa urina; che esaminata mostrossi essere un linfatico umore acquoso, alla dose ogni volta di tre libbre di peso. Sicchè calcolando la quantità della materia uscita, calcolossi essere presso a poco trecento ottanta quattro libbre di peso Padovano. Quindi svanì ogni volume del ventre; ed entro lo spazio di poche settimane si ristabilì in salute l' Inferma: ed era sana dieci anni dopo la mirabile sua guarigione.

Queste non poche uniformi osservazioni sono argomento di altre simili che saranno sparse ne' libri, e di altre mille che non saranno state per incuria od ignoranza da' Medici pubblicate. Or che facciam noi? Staremo quì stupidi ammiratori di questa stupenda opera del caso; senza prendere da essa qualche norma a sollievo di una malattia giustamente riputata la peggiore sopra tutte le altre, che si tengono per incurabili? Ond'è che corre per proverbio: *hydrops et asthma, mirabile phantasma, quod nullum curat cataplasma*. Trattasi quì spezialmente della spezie d'idropisia detta *ascite*, la quale è la più difficile a debellarsi di tutte le altre spezie. In mia vita, diceva il gran Pratico Albertini, per riferimento del Morgagni, ho avuto il contento di risanare tre infermi tocchi di tisichezza all' ultimo grado confermata: non ho potuto mai risanare un idropico gonfio dall' ascite. Vediamo se una più sottile e ricercata Notomia di alcune parti contenute nel basso ventre dove formasi la idropisia ascite, unita ad una più attenta considerazione delle occorse circostanze nella casuale guarigione degli idropici quì sopra descritti, per ventura ne somministri qualche lume per la spiegazione di questi avventurosi fatti, onde prender norma di tentare coraggiosamente con l' arte quanto viene con tanto riuscimento operato dal caso.

Avendo levati con la Sezione i muscoli del basso ventre, scopresi immediatamente un involucro membranoso, aderente alla superfizie interna dei muscoli trasversi, e a quella di tutto il resto della cavità del basso ventre, di cui copre e involve le viscere come in una spezie di sacco. Stendesi sotto la faccia inferiore del diaframma, e passando sopra le sue appendici, sopra il muscolo *psoas*, sopra le vertebre de' lombi, e sopra le *capsule* renali, e sopra i reni, e sopra i vasi sanguigni maggiori, discende ai muscoli e all' ossa degli ilii, và all' intestino retto, di cui lascia fuori la inferior parte, si stende nelle femmine alla vagina in parte ed all' utero. Sale alla vescica urinaria, di cui forma la membrana esteriore: di là si stende e sale dietro la faccia interna de' muscoli retti e trasversi, torna al diaframma, ma, compiendosi il sacco che forma. Ma prima di ciò tramanda delle appendici, che come sacchi particolari minori, tutte le altre viscere tengono serrate e sospese. È perpetuamente bagnato il peritoneo di una putida vischiosa, pingue acquetta, che compresso si vede a mandar fuori in piccole gocce. Sembra questa esalare dalle arterie; ma è ben anche certo che si assorbe per le vene: perciocchè schizzata dell' acqua al peso di quattro e sei once nel ventre di un vivo animale, in breve tempo si è veduta assorbirsi, e disperdersi. Questo basta per noi.

La membrana uscita fuor dell' ascesso aperto all' ipocondro destro del Prete Busti, da principio quì sopra rammemorata, dalla sua fermezza, dalla sua grossezza, dalla sua concavità, dal non essere organica, ma falsa per non essere tessuta di fibre o canali, si conosce che non era formata dal peritoneo; e però non valevole ad assorbire e trasmettere l' acqua, con impedire che non si raccolga a fare l' idropisia; ma anzi a contenerla e ritenerla per formarla. Dunque saccata era l' idropisia di questo Infermo. Rotto dov' è minore la resistenza, o dove più forte è diretto il colpo, e squarciato il sacco per la violenta concussione o contusione nel cadere dall' alto in duro pavimento, l' umore che conteneva si spande in attimo, si sparge e diffonde fra gli spazj del ventre: incontra dovunque all' alto al basso, all' interno, al davanti al di dietro il peritoneo: che è quanto dire incontra pori o vene a milioni, dove s' intrude forzato dalla contrazione dei muscoli e dalla alterna pressione del diaframma; e passa al giro comun degli umori per separarsi ben presto dai reni, e sortire per la via natural delle urine. Saccata pur era la idropisia ricordata dal Goezio, così significando quelle parole Tedesche *es platzte ettvvas*, che indicano un senso di crepatura o di scoppio interno nel cader della Donna. Saccate è da credere che fossero le altre due dell' Alberti, e del Penada per tali essendo state definite da questi dottissimi Uomini, certo non senza qualche grave ragiogione da essi non indicata. Così è da credere che fosse saccata nella Donna di sopra in secondo luogo rammemorata, benchè da me interrogata, affermasse di non avere sentito internamente scoppio veruno nell' atto del cadere. E così saccate si dovranno credere le altre che non si sanno, che sono come queste fortunatamente guarite col solo cadere dall' alto: appunto perchè in tal guisa sono guarite, del tutto incompetente ad altro genere d' idropisia.

Non si sa come questi sacchi cotanto fermi e duri nella loro membrana, e cotanto ampj dentro il corpo nostro si formino. Vuolsi communemente che questo sia un gioco de' vasi linfatici, rotti e stillanti nella ascite non saccata, a poco a poco dilatati e non rotti a far la saccata. Non pare però che questi siano l' ordinaria cagione della idropisia saccata o non saccata. In primo luogo perchè si vede che l' omento (dotato esso pure di parecchi vasi linfatici) al caso della operazione dell' ernie incarcerate, a gran pezzi si taglia prima di riporlo nel ventre, senza che in tal caso segua la idropisia, come dovrebbe necessariamente succedere. Questo certo non si teme dai Chirurghi; nè si vede a succedere giammai. Il Benevoli parlando di cotale operazione, la condanna come quella che è, secondo lui, sempre perigliosa della vita; o almeno espone gli ammalati al pericolo della recidiva: non parla del danno per la susseguente idropisia. In secondo luogo le tenui tonache de' vasi linfatici non pare che si possano dilatare a fare gran sacchi, i quali arrivino a formare la saccata idropisia, senza rompersi e squarciarsi. Questi sacchi si veggono ne' cadaveri essere non del tutto isolati, ma attaccati in qualche sito al peritoneo, o alle interne viscere del ventre. Da un sottile picciuolo ricevono dalla parte dove sono appesi il loro nutrimento, onde crescere a tanta capacità; come veggiamo da un sottile picciuolo crescere le zucche ad enorme grandezza. La densità e fermezza del sacco proviene dalla deposizione degli umori contenuti e stagnanti, i quali più o meno sono sempre pieni di parti nutritive e gelatinose. Come veggiamo nel sangue tratto dalle vene, che spesso anche nei più sani sotto degli occhi in breve ora si ricopre di una ferma e densa membrana, la quale malamente si tiene per un pessimo argomento di una infiammazione che ricerca pronte e replicate missioni di sangue sino a svenirne gli ammalati; quando i nostri antichi Maestri la tenevano anzi per segno di un' abbondante pituita, che vieta l' uso del salasso. L' attento e rinomato Baglivi è il solo Autore moderno che nelle stesse infiammazioni di petto più temeva, quando il sangue tratto dalle vene non era ricoperto di questa membrana, che quando la mostrava densissima.

Per lo più nascono le idropisie per ostruzioni di viscere, che fanno delle pressioni insolite nei canali sanguigni, per cui il corso del sangue è sforzato a dirigersi con maggiore forza e quantità di quanto possano portare, in certe diramazioni più libere e meno oppresse. Questo è un fonte perenne, che fa raccolte di umori o in chiusi sacchi, o sparsi nella cavità del ventre. Noto è un esperimento del Lowero, che legata la vena cava, si gonfiano le parti che ad essa il sangue tramandavano, e nella stessa cavità del ventre si raccoglie molta sierosità. Nel modo medesimo una pressione su grosse vene nel basso ventre può formare una idropisia, che si toglie con le piccole e spesse cavate di sangue. Questa spezie d' idropisia ho io pochi anni sono veduta e conosciuta in una Donna attempata, non ancora priva dei consueti mensuali ripurgamenti. Gonfiossi questa a poco a poco in tutto il ventre a segno di essere creduta gravida in dodici mesi. Aveva non ostante questo ventre mostruoso, buon colorito e buon aspetto di sanità, ed era pronta ed agile, senza gonfiezza di gambe, o di altra parte. Avea provato indarno, anzi con danno, per il corso di tre anni i più forti usitati presidj dell' arte. Venuta in questo stato quì in Verona, ebbe a me ricorso. Le ordinai che ogni altro mese si lasciasse trar sangue dai vasi emorroidali, e che usasse di tratto in tratto qualche poco di estratto di cicuta incorporato col riobarbaro. Con questa cura di mese in mese conoscevasi diminuito il volume del ventre, benchè non succedessero straordinarie separazioni per secesso, nè per urina, e fra lo spazio di due in tre anni tutta la gonfiezza svanì, e trovasi al presente perfettamente guarita. Non era saccata questa idropisia: e però agevolato il corso degli umori, e tolta la densità del sangue, gli umori stagnanti e travasati hanno avuto campo di assorbirsi in giro, e d' escire per le naturali ordinarie vie e separazioni del corpo. Ajutando a tal fine il solleticare blandamente le fibre con la cicuta e col riobarbaro.

Per le numerose sezioni de' cadaveri che al dì d' oggi si hanno, si fa manifesto essere molto spesso, se non il più delle volte, saccata la idropisia ascite, di quanto sia la non saccata addominale. Importa moltissimo il distinguere una dall' altra questa spezie, perchè il confonderla ha dato occasione a molte liti sul modo più conveniente di curarla. Altri per cagion di esempio fra Autori rinomati ricordano con enfasi, che debbasi l' ascite curare con rimedj di poca forza a lungo adoperati: altri con eguale energia esagerano la necessità di dar presto mano ai più vigorosi ed attivi, trattandosi di un male sempre ostinato e ribelle. Così fra i primi parla Francesco le Boe Silvio al proposito della idropisia in un' Opera scritta da lui negli ultimi anni della sua vita, e pubblicata dallo Schradero: *Esto igitur in arte medica regula universalis et aurea = semper blande et lente procedendum in omni cura Ægrotorum; rite ac secundum rationem sanam experientiae indubitatae innitentem instituenda.* Al contrario fra i secondi il non meno accreditato Valesco di Taranto scrive al libro quinto del suo Filonio: *Summatim: nunquam credendum est ascitem lenibus posse curari auxiliis.* Per verità a me stesso è riuscito due volte di vedere stabilmente sanata la idropisia: una colla semplice infusione del legno sassofrasso per la via del sudore in tempo di estate. L' altra col semplice decotto di miglio detto di S. Ambrogio, per la via delle urine. Al contrario due altre volte ho veduto resistere il male a dosi moderate di scilla marina, e cedere prontamente a dosi per errore smodate. Fui chiamato alla cura di un Uomo enormemente gonfio nel ventre, col resto del corpo rifinito e scarnato. Gli prescrissi l' uso del vino scillitico, ma indarno e con danno. Lasciai l' uomo moribondo e consunto al suo destino. Poco dopo mi si fa incontro quest' uomo tra via, avente il ventre non più enfiato, ma nella persona ancor tabido. Lo pregai a dirmi come era migliorato e guarito dalla idropisia. Mi rispose, che non avendo egli più modo di sostenersi in vita perchè non poteva lavorare, da disperato volle o guarire o finir di vivere: Che raddoppiò con quest'animo la quantità del vino scillitico da me prescritto, sino a pisciar vivo sangue per alquanti giorni. Dopo de' quali seguì in gran copia l' urina, di giorno in giorno cedendo la gonfiezza del ventre. Poco fa l' uomo era ancora in vita dopo venti e più anni passati. Son chiamato alla cura di una giovane Donna ortopnoica, la quale avea il ventre gonfio oltre modo, e gonfia tutta la circonferenza del corpo. Le prescrivo uno scrupolo di scilla marina preparata in sostanza, unitamente a due scrupoli di nitro purificato, con ordinare questa dose divisa in otto parti da servirsene di una parte due o tre volte in un giorno. Il disattento Spiziere non divide la dose, e tutta intiera la ingolla l' Inferma. Poche ore dopo con grande istanza son ricercato a visitarla. La trovo affannata con ambasce di morte, addolorata, convulsa, con brugiore d' urina sanguinolenta, con mordacissima dissenteria, ed altri segni di essere attossicata. Domando di vedere il restante delle polveri ordinate: mi si risponde che una sola ne ha portato lo Spiziale. Chiamato lo Spiziale, confessa l' inavvertenza di dividere il rimedio. Prescrivo immediatamente copiose bevande di olio di mandorle dolci, di siero di latte, di acqua d' orzo, ricordando alla Inferma la necessità di non cessare a costo della vi-

vita di bere spessissimo e in gran quantità. Vi volle una settimana intiera a mettere in calma l' Inferma; nel qual tempo non ebbesi campo di pensare alla idropisia. Finito questo tempo, tutta era svanita la idropisia, e fu sana l' inferma, e tale si mantiene son dodici anni passati. Ecco qui attossicata una donna per uno scrupolo di scilla in sostanza. Il Quarino, nelle sue osservazioni Pratiche, dice che somministrata a soli grani dieci fu micidiale. ,, Il Meadio, dic' egli, ,, vuole che si somministri a grani dieci; ma vidi indi susseguentemente il vomito, dolori crudeli dell' addome, e finalmente la morte stessa. Nei cadaveri si scoprivano i reni illesi, ma il ventricolo e gl' intestini infiammati e guasti dalla cangrena. ,, Non è però vero che il Meadio ne abbia fissata la dose a grani dieci, ma determinolla a soli grani cinque o sei. La ragion principale, per cui il Medico si debba determinare nella cura della idropisia ascite a prescrivere i più attivi medicamenti o i più moderati, si deve prendere dall' essere o no saccata la idropisia. Quando non è saccata, se le forze il permettano, si devono usare i medicamenti più attivi e penetranti, essendo in questa a portata l' umore spanto nel ventre di poter essere riassorbito, o per le fibre solleticate a muoversi, o per la vacuità cagionata nelle vene, che dentro lo tiri. Nella saccata senza utilità questi si adoprano; che l' umore insaccato non è a portata di rientrare nel sangue, e intanto con aggravio si espongono gl' infermi al danno che nelle viscere per se stessi portano i rimedj piccanti ed attivi. Qui è dove son da imitare con prudenza le tracce suggerite dai fortunati casi di guarigioni succedute dal cadere dall' alto. E le pressioni sul ventre, e le percosse, e gli sforzati lavori, e le violenti fatiche, ed il correre ed il saltare, e gli altri esercizj ricordati dagli Autori son da porre in opera, per rompere se è possibile il sacco; onde la materia che contiene travasata, si riconcentri per il peritoneo. A questo salutare effetto sono da riferirsi i molti esempj che si leggono negli Scrittori d' idropipisie guarite col cavalcare, col viaggiare in carrozza, e sin col ridere smodatamente, e son notate dall' Ollerio, dal Morgagni, e da altri molti. Pasquale Vetere Medico Napoletano pochi anni sono ha dato fuori un libro, intitolato: *Saggio sopra un nuovo, facile e sicuro metodo di curare colle percosse di una tagliente scure le grandi e ostinate ostruzioni delle viscere addominali, e tutte le sue conseguenze.* Troppa correlazione ha questa Opera con l' argomento che quì trattiamo, che però merita di essere un poco attentamente considerata e discussa: stantechè esalta egli il suo metodo anche per la cura della idropisia, o ascite che sia, o pur anche timpanitide. Conviene, dic'egli, avere opportuni gli strumenti per eseguire l' operazione. Il taglio della scure deve essere acuto e sottile e perpendicolare al suo collo: gli angoli tondi ed ottusi; acciocchè ne' varj moti della medesima non incidano essi la cute. Il martello per battere la cervice della scure sia di ferro, onde le percosse riescano più pronte e più celeri. Venendo alla pratica del metodo: situato il malato supino nel letto con le ginocchia alzate, si applichi una carta da stampa, o della tela fina sul viscere ostrutto; e appoggiandovi sopra il taglio della scure, si batta dolcemente sul capo di essa con un martello di mediocre grandezza. Si continueranno le percosse almeno sino a dugento, portando frattanto sopra tutti i punti del viscere infermo la scure, e sul rimanente dell'addome, particolarmente quando il male è accompagnato da ascite o timpanitide: Conviene ripetere ogni mattina le percosse. Fra pochi giorni aumentata la orina, o aperto il ventre, si dilegua la idropisia, e si disciolgono le ostruzioni.

Questo metodo di cura non è nuovo, leggendosi nel Cardano, nel Sennerto, ed in altri Scrittori riferito. Ecco qual referimento, e qual giudizio fa di esso l' eccellente Chirurgo Fabrizio d' Acquapendente. „ Era una volta quì in „ Padova un tale di qualche rinomanza che professava una „ Chirurgia della milza, o il taglio della milza: qual Chi-

„ rurgia era da lui chiamata il tagliar della milza, o il
„ taglio della milza. Questi posta una carta sopra la milza
„ indurita, e sopra essa messo il taglio di una scure, con
„ un martello percuoteva fortemente l' accetta; e così li-
„ cenziava i pazienti come guariti, e questo modo di medi-
„ care era divulgato in modo tale, che il Signor Cesare
„ Guagnio Piacentino, ora mio amatissimo Ascoltante, che
„ avea indurita la milza, venne da me, e disse di volersi
„ portare ad un Uomo che tagliasse la sua milza; quale io
„ appena con molte parole e ragioni potei ritrarre dalla sua
„ opinione. Finalmente avvenne una volta che il taglio del-
„ la accetta sotto ad una percossa più forte con un sol colpo
„ tagliò e la carta e la pancia e la milza, con morte dell'
„ istesso paziente. Ed io so essere stato quì in Padova un
„ Medico che si sforzava di render probabile questa Chirur-
„ gia di tagliar la milza: quale però come incontinente, e
„ stravagante non ho mai voluto sentire; perchè per opinio-
„ ne di Aristotile: *l' investigar opinioni pazze è pazzia.* "
Sin quì Fabrizio. Aggiungo io che non solo per colpo errato può nuocere questa operazione; ma altresì nelle spesse e replicate percosse volute dal Medico Napoletano, può cagionare più presto una micidiale cangrena, di quello che sia una pronta e facile risoluzione del tumore indurito. Tanto però non è da temersi in una idropisia ascite; dove le acque interne servono di difesa, perchè le interne viscere non risentano i tristi effetti delle spesse percosse. Può dunque questa operazione aver luogo nelle idropisie, piuttosto che nella esorbitante milza ostrutta. Se non che nol credo io già tanto utile a rompere il sacco, quanto lo può essere in un forte colpo solo, come vedesi e provasi in una caduta dall' alto, il quale non essendo di tagliente scure, ma di corpo ottuso, non è per se stesso tanto imprudente, e periglioso alla vita. Che impedisce, e qual danno grave recar puote, imitando l' urto e la scossa di una improvvisa caduta, il dar forte col pugno nel sito più elevato del ventre,

o urtare a posta sull' angolo di un tavolino, procurando con ciò di squarciare il sacco che contiene le acque ? dissi imitando, perchè lo spingere un ammalato di questa sorte a segno di farlo cadere dall' alto per terra non è cauto e prudente, potendosi l' urto maggiore ad altra parte diriggere, e guadagnare invece del sollievo dalla idropisia, una sempre perigliosa contusione alla testa, un dislocamento o frangimento facile delle ossa del braccio o del femore, con peggior danno dell' ammalato, e con infamia del Medico. Che altro fanno i Chirurghi per la cura dei ganglj, che sono tumori di forte tonaca vestiti, indolenti, contenenti una materia trasparente, vischiosa e fredda, non atta a suppurare. Era quì un Prete, che avea nome Fedele, al quale era cresciuto sul gomito del destro braccio un tumore, contro cui s' era adoperata l' arte dei più esperti Chirurghi senza riuscimento. Avendo io rilevato essere questo della natura dei ganglj, gli feci coraggio a dar forte il gomito su d' un tavolino per farlo scoppiare. Così fece il Prete arditamente; ed il dì dopo venne da me travagliato, per essersegli dopo la percossa enfiato enormemente il braccio e la mano. Trovai svanito il tumore, e lo assicurai che in pochi giorni tutta la gonfiezza sarebbesi dileguata coll' ajuto di blande fregagioni. Così avvenne infatti, ed in attimo guarì il Prete da un antico incomodo, che gli avea tolto l' uso libero del braccio. Nelle tavole dell' Eistero si rappresentano infermi di questi ganglj, che d' ordinario vengono nelle mani, con martelli o cunei per rompere le dure tonache che l' investono. Qualche simile ordigno si potria inventare, che fosse opportuno al caso della nostra idropisia. Molti Autori, prima ancora di Cornelio Celso, per quanto egli riferisce, a questo fine adoperavano delle vesciche enfiate di molta aria, con le quali battere e flagellare il ventre degli idropici. Ma questa pratica non pare bastante a frangere le dure tonache del sacco che le acque contiene: bensì potria bastare in altra specie di idropisia detta vescicolare, ben nota agli stessi an-

antichi Medici, dove si ha a fare con sottili membrane facili a frangersi. Nel caso nostro un più forte colpo solo, diretto che sia con osservanza alla parte più rialzata, non può recare alcun grave pregiudizio, benchè oggi e domani si dovesse replicare il tentativo, sino ad ottenerne il salutare desiderato effetto. *Nihil interest an satis tutum praesidium sit quod unicum est:* direbbe quì lo stesso Cornelio Celso.

Ma sento a dirmi che questo metodo di cura non è l'unico che si possa adoperare; mentre con minor pericolo può ottenersi il medesimo effetto di liberare dalle sue acque un idropico con la operazione Chirurgica detta la *paracentesi*. Anzi con questa operazione non solo s' ottiene la sortita delle acque dal loro nido o sacco che le contengono, ma ben anche nel tempo stesso da tutto il corpo fuori si traggono; quando con la percossa rotto il sacco, dentro si spandono e si ritengono. A questa opposizione tanto ben fondata e ragionevole non so io cosa altro rispondere, se non che la pratica osservazione vi contraria evidentemente. Si vede per replicata esperienza che non seguono all' uso della paracentesi que' vantaggi, che d' ordinario e quasi sempre si son veduti succedere alla percussione che arrivi a squarciare internamente il sacco, benchè l' umore che n' esce si ritenga sparso nel ventre. Di tutti gl' idropici da me e da diversi altri Autori quì sopra rammemorati, si legge che sono dopo la caduta dall' alto guariti e stabilmente guariti. Per la paracentesi al contrario pur troppo tutti sanno, che tutti migliorano gli ammalati, ma pochissimi sono quelli che presto non tornino a gonfiarsi peggio di prima. E segnatamente parlando della idropisia saccata, quel Du Verney che pur si vanta di aver nel corso di tre anni guariti più di venti idropici con la paracentesi, dovette pur confessare che per essa muojono tutti gli infermi di saccata idropisia. Il fatto è raccontato con paura dal Morgagni nel suo libro *de sedibus & causis morborum* all' epistola 38. *Certe autem junior Verneyus, Chirurgus, si quis alius, in paracentesi exercitatissimus, di-*

serte negat , se ullam , quae saccato hydrope teneretur, vidisse sanatam ; quin plures , quae satis bene valentes , nullaque alia , nisi onerosi ventris , molestia pressae , cum ab hac per eductam aquam liberare se vellent , brevi , ait , periisse , diu caeteroquin , imo interdum diutissime, ut saepe indicata exempla ostendunt , victuras . Ond' è ch' egli pure il Morgagni , all' epistola 65. nella saccata idropisia altro ajuto non spera che dalla natura , e dal cadere dall' alto . *Igitur saccati hydropis non alia prudentius curatio laudari posse videtur , quam probata alias a nobis , palliativa . Sic enim saepius , & paucioribus quidem , levioribusque cum incommodis vivere diutius , multosque ad annos potuerunt aegrotantes ; quin etiam casu & natura opitulante , nonnunquam sanari .* Dovendosi pure qualche ragion addurre perchè la paracentesi non giovi nella saccata idropisia , nella quale pure a giovar vedesi la caduta dall'alto , vaglia quanto sa valere, altra miglior ragion non trovo che incolpar l' aria esterna , che nella paracentesi s' intrude a dar guasto al restante degli umori morbosi , e a sfraccellare e putrefare col sacco che li conteneva , le viscere interne , alla quale non s' apre l' adito col cadere dall' alto . E' noto che l' aria esterna è necessaria onde avvenga la putrefazione de' corpi . Corpi morti durano incorrotti nel ventre delle donne per molti anni se il loro utero si sia conservato pertinacemente chiuso. Qualora l' utero fu aperto nel parto , se vi rimanga una porzion di placenta , questa in pochi giorni marcisce e mena un fetore intollerabile .

Siccôme a nulla giovano i rimedj , anzi sono dannosi , quando è saccata la idropisia ; e siccome a nulla giova il percuötere il ventre quando la idropisia non è saccata ; così molto importa il distinguere una dall' altra queste due spezie d' idropisia , le quali avendo molti segni comuni , dal solo confronto di molti di essi bisogna pescare la loro diversa natura . Credesi comunemente e si tiene che il più sicuro segno distintivo sia la fluttuazione dell' acqua ; che manca nella saccata, e sempre si rileva in quella che non è saccata. Ma questo è un segno dubbio, che solo può valere nel primo corso del male, che quando è inoltrata la tumefazione del ventre, attentamente ricercato, tanto appare nella saccata che nella non saccata. Li caratteri veri e più perpetui della saccata sono il tardo crescere del male, lo stare esso ristretto nel solo ventre per molti anni, senza passare a gonfiare i piedi, il volto, le mani degli infermi, e senza bruttare di un giallo pallore il lor volto, oltre il peso del ventre alquanto molesto col crescer degli anni, nulla turbando l' appetito, la nutrizione del corpo, le forze ed il respiro degli ammalati. Nel primo tempo non occupa il tumore tutto il ventre, nè muta di sito nel rivolgere il corpo, ma sta fitto in una parte sola, dove sentesi ritondo e circoscritto. I rimedj purgativi e diuretici che dal principio e in dosi convenienti adoperati giovano nella non saccata, nella saccata si provano sempre inutili, e quanto più attivi, viemaggiormente importuni e nocevoli. Piacemi quì di ricordare un altro segno distintivo delle due spezie d' idropisia, di cui quì tratto, non trovandolo osservato e riferito dagli Autori. Un argomento non dubbio d' idropisia non saccata è che nel formarsi e crescere del morbo, le urine negli ammalati scorrano in sufficiente quantità, se non copiose. Nella saccata sin dal principio le urine sono scarse. La ragione di questo fatto si deduce dalla enunziata facoltà che ha il peritoneo di assorbire dagli spazj del ventre la sierosità che dalle viscere trascola. Quando però per le ragioni varie che formano la idropisia, si trova in questa una sufficiente quantità di urina, è segno evidente che a misura che si spande l' acqua nel ventre, viene anche in buona parte assorbita, e portata alle vie dell' urina. Nella saccata non opera il peritoneo, e le urine sono scarse.

Injucundum aspectu vitium, & toleratu difficile, ab ipso enim perpauci liberantur: idque felicitate quadam potius, quam artis auxilio. Araeteus.

SAGGIO ANALITICO

Principalmente diretto ad ampliare gli usi di quella Formola chiamata

IL BINOMIO DI NEWTON

Di Pietro Ferroni

Ricevuto il dì 13. *Agosto* 1801.

Fino del 1792, tanto nella mia Opera su quella parte di Calcolo integrale, che dipende dalla rettificazione delle Sezioni Coniche, quanto nella Lettera pubblicata a pag. 319. e segg. del Tomo VII.° di questa Raccolta di Memorie Fisico-Matematiche, e forse anco altrove, annunziai più volte un mio Trattatello (*a*), nel quale venivano esposte diverse applicazioni ad alcune scoperte, di cui si è arricchita modernamente l' Analisi, della celebre Formola Newtoniana per l' elevazione d' un Polinomio a delle Potenze di qualunque grado o perfette o imperfette. Mi pareva così d' estender non solo il dominio di quella Formola ad altri casi non contemplati da me quando feci di ragion pubblica il mio primo lavoro Algebraico nel 1782, per non accrescerne troppo il volume, ma di richiamare eziandio l' attenzion de' Geometri a veder derivate dalla sorgente medesima semplice e pura alcu-

---

(*a*) Vedasi soprattutto citato, ma sotto il titolo di *Diporto Analitico* analogo all' altro di „ Diporto Geometrico „ ossia *Oblectamentum Geometricum* stampato due volte dal celebre Vincenzo Viviani, nelle „ Meditazioni Analitiche intorno alla Formola $S\,dx(-lx)^{\pm\frac{1}{2}}$ „, e precisamente nei luoghi citati alla nota (*a*) della prima pagina della *Lettera* surriferita.

alcune espressioni di Calcolo, che dopo dell' epoca sopraccitata da differenti fonti hanno attinto i più valorosi Analisti del secolo. Se è vero che fra i meriti delle Scienze siavi ancor quello di ridurre le verità troppo sparse a pochi fondamentali principj, mercè dei quali e si spieghino più facilmente e si stringano sempre più i loro necessarj rapporti, sarà a chicchessia manifesto di quanta importanza egli fosse compendiar tutta l' Algebra sopra di questo modello, di cui intendo adesso di dare unicamente un saggio per mio diletto, senza mai pretender però di farmi giudice in nessun conto nè del pregio degli altrui ritrovati, nè tampoco delle strade più o meno lunghe, che abbiano seguitate i rispettivi inventori a fine di giugnere al conseguimento di essi. Anzi non averci ancora pensato di palesare ai dotti le mie presenti ricerche se leggendo i due Tomi *XL.* e *XLI.°* del *Giornale di Rozier ec.* io non avessi incontrato quanto peso accordi l'Ab. Bossut, uno dei primi Algebristi d' Europa, alla mia maniera di dedurre col solo soccorso del Binomio di Newton l' integrale *logaritmico*, da me stampata dieci anni prima di lui siccome è facile di riscontrare da una Memoria, che presto verrà a pubblicarsi o nella continuazione di quel *Giornale*, procurata oggi-giorno alla Repubblica delle Lettere dal Ch. de La Métherie, o in qualche altro Foglio periodico (*a*).

1. Avanti del 1782. nelle *Lezioni di Calcolo differenziale e integrale* dell' Illustre Cousin (*b*) erasi dopo di altri notata e da lui dimostrata prima di tutti (per quanto io sappia) col Calcolo de' finiti una maniera diversa da quella solita Newtoniana per isviluppar le Potenze, ed è la seguente

(1

(*a*) E' intitolata *Observations sur le Dénouement d'une espèce de Paradoxe dans la regle fondamentale du Calcul Intégral* „ *dont on peut voir le Tome XL. de ce Journal* (p. 467-469) *Juin*, *M. DCC. XCII. et suivv.*

(*b*) *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral* etc. *À Paris* etc. *M. DCC. LXXVII.* etc. *Premiere Partie. Chap. IV.* „ Des principaux usages du Calcul Différentiel „ alla pag. 122. *Je remarquerai encore* etc. nel §. 36.

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{m(m+1)}{1 \,.\, 2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \&c.$$

Questa si mostra differentissima ancora nella sua forma dall' altra da me spiegata onde far nascere dal *Binomio* di Newton le note Serie per le quantità *esponenziali* (*a*), avvegnachè tutte e tre debban essere, come ognun sa, dell' istesso valore.

2. Primieramente mi faccio a dedurla colla massima facilità dal *Binomio*; e chiunque si vorrà prender la pena di paragonare il mio col metodo adoperato da Cousin son d'avviso, ch' abbia forse a concedergli la preferenza. Eccolo in breve

$$(1 + x)^m = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{-m} = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-m} = 1 - \frac{m}{1}\left(\frac{-x}{1+x}\right) + \frac{m(-m-1)}{1 \,.\, 2}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^2 - \frac{m(-m-1)(-m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^3 - \frac{m(-m-1)(-m-2)(-m-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^4$$

$$\&c. = 1 + \frac{m}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{m(m+1)}{1 \,.\, 2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \&c.$$

ed è quanto dire trovata e provata la Formola con una linea di Calcolo (*b*).

3. In

(*a*) Può consultarsi il Cap. *II.* della mia Opera *Magnitudinum Exponentialium* etc. *Theoria, novâ methodo pertractata. Florentiae, M.DCC.LXXXII.* al §. 44. pag. 40. e segg. Anzi anco il rinomatissimo De la Grange nel §. 19. e 22. della Parte 1. della sua *Théorie des Fonctions Analitiques*, pubblicate a Parigi l'anno V. ha seguitato questo stesso mio metodo per isciogliere in Serie gli Esponenziali. (*aggiunta posteriore*).

(*b*) Non avvi dubbio, che per isciogliere $(q + x)^m$ sia lo stesso

3. In secondo luogo vengo a confermare vieppiù e sottoporre anco all' esperimento dell' *equipollenza* la stessa Formola, siccome era il costume dell' elegante Clairaut (*a*), coll' idea spezialmente di cogliere dei nuovi fiori, che suole spesso somministrare l' amenità delle Serie paragonandole infra di loro. Spiegate dunque in due specie di *Triangoli Analitici* ambedue quelle Formole di Newton e Cousin, perocchè la seconda, a cagione di $\left(\frac{x}{1+x}\right)^n = x^n(1+x)^{-n}$, si sviluppa ancor essa colle ordinarie regole del *Binomio*, si vedrà chiara l' Equazione *identica* quì appresso trascritta

$1 +$

---

come sviluppare $q^m\left(1+\frac{x}{q}\right)^m$, ovvero $(1+z)^m$. Ciò si sapeva fin dalla prima scoperta fatta da Newton della *Regola* generale del suo *Binomio*, sebbene trovata per analogìa, e quasi direbbesi *casu non arte*. Bossut, a fine di giugnere alla nuova Formula, ha bisogno d' introdurre un' altra variabile t mediante la sostituzione $x = -\frac{qt}{q+t}$, e poi deve supporre altresì $n = -m$. Io dalle viscere istesse della data espressione analitica ricavo tutta in un colpo la seconda maniera di presentare il *Binomio* a comodo degli Analisti. Quanto poi all' esponente $-m$ si riscontri ciò, che n' ho detto alla pag. *XX* del mio Trattato *De Calculo Integralium Exercitatio Mathematica* etc. *Florentiae*, *M. DCC. XCII.*

(a) *Elémens d'Algebre A Paris*, *M.DCC. XLVI.* „ Quatriéme Partie „ §§. *LIV.* e *LV.*

$$1+mx\begin{array}{l|}-\frac{m}{2}\\+\frac{m^2}{2}\end{array}x^2\begin{array}{l|}+\frac{m}{3}\\-\frac{m^2}{2}\\+\frac{m^3}{6}\end{array}x^3\begin{array}{l|}-\frac{m}{4}\\+\frac{11m^2}{24}\\-\frac{m^3}{4}\\+\frac{m^4}{24}\end{array}x^4\begin{array}{l|}+\frac{m}{5}\\-\frac{5m^2}{12}\\+\frac{7m^3}{24}\\-\frac{m^4}{12}\\+\frac{m^5}{120}\end{array}x^5\ \&c.=1+mx\begin{array}{l|}-m\\+\frac{m}{2}\\+\frac{m^2}{2}\end{array}x^2\begin{array}{l|}+m\\-m\\-m^2\\+\frac{m}{3}\\+\frac{m^2}{2}\\+\frac{m^3}{6}\end{array}x^3\begin{array}{l|}-m\\+\frac{3m}{2}\\+\frac{3m^2}{2}\\-m\\-\frac{3m^2}{2}\\-\frac{m^3}{2}\\+\frac{m}{4}\\+\frac{11m^2}{24}\\+\frac{m^3}{4}\\+\frac{m^4}{24}\end{array}x^4\begin{array}{l|}+m\\-2m\\-2m^2\\+2m\\+3m^2\\+m^3\\-m\\-\frac{11m^2}{6}\\-m^3\\-\frac{m^4}{6}\\+\frac{m}{5}\\+\frac{5m^2}{12}\\+\frac{7m^3}{24}\\+\frac{m^4}{12}\\+\frac{m^5}{120}\end{array}x^5\ \&c.$$

seguendo l' ordine naturale dello scioglimento delle medesime Formole, ed in particolar modo dell' ultima, che agevolmente si conseguisce in virtù dei metodi usati prima della pubblicazione del Calcolo Infinitesimale (*a*).

4. Frattanto dirò quì di passaggio che quantunque nell' anno 1782. io trascurassi di far parola distinta di questa nuova forma, che potea darsi allo sviluppamento del *Binomio* di Newton, contuttociò ognuno conoscerà senza dubbio che non aveva mancato di comprenderla almeno eminentemente fra le molte altre Serie da me pubblicate in quel torno coll' unica guida dell' Algebra Cartesiana. Imperocchè (*b*) oltre d' avere esposta la Serie comune per i Logaritmi Iperbolici o Neperiani, cioè $L(1+x) = \frac{x^1}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}$ &c., passai a ricavare ancor l' altra $L(1+x)$

$$= \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)^1}{1} + \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)^4}{4} + \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)^6}{6} + \&c.,$$

e come la prima nasceva direttamente dalla Formola ordinaria di Newton ridotta ad essere in questo caso speciale $(1+x)^m = 1 + \frac{m x^1}{1} - \frac{m x^2}{2} + \frac{m x^3}{3} - \frac{m x^4}{4} + \frac{m x^5}{5} - \frac{m x^6}{6} + \&c. = 1 +$

mL

(*a*) Svolgere in Serie $\left(\frac{x}{1+x}\right)$ o sivvero $\left(\frac{1}{1+x}\right)$ era noto subito che comparve alla luce la *Logarithmotechnia* comunicata al pubblico da Niccolò Hauffman nel 1668. Ed innalzare questo Infinitinomio alla Potenza del grado n è un caso particolarissimo della Formola Newtoniana, molto semplificato coll' andar del tempo dai due Bernoulli, Moivre &c. &c. (nelle *Phil. Trans.* del 1697., &c.).

(*b*) Capo *III.* dell' Opera poc' anzi citata, §. 108. e pag. 139.

$mL\,(1+x)$, così ragion voleva che la seconda, differente solamente nel *segno* de' termini alterni e nella *base* delle Potenze, che là è x, qui $\frac{x}{1+x}$, derivasse per via diretta nel medesimo caso da $(1+x)^m = 1 + \frac{m\left(\frac{x}{1+x}\right)^{1}}{1} + \frac{m\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2}}{2}$

$$+ \frac{m\left(\frac{x}{1+x}\right)^{3}}{3} + \frac{m\left(\frac{x}{1+x}\right)^{4}}{4} + \frac{m\left(\frac{x}{1+x}\right)^{5}}{5} + \frac{m\left(\frac{x}{1+x}\right)^{6}}{6}$$

+ &c. lo che ad evidenza rimanda alla Fórmola di Cousin. E difatti in null'altro consiste la differenza di composizione o di stile delle due Formole contemplate nel §. 3.° (che come due vocaboli perfettamente sinonimi della Lingua Algebraica sono in sostanza dell' istesso significato) se non se nell'essere i *coefficienti* della seconda pari a quelli dello sviluppo alla Newtoniana di $(1-z)^{-m}$; d' onde appunto n' avviene, che mentre la prima diventa una Serie finita tutte le volte che l' *esponente m* sia qualunque numero intero positivo, l' altra per il contrario si faccia tale nel caso opposto dell' *esponente m* uguale ad un numero intero ma negativo, e perciò sieno di reciproca utilità nell' Analisi. Nè questo dev'essere di maraviglia a chiunque consideri come quell' andamento nuovo di *coefficienti* si promiscui dipoi e si modifichi di tal maniera, atteso lo sviluppamento degli *Infinitinomj* nati dalla sostituzione di $z = \frac{x}{1+x}$, che abbiasi un tutto precisamente d' accordo coll' espressione antica assegnata da Newton, intorno alla quale posto $m = \frac{1}{\infty}$ lavorò Halley avanti di tutti (*a*), e quindi Euler, La Grange e quanti vennero dopo nel lasso di circa un secolo, contato dal primo

---

(a) *Philosophical Transactions* etc. Num. 216. Volume *XIX.* pubblicato nel *M. DC. XCV.*

mo discuopritore fino al 1782., epoca della mia Teorìa su gli *esponenziali*, siccome avrebber potuto lavorare ugualmente sulla Formola di Cousin quando in vece della Newtoniana l' avessero presa di mira. In conseguenza di che senz' adoperare nè Infiniti nè Infinitamente piccoli mi è riuscito di svolgere e dimostrare d' assoluta equipollenza il *Binomio* $(1+x)^m$ nelle tre maniere diverse, che servono a rappresentarlo, cioè

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}x^3+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4}x^4+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}x^5+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}x^6 \text{ \&c.},$$

$$1+m\left(\frac{x}{1+x}\right)+\frac{m(m+1)}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{2\,.\,3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{2\,.\,3\,.\,4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\left(\frac{x}{1+x}\right)^5+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.}\left(\frac{x}{1+x}\right)^6$$

&c., e finalmente

$$1+mL(1+x)+\frac{m^2}{2}\Big(L(1+x)\Big)^2+\frac{m^3}{2\,.\,3}\Big(L(1+x)\Big)^3+\frac{m^4}{2.3.4}\Big(L(1+x)\Big)^4+\frac{m^5}{2.3.4.5.}\Big(L(1+x)\Big)^5+\frac{m^6}{2.3.4.5.6}\Big(L(1+x)\Big)^6 \text{ \&c.},$$

che lo stesso La Grange non giudicò a proposito o non mai ebbe in pensiero di dedurre altrimenti se non copiando i vecchi metodi (*a*), come ho pro-

---

(*a*) Così apparisce dal modo, col quale ha dedotta l' Equazione per Serie-infinita $(1+z)^t = 1 + t\zeta + \frac{t^2\zeta^2}{2} + \frac{t^3\zeta^3}{2\,.\,3} + \frac{t^4\zeta^4}{2.3.4}$ + ec., essendo ζ il Logaritmo iperbolico di $1+z$, nell' ultimo paragrafo 22. a pag. 289. della *Memoria* inserita da lui in fra l altre del Tomo dell' Accademia di Berlino per l' anno 1783. a pag. 279., da cui principia la Dissertazione predetta „ *Sur une méthode particu'iere d approximation et d interpolation*. Il dotto Sig. Burprovato nelle *Meditazioni Analitiche*, di già pronte a vedere la pubblica luce nel Tomo *VIII.°* dell' Accademia delle Scienze di Siena (*a*) .

5. Ma tornando ai due *Triangoli* suddescritti, molte sono le proprietà, di cui godono, e vado solo accennandone le principali. Comincio da quella, a senso mio elegantissima, che mentre nel primo *Triangolo* i numeri delle parti, le quali compongono (escluso 1) i *coefficienti* nelle colonne verticali, seguitan l' ordine *naturale* aritmetico, procedano nel secondo per rapporto alle *potenze omologhe* di x coll' ordine di quei numeri figurati, che si dicono *triangolari* . In oltre non è meno degno d' osservazione che quanto alle linee *omologhe* orizzontali si verifichi sempre in ambedue (dopo 1) la stessa alternativa di *segno*, quando nelle verticali per lo contrario, mentre va replicandosi l' alternativa medesima rispetto al primo, s' alternano in proposito del secondo i segni sì fattamente, come si replicano o si coacervano le unità per comporre la progressione *naturale* de' numeri . Di

---

ja, sommamente lodato a quest' effetto alcuni anni avanti dallo stesso La Grange, ha saputo prima di tutti aprire una nuova strada con soli cinque Problemi ed una Tavola ausiliaria per la ricerca dei Logaritmi e Quantità esponenziali, che ne dipendono, mediante l' uso delle Frazioni *continue* „ Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres depuis l'avénement de Fréderic Guillaume *II.* au Throne. Août 1786. jusqu'à la fin de 1787. A' Berlin, *M. DCC. XCII.* „ nella Classe delle Matematiche a pag. 433. e segg. *Méthode élémentaire et directe pour le calcul numérique des Logarithmes*). Era già conosciuto l' Autore assai vantaggiosamente in conseguenza del suo amenissimo *Cours de Géometrie*, edito nel 1787., in due Tomi.

(*a*) Sono state di già consegnate fino dal 1. Ottobre *M. DCC. XCV.* al meritissimo Presidente Sig. Cav. Mario Bianchi, e si fa sperar che vedranno la pubblica luce avanti la fine di questo Secolo.

Siccome il ms. di questo Saggio *era terminato e spedito nello stess' anno* 1795., *si può riscontrare nel volume indicato dei* Fisiocritici, *fatto di ragion pubblica nel* 1800. *e segnatamente dalla* pag. 1. *a* 103. *incl.* (Nota del Segretario).

più il secondo Triangolo, quando non tengasi conto nè in questo nè in quello della prima linea orizzontale, ha gli eccessi o avanzamenti successivi delle sue colonne verticali composti con una tal Legge, che costano del medesimo numero, ordine e grandezza di parti come le intere colonne verticali corrispondenti del primo, tranne la sola differenza de' *segni*, alterni in questo e tutti costantemente positivi nell' altro. Le diagonali poi o trasversali *omologhe* che debban dirsi (lasciato sempre 1 come falso vertice dei due Triangoli), le quali son rettilinee nel primo e flessilinee nell' altro (*a*), vengono ad esser composte ancor esse del medesimo numero, ordine e grandezza di parti, qualora si contino o si raccolgano i termini ad egual distanza dalle estremità inferiori delle colonne verticali suddette, salva taluna volta la differenza de' *segni*. Potrei quì soggiugnere diverse altre affezioni singolarissime, le quali mostrerebbero insieme e l' eleganza e la fecondità dell' Algebra ogni volta che si compiaccia di paragoni di simil sorte; ma raccontarle sarebbe minutezza soverchia, e tornerà meglio di cedere l' onore della scoperta a chi sull' esempio di Pascal (*b*) avesse diletto di speculare intorno a queste bizzarrìe delle Serie; bastando il già detto per far rilevare come tanti punti di rapprossimazione, convenienza ed analogìa non pareva a pri-

---

(*a*) Simetricamente ordinate quelle *Colonne* orizzontali e verticali, ossia col Compasso alla mano e colla Scala di proporzione in guisa degli Architetti, il *Flessilineo*, di cui quì si parla, ſarebbe sempre parte del perimetro d' un Poligono iscrittibile dentro d' una Parabola Apolloniana. La dimostrazione è d' agevole intendimento.

(*b*) Tomo *V. des Oeuvres de Blaise Pascal. A la Haye*, 1779. e segnatamente „ Traité du Triangle Arithmetique, e l' altro „ Des ordres Numériques „ Difatti l' Autore divide quel suo *Triangolo* in delle Cellule esattamente quadrate, considerando non tanto i *ranghi paralleli* ed i *perpendicolari*, ma eziandio i *diagonali*, e vengon fuori così i Numeri monadici, i naturali, triangolari, piramidali, triangolo - triangolari ec. ec.

prima vista che avessero dovuto aver luogo in due Quadri così varj e difformi, quanto lo sono pur troppo le Formole sviluppate di sopra.

6. Piacque al prelodato La Grange di svolgere parimente lo stesso *Binomio* di Newton $(1 + x)^m$ in una Frazione *continua*, e lo fece da sommo Matematico, com' egli è, servendosi del Calcolo degli Infinitesimi nel Volume dell' *Accademia delle Scienze e Belle-Lettere* di Berlino per il 1776., pubblicato però tre anni dopo (*a*). Io mi son seco lui felicemente incontrato per una strada tanto diversa, quant' è quella dell' Algebra di Cartesio a paragone della moderna, che impiega *Flussioni* e *Fluenti* (*b*). Sennonchè giova osserva-

---

(*a*) Leggasi la Dissertazione eccellente del 18. di Luglio 1776. *Sur l'usage des Fractions continues dans le Calcul Intégral* alla p. 236. del Volume additato, di cui avvenne la stampa nel *M. DCC. LXXIX*, e particolarmente a pag. 248. il §. 9.

(*b*) Nessuno più di Bailly ha messa in miglior veduta la celebre controversia sull' inventore del Calcolo delle *differenze* e del *sommatorio*. Le Note al suo eloquentissimo *Eloge de Leibnitz*, coronato meritamente dalla R. Accademia di Berlino nel 1768., incominciando da quella di Num. 29. e proseguendo fino a tutta la 31.ma, espongono i Documenti più insigni per ben giudicarne; e molti di questi mancavano al Tomo *II.* della „ Storia delle Matematiche „ di Montucla. (*Discours et Mémoires par l'Auteur de l'Histoire de l'Astronomie. Tome premier. A' Paris*, *M. DCC. XC.* pag. 263. e segg). Giovera quì d'osservare come la *Nota* 31.ta esigerebbe qualche piccola variazione I. Dove dice (alla pag. 280.) „ La courbe isochrone est celle par laquelle un corps descendroit sans accélération &c. „ poichè anco in questa Curva, rigorosamente parlando, il corpo, che parte dalla quiete, s' accelera. II. Ove si definisce (med. pag.) „ La brachystochrone „ est la courbe de la plus vîte descente, c'est-à dire celle par laquelle „ un corps descendra plus vîte que s'il „ tomboit le long de la verticale „. Questa ognun vede essere un' erronea definizione; ed anzi fa molta amarezza, che ciò non sia stato avvertito, scrivendolo, da Geometra così grande, quant' era senza niun dubbio l' Autore. Ma rettificare lo sbaglio si rende ancora ben facile sostituendo, in cambio di *le long de la verticale*, la frase *par quel qu'il soit autre chemin entre les deux points donnés, qui ne soient dans la même verticale*.

vare come lo stesso Ch. Autore nel corso della sua bella e profonda Memoria (*a*), dove si fa a confrontare le frazioni nate dallo sviluppamento di $(1 + x)^m$ e $(1 + x)^{-m}$, dia un breve cenno di rimandare per esperimento ossia *a posteriori* alla Serie Newtoniana, quasi non avendo in essa fidanza per adoperarla *a priori*, quando mi pare valevolissima a questo effetto, purchè si segua tutt' altro cammino. Così avverrà che alla triplice Serie, in cui abbiamo di già spiegato il *Binomio*, aggiungasi ancora la quarta, e forse alcun' altra (*b*), usando sempre dell' istesso principio, per mostrarne vieppiù l' utilità e la ricchezza. Tutto si compie col mezzo di semplicissime Equazioni di *condizione*.

7. Cerchisi adunque la frazione *continua*, che sia *identica* per rapporto alla Formola $1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4}x^4 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}x^5 +$ &c.; ed all' oggetto di sciogliere quest' ultima colla massima facilità, si fac-

---

(*a*) Luogo citato dall' Annotazione 16. al §. 21. e pp. 263. 64., nel quale sta scritto „ Ces expressions „ sont exactes, aux quantités pres „ des ordres x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, „ &c., c'est-à-dire qu'elles sont „ exactes jusqu'à la puissance de x „ inclusivement qui sera le produit „ des deux plus hautes puissances „ de x, dans le numérateur et dans „ le dénominateur; c'est de quoi on „ pourra, si l'on veut, se convaincre *a posteriori* en résolvant les fractions precedentes en Séries et les „ comparant avec la Série $1 + mx \mp$ „ $\frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}x^3$ „ + &c. „ .

(*b*) Nell' avanzamento di questo *Saggio* s'incontreranno diverse altre *Frazioni continue*, egualmente adattate a rappresentare il *Binomio*. E poi l'ultimo paragrafo della presente Memoria renderà di per se manifesto, che tutte le forme indicate dal Ch. La Grange, e trovate da lui in seguito del principio avanzato nel §. II. p. 250 della prelodata *Dissertazione* Analitica, si debban dire generate dal paro della stessa Formola Newtoniana.

faccia proposito d' avanzar grado a grado con dei *passi* misurati talmente, che corrispondano in ordine ed in grandezza ad ogni *passo*, per cui procede la Formola Newtoniana secondo l' ordine *naturale* delle *potenze* di x. I primi due *passi* non hanno bisogno di nessuno artifizio analitico come quelli, che son la replica de' due primi termini dello sviluppato *Binomio*, cioè $1 + \frac{mx}{1}$. E quanto al terzo *passo*, che deve seguitare coll' ordine divisato i due precedenti, scrivendolo ipoteticamente $F(x)$, qualunque debb'essere questa *Funzione*, che orora determineremo, vien esso subito suggerito dall' Equazione *condizionale* mx moltiplicato per il secondo termine di $(1+F(x))^{-1} = \frac{m(m-1)}{2} x^2$; nel primo *membro* della quale, sciogliendolo alla Newtoniana, s'attende solo in virtù della ragione premessa a $F(x)$ e non mai alle *potenze* di questa *Funzione*, che superino il primo grado, appunto perchè tutto dipenda in proposito di determinar la *Funzione* da Equazioni del prim'ordine, senza nessun disturbo della *razionalità* della frazione *continua*, e della perfetta *identità* presupposta, lo che lascerò di replicare in appresso. Quindi è che l' Equazione da sciogliersi sia $-mx.F(x) = \frac{m(m-1)x^2}{2}$, ed in conseguenza $F(x) = -(m-1)\frac{x}{2}$; laonde cumulati i tre *passi* già fatti, la *frazione* cercata acquista la forma seguente

$$\cfrac{1+mx}{\cfrac{1-(m-1)\frac{x}{2}}{1}}$$

, qualunque siasi l' *esponente* m (*a*): e questo s' avverte una volta per sempre.

3.

(*a*) Comunque il Sig. Aepinus nel Volume *VIII.* per il *M. DCC. LX-LXI.* degli *Atti nuovi* dell' Imperiale Accademia di Pietroburgo, secondo che ho scritto altrove, gettasse dei dubbj intorno alla deficienza di

8. Procedendo più oltre col medesimo metodo a fine di fare il quarto *passo*, conviene che questo sia di tal sorte da risultarne il quarto termine della Formola Newtoniana, e vale a dire $\frac{m(m-1)(m-2)x^3}{2\,.\,3}$. Pongasi dunque accanto all' ultima unità della frazione *continua* l' incognita $F'(x)$, cosicchè il denominatore estremo diventi $1 + F'(x)$; e sciogliendo prima colla regola solita del *Binomio* $\frac{-(m-1)x}{2} \times (1 + F'(x))^{-1}$, che si converte in $\frac{-(m-1)x}{2} + \frac{(m-1)}{2} x F'(x)$, e poi mediante lo stesso *Binomio* sviluppando $mx\left(1 - \frac{(m-1)}{2} x + \frac{(m-1)}{2} x F'(x)\right)^{-1}$, s' arriva all' Equazione *condizionale*

$$\frac{m(m-1)}{2} F'(x) = \left(\frac{m(m-1)^2}{2\,.\,2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}\right) x,$$

che somministra $F'(x) = \left(\frac{m-1}{2} - \frac{m-2}{3}\right) x = \left(\frac{m+1}{3}\right) \frac{x}{2}$, e rende frattanto noto il *passo*, di cui andavasi in cer-

ca ,

---

va nella più parte de' casi dell' espressione data da Newton, contuttociò mi sembra d' averla generalizzata bastevolmente nel Capitolo *I. Magnitudinum Exponentialium* &c. Merita ancora d' esser veduta per quest' effetto la *Memoria* postuma del Sig. Segner fra quelle dell'Accademia di Berlino del *M.DCC.LXXVII.*, accennata unitamente alla prima nell' *Antelogio* della mia Opera (a *XXXIX.*) del *M. DCC. LXXXXII.*

Nè lo meritano meno *l'Introduction* al *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* stampato a Parigi nel 1797. (tom. 1. §. 15. e segg.) da La Croix, le due Opere d'Hindenburg *Analysis combinatoria Infinitinomii dignitatum historia*, *leges*, *ac formulae*, e finalmente il sublime trattato d' Abrogast: *Du Calcul des Dérivations*, pubblicato a Strasburgo nel 1800., cioè, come i tre precedenti, dopo la trasmissione del Ms. (*Aggiunta spedita nel* 1801.)

ca, $1 + \cfrac{m\,x}{1 - (m-1)\cfrac{x}{2}\cdot\cfrac{1}{1 + \cfrac{(m+1)}{3}\cfrac{x}{2}\cdot\cfrac{}{1}}}$

senza mutar mai principio.

9. Scuopresi il quinto *passo* o sivvero l' altra *Funzione* $F''(x)$ contigua all' ultima unità ponendo mente all' espressione $\frac{(m+1)}{2\,.\,3}\,x \times \left(1 + F''(x)\right)^{-1}$, che in grazia delle cose premesse viene ad essere sciolta in $\frac{(m+1)}{2\,.\,3}\,x - \frac{(m+1)}{2\,.\,3}\,x\,F''(x)$; e riflettendo di più come $-\frac{(m-1)}{2}\,x\left(1 + \frac{(m+1)}{2\,.\,3}\,x - \frac{(m+1)}{2\,.\,3}\,x\,F''(x)\right)^{-1} = -\frac{(m-1)}{2}\,x + \frac{(m-1)}{2}\,\frac{(m+1)}{2\,.\,3}\,x^2 - \frac{(m-1)}{2}\,\frac{(m+1)^2}{2\,.\,3}\,x^3 - \frac{(m-1)}{2}\,\frac{(m+1)}{2\,.\,3}\,x^2\,F''(x)$ non meno, che $m\,x\left(1 - \frac{(m-1)}{2}\,x + \frac{(m-1)}{2}\,\frac{(m+1)}{2\,.\,3}\,x^2 - \frac{(m-1)}{2}\,\frac{(m+1)}{2\,.\,3}\,x^3 - \frac{(m-1)}{2}\,\frac{(m+1)}{2\,.\,3}\,x^2\,F''(x)\right)^{-1}$ porta all' Equazione $\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{2\,.\,3\,.\,4}\,x^4 =$

$$\frac{m(m-1)}{2}\,\frac{(m+1)}{2\,.\,3}\,x^3\,F''(x) \left.\begin{array}{l} + m\,\frac{(m-1)}{2}\,\frac{(m+1)^2}{2\,.\,3} \\ + m\,\frac{(m-1)^2}{2}\,\frac{(m-2)}{3} \\ - m\,\frac{(m-1)^2}{2}\,\frac{(m+1)}{2\,.\,3} \end{array}\right|\,x^4,$$

da questa ne nasce la *condizionale* più semplice $\frac{(m+1)}{2\,.\,3}\,F''(x) =$

$$\frac{(-m^2+m+2)}{2\,.\,2\,.\,3\,.\,3}\,x \text{ ossia } F''(x)=\frac{\dfrac{(m+1)}{2\,.\,3}\,\dfrac{(-m+2)}{2\,.\,3}\,x}{\dfrac{(m+1)}{2\,.\,3}}=-\frac{(m-2)}{3}\,\frac{x}{2},$$

ed avanzasi la frazione *continua* fino al segno di

$$\cfrac{1+mx}{1-(m-1)\cfrac{x}{2}\cfrac{}{1+\cfrac{(m+1)}{3}\,\cfrac{x}{2}\cfrac{}{1-\cfrac{(m-2)}{3}\,\cfrac{x}{2}\cfrac{}{1}}}}$$

10. L' Equazione *condizionale* pe 'l sesto *passo* indicato da $F'''(x)$ dipende dalla medesima guida, di cui fino ad ora abbiamo sperimentata la fedeltà e sicurezza. E che sia così ognun lo vede considerando, che il metodo antecedente conduce per via diretta a $\frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,x^5 =$

$$\frac{m(m-1)}{2}\,\frac{(m-2)}{2\,.\,3}\,\frac{(m+1)}{2\,.\,3}\,x^4\,F'''(x)-\left.\begin{array}{r}\dfrac{m}{4}\,\dfrac{(m-1)}{2}\,\dfrac{(m+1)}{2\,.\,3}\\ -m\,\dfrac{(m-1)^2}{2}\,\dfrac{(m-2)}{3}\,\dfrac{(m+1)}{2\,.\,3}\\ +m\,\dfrac{(m-1)^2}{2}\,\dfrac{(m+1)}{2\,.\,3}\\ +m\,\dfrac{(m-1)}{2}\,\dfrac{(m-2)}{3}\,\dfrac{(m-3)}{4}\end{array}\right|,$$

cioè $\frac{(m-2)}{2\,.\,3}\,\frac{(m+1)}{2\,.\,3}\,F'''(x)=\frac{(m^3+m^2-4m-4)}{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}\,x =$ $\frac{(m-2)}{2\,.\,3}\,\frac{(m+1)}{2\,.\,3\,.}\,\frac{(m+2)}{2\,.\,5}\,x$; dalla quale Equazione risulta $F'''(x)$ $=\frac{(m+2)}{5}\,\frac{x}{2}$, e conseguentemente la frazione *continua* si fa più avanti ed acquista la forma

$$1+\cfrac{mx}{1-\cfrac{(m-1)\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{(m+1)}{3}\,\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{(m-2)}{3}\,\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{(m+2)}{5}\,\frac{x}{2}}{1}}}}}$$

ch' è in tutte le sue parti la stessa di quella insegnata dall' immortale La Grange nel luogo citato .

11. Ora poi chi ha esercizio di Calcolo e non manca della necessaria destrezza per guidar la mente e la mano , ond' escludere nell' elevazione de' *Polinomj* alla *potenza* del grado o *esponente* — 1 tutti quei termini, i quali, come alieni dalla ricerca presente , non debban far parte delle Equazioni di *condizione ,* vede subito in qual modo condursi per conseguire i rimanenti *denominatori* della frazione *continua* fino al segno, cui egli desideri d' inoltrarla , senza ch' io insista di più nello sviluppare il proseguimento di questa Serie coll' intrapreso metodo *didascalico* . Tanto maggiormente perchè siasi oramai renduta visibile la *legge ,* colla quale procedono i termini successivi della Frazione medesima, che consiste sopra di tutto (per non parlar della replica sempre costante dell' *unità*) in tre regole fondamentali ; e sono 1.ª l'alternativa del *segno* de' *coefficienti* di $\frac{x}{2}$; 2.ª i *denominatori* de' medesimi *coefficienti*, che seguitano l' istess' ordine dei Numeri *dispari* replicati 1 , 1 , 3, 3 , 5 , 5 , 7 , 7, &c., 3.ª finalmente i *numeratori* de' *coefficienti* predetti, che , principiando da *m* , scemano e crescono a vicenda di quanto por-

tano grado a grado i Numeri *naturali* 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c. Mercè di questi soccorsi, e massime col secondo, chiaro apparisce come si determinerebbero agevolmente le *Funzioni* consecutive $F^{IV}(x)$, $F^{V}(x)$, $F^{VI}(x)$, &c. e come si prolungherebbe quanto più piacesse la Serie. Così, per esempio, bramando d' aggiugnervi tre *passi* di più, oltre' i già fatti di sopra, verrebbe ad essere

$$(1+x)^m = \cfrac{1+mx}{\cfrac{1-(m-1)\frac{x}{2}}{\cfrac{1+\frac{(m+1)}{3}\,\frac{x}{2}}{\cfrac{1-\frac{(m-2)}{3}\,\frac{x}{2}}{\cfrac{1+\frac{)m+2)}{5}\,\frac{x}{2}}{\cfrac{1-\frac{(m-3)}{5}\,\frac{x}{2}}{\cfrac{1+\frac{(m+3)}{7}\,\frac{x}{2}}{\cfrac{1-\frac{(m-4)}{7}\,\frac{x}{2}}{1+\&c.,}}}}}}}}$$

e sempre col medesim' Ordine in infinito.

12. Anzi non è tampoco difficile cambiar la forma di questa Frazione in un' altra non meno elegante, sebbene non avvertita da La Grange o da lui creduta men degna delle sue riflessioni. Gioverà tuttavia d' accennarla massimamente perchè prende origine immediata da quell' istesso principio, il quale nel §. 3. ha servito di base alla prova della

Formola di Cousin (a); e cade molto in acconcio di presentarlo adesso di nuovo come per invitar gli Algebristi a sperimentarne vieppiù l'efficacia nella dottrina delle Serie-infinite. Riproduco difatto la solita Equazione $(1+x)^m = \frac{1}{(1+x)^{-m}}$, in conseguenza della quale risulta l'altra

$$1+\cfrac{mx}{1-\cfrac{(m-1)\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{(m+1)}{3}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{(m-2)}{3}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{(m+2)}{5}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{(m-3)}{5}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{(m+3)}{7}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{(m-4)}{7}\frac{x}{2}}{1+\text{ec.}}}}}}}}} = \cfrac{1}{1-\cfrac{mx}{1+\cfrac{(m+1)\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{(m-1)}{3}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{(m+2)}{3}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{(m-2)}{5}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{(m+3)}{5}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{(m-3)}{7}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{(m+4)}{7}\frac{x}{2}}{1-\text{ec.}}}}}}}}}}$$

La seconda di queste due Serie gode in sostanza della medesima *legge*, che domina la prima, e sciolta che fosse, rappresenterebbe

$$\frac{1}{1-mx\ \ldots\ldots\ -\ \frac{m(m+1)\,(m+2)\,(m+3)\,(m+4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,x^5\ \text{ec.}}$$

(a) Annunziai questa Formola stessa nella Nota 13. dell' *Antelogium*, il quale precede l' Opera citata *de Calculo Integralium*. Il principio poi non è altro, che una verità conosciutissima dell' Aritmetica letterale, nata insieme col Calcolo degli *esponenti*, e perciò più pregevole, quanto più semplice.

come la prima mentre si sviluppasse, rappresenta $1+mx+\frac{m(m+1)}{2}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{2\,.\,3}x^3+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{2\,.\,3\,.\,4}x^4+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}x^5$ ec., e ci ammaestra la sola Algebra Cartesiana senza di nessuno estranio soccorso che quest' ultime espressioni, per qualunque valore di m (fosse ancora *trascendente* (*a*)) sieno fra di loro *identiche* o equipollenti. E quanto lo spettacolo analitico di quelle Frazioni *continue* si farebb' egli più bello qualora in vece dell' una o dell' altra o di ambedue io mi fermassi a sostituire ora questa, ora quella, che col medesimo metodo decifrato di sopra sorgerebbe naturalmente e dalla Formola di Cousin e dalla Serie *esponenziale* e dalle molte di più, che si potrebbero immaginare (*b*)?

13. Non va tuttavia abbandonato al silenzio il parallelo di quelle due Frazioni *continue*, essendochè malgrado la diversità, che regna nell' arte di combinare coll' *esponente* comune m i numeri della Progressione *naturale* aritmetica, si farà sempre più manifesto come siano nella sola apparenza difformi, ma in realtà conducenti al medesimo scopo. Finisce la prima delle due Serie ogni volta che l' *esponente* m pongasi eguale a qualunque numero intero o positivo o negativo; con tal differenza però, che nel primo caso finisca tanti *passi* appuntino dopo della prima unità ossia capo della medesima Serie, quante unità son comprese in $2m-1$, e nel caso secondo finisca fatto un *passo* di più, e vale a dire dopo *passi* $2m$: cosicchè il numero dei *passi* da farsi per veder terminato il procedere della prima Frazione prenda *legge* in un caso dalla somma de' termini corrispondenti delle due Pro-

---

(*a*) Si getti di nuovo uno sguardo sul Capo *I.* citato nell' Annotazione 6. della pag. 302., e nominatamente dal §. 9. e pag. 5. fino al §. 17.

(*b*) Tanto accenna egualmente la Nota (*b*) pag. 302., e lo suggeriscono gli Elementi del Calcolo dovunque parlino delle *sostituzioni* e delle Serie infinite.

Progressioni *naturali* aritmetiche 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ec.,
e nell' altro dalla somma di 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ec.
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ec.;
cioè sia necessario sempre un passo di più nel caso di m negativo a paragone di m positivo. All' opposto nella seconda delle due Serie per sapere a qual punto ella diventi interrotta o finita (il che accade essendo parimente m eguale ad un numero intero o positivo o negativo), la Frazione si termina sempre con un *passo* di meno quando sia m negativo in confronto di m positivo . E per assegnar questo punto non si fa che ripetere la *legge* precedente, ma inversa, non cominciando a contarla dopo del capo della Serie, ma piuttosto del primo *denominatore* della medesima. La quale armonia di rapporto non poteva certamente mancare subito che si rimonti all' origine di quelle due Frazioni *continue* . Imperocchè quando nello sviluppamento alla Newtoniana di $(1+x)^m$ il *coefficiente* d' un termine s' annullasse mentre $m=n$, seguirebbe l' istesso nello sciogliere altresì $\frac{1}{(1+x)^{-m}}$ qualora $m=-n$, nè deve recare difficoltà quel *passo* di più da farsi nella seconda supposizione per l' osservanza della *legge* generale stabilita di sopra, ben vedendosi che la seconda Formola (quantunque in sostanza non sia *frazionaria*) ha la forma d' una Frazione, il cui numeratore 1 è passato ugualmente nella *continua* come principio della medesima.

14. Pare una specie di *paradosso*, che tanto l' una, quanto l' altra Serie vengano a terminarsi nel doppio caso e di $m=n$ e di $m=-n$, supposto n qualunque de' numeri interi . Dirò della prima, ch' è quella di La Grange, e lo stesso varrà per illuminar la seconda . Come mai nascendo la Frazione, di cui faccio parola, da una *Funzione*, che non ha termine fuori del caso di $m=n$, può questa generarne un' *equipollente*, ch' abbia termine cumulativamente e nel caso di $m=n$, lo che è fuor di dubbio, e nell' opposto di

$m=$

$m = -n$, che dà luogo alla maraviglia? Si crederebbe a prima vista quasi infranta la simiglianza, che sul gran modello della Natura debba esservi sempre fra il generatore ed il generato, o ſarebbe di mestieri riporre nella classe de' mostri questa singolare generazione dell' Algebra. Vediamo di togliere ogni mistero in una Scienza, che ha da essere il tipo della chiarezza, usando del metodo introdotto felicemente da D' Alembert, e chiamato da lui *Metafiſica del Calcolo* (nome però, che senza mirare a Locke e Condillac ci richiamerebbe più presto alle tenebre), fuori del quale viene ad esser l' Analisi un mero istrumento, ingegnoso sì ma servile, e poco degno di occupare la mente dei pensatori moderni. Segno perciò quella medesima traccia, che mi condusse nel *Prodromo*, che può leggersi nel Tomo *V.* di queste *Memorie*, dove all' Articolo *III.* additai per qual causa quell' Equazioni *di condizione*, che somministravano l' integrabilità delle *differenziali* (a), combinassero nella medesima ma forma dell' altre, che davano lo scioglimento dei Problemi di *massimi* e *minimi* (a). Mi faccio dunque a considerare che intanto la Formola di La Grange (ed in conseguenza ancor l' altra) rappresentante $(1+x)^m$ debba avere un periodo limitato nel doppio caso di $m=\pm n$, in quanto che per la sua generalità *analitica* abbia da contenere, atteso l' esponente *m variabile*, i valori di lui positivi e negativi :

(a) Intendo sempre di quelle composte di *variabili* indipendenti fra di loro: conciossiachè ognuno doveva sapere anco avanti di Monge, che la faccenda andasse diversamente qualunque volta vi fossero delle relazioni *date* fra le *variabili* siccome avviene de' Problemi *indeterminati* nell' Algebra di Cartesio. Osservo in questa occasione come Cousin (sopra il modello delle cui *Lezioni* si sono formati alcuni *Corsi* moderni) sia del sentimento medesimo del mio *Prodromo* dove scrive (Chap. V. Par. I § 52. a p. 255. in proposito della *differenziale* $dSMdy$). „ M. Leibnitz a le premier résolu „ ce Problême *dont on a depuis fait* „ *de si heureuses applications*. Quali fossero queste *applicazioni* lo aveva di già detto egli stesso nel suo „ Discours Préliminaire „ alla pag. XIX *La Théorie des Equations de condition dont Nicolas Bernoulli donna les premiers essais dans son Mémoire sur les Trajectoires orthogonales &c.* (nel 1720), ed alla pag. 257. *M. Nicolas Bernoulli fit usage du Théorême de M. Léibnitz pour résoudre le Problême des Trajectoires*. Il Ch. Autore combina egualmente meco (Chap. II. §. 20 a 49. 50. 51. per rapporto al *segno* dell' espressione, che si riferisce al Raggio di *curvatura* o altre Rette, che ne dipendano, scrivendola (a differenza d'altri) $R = \frac{ds^3}{\mp dx\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$; cioè

---

col segno equivoco o doppio, e notando in lettera *le signe + étant pour la courbe concave & le signe — pour la courbe convexe*. Vedasi parimente Bezout *T. IV.* ai §§. 76. 77. pp. 93. e 94. del suo *Cours de Mathématiques*. Questo vuol dire, che mentre fra le cose incognite d' un Problema siavi ancor quella se abbia da esser concava o convessa la Curva verso d'un asse *dato di posizione*, le suddette Formole debbano scriversi e trattarsi in modo da non mai attendere al segno di *ddy*, o piuttosto supporlo sempre equivoco e tacitamente contenuto nel doppio-differenziale medesimo (siccome usai presso il termine del *Prodromo* divisato) per aspettarne in seguito dopo sciolto il Problema la decisione.

(a) E' noto che il primo, cui s' affacciasse questa pellegrina speculazione, fosse Leonardo Euler fino del 1744. Parimente è notissimo come così bella Teoria nascesse prima di tutti sotto del nome di *Problema degli Isoperimetri* dal sommo talento analitico di Giacomo Bernoulli, e servisse di principal motivo polemico onde rompere tra esso lui ed il minor fratello Giovanni non solamente ogni vincolo d'armonia, e parentela, ma eziandio di letteraria e civile decenza. Ciò specialmente rilevasi da un Documento interessante e rarissimo stampato in Basilea nell'anno 1700, e riprodotto di fresco nel 1792. (Ved. *T. XLI.* Settembre del *Giornale di Rozier* a pag. 161-173). Ha il titolo doppio *Jacobi Bernoulli ad Fratrem suum Johannem Epistola = Postscriptum aut altera Epistola*, ed il tempo è espresso così *Dábam Basileae prid. Non. Maii* 1700. Manca nella Raccolta delle Opere Bernoulliane, ed il Sig. Bossut in una *Nota* non può a meno di darne il seguente giudizio. „ On croit qu'elles en ont été exclues par l'influence de Jean Bernoulli, qui n'opposa dans le tems que des injures à des explications modérées et accablantes, et qui n'a jamais pu pardonner à son frère de l'avoir vaincu dans cette fameuse dispute sur la question des isopérimetres „. Quanti esempi di simil tempra disonoran la Storia della Ragione! Ma ben riflette Bailly a questo proposito (l. c. p. 218) „ le flambeau de la raison brûle, détruit tout, excepté la vérité. „

e non è vero che quando subentri il *Binomio* $(1+x)^{-m}$ la Formola Newtoniana non abbia limite, poichè ell'è una Frazione (come lo è quella di La Grange), nella quale il *denominatore* essendo $(1+x)^m$, fa di bisogno che ammetta lo stesso limitato periodo. Così, per esempio, se $m=-2$, il periodo del *Binomio* è $\frac{1}{1+2x+x^2}$; e se $m=-3$, il periodo diventa $\frac{1}{1+3x+3x^2+x^3}$; ec.; come limitati egualmente debbon' essere e sono i periodi dell'*identica* Frazione *continua*, cioè

$$1-\cfrac{2x}{1+\cfrac{\frac{3}{2}x}{1-\cfrac{\frac{1}{6}x}{1+\frac{2}{3}x}}} = 1-\cfrac{2x}{\cfrac{1+2x+x^2}{1+\frac{x}{2}}} = \frac{1}{1+2x+x^2}$$

e

$$1-\cfrac{3x}{1+\cfrac{2x}{1-\cfrac{\frac{x}{3}}{1+\cfrac{\frac{5}{6}x}{1-\cfrac{\frac{x}{10}}{1+\frac{3}{5}x}}}}} = 1-\cfrac{3x}{\cfrac{1+3x+3x^2+x^3}{1+x+\frac{x^2}{3}}} = \frac{1}{1+3x+3x^2+x^3} \text{ ec.:}$$

e si assomigliano in tutto, malgrado che comparissero discrepanti. Si fa oltrediciò manifesto anco il perchè nella stessa Formola assegnata da La Grange la fine d'ogni periodo relativo ai casi di *m* positivo anticipi sempre d' un *passo* quella di *m* negativo, come abbiamo osservato nel §. precedente; non potendo accadere diversamente, poichè quando una *Frazione continua* pareggia o per dir meglio s' identifica col *Polinomio* $1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 +$ ec., deve di necessità posticipare d'un *passo* onde agguagliarsi all'inverso ossia a $\frac{1}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + \text{ec.}}$, siccome insegnano i Rudimenti del Calcolo.

15. Avanti di terminare il paragone delle due Serie non sarà discaro ai Geometri in proposito di Frazioni *continue* raddoppiar con usura il raro esempio di quelle pubblicate da Wallis colla debol prova d' *analogia*, dopo della prima scoperta fattane da Lord Brouncker (che non si sa come le indovinasse (*a*)), e quindi molto promosse dal meritissimo Leonardo Euler quando applicò il Calcolo *Integrale* alla ricerca della somma delle serie infinite, e spezialmente delle dipendenti dall' Equazione famosa di Jacopo Riccati ed altre consimili (*b*). E vaglia il vero se, posta la grandezza *x* di

---

(*a*) Udiamolo dalla bocca stessa di Leonardo Euler. *Qua autem via Brounckerus in hanc expressionem inciderit, non constat, atque merito foret dolendum si ejus methodus periisset, cum non sit dubitandum, quin eâdem methodo plura præclara in hoc genere exhiberi possent* (*T. IX.* degli Atti vecchi dell' Accademia di S.^{t} Pétersbourg = *De Fractionibus continuis Dissertatio* &c. alla pag. 101.)

(*b*) Tomo IX. e *Dissertazione* citata nella *Nota* antecedente dal §. 28. e pag. 129. fino al §. 34. e pag. 135. Egli si riferisce all' anno 1737., ma vide solo nel 1744. la pubblica luce. Fin di quest' *Epoca* l' Equazione Riccaziana si deve dire integrata coll' uso delle Frazioni *continue*, non essendo stato, come alcuni moderni han supposto (ved. *Observations sur le Dénouement* &c. additate nell' Annotazione 3.ª) il primo a farlo Bezout nella Parte IV. del suo *Corso* stampata del 1770, dove dà gli *Elémens de Calcul intégral*, e segnatamente al §. 171. e pp. 219. 20. e 21. Del rimanente quella Formola *differenziale*, proposta agli Analisti dal Ch. Autore nel 1720, ha recato gran lustro all' Italia. Di quella aveva di già parlato con molto elogio Euler seniore nel Vol. *VI.* dei *Commentarj* antichi dell' Accademia di Pietroburgo per gli anni 173 $\frac{2}{3}$, pubblicato nel 1738.

qualunque valore, il Geometra Inglese additò l' Equazione

$$\left((x-1)+\cfrac{1}{2(x-1)+\cfrac{3^2}{2(x-1)+\cfrac{5^2}{2(x-1)+\cfrac{7^2}{2(x-1)+\cfrac{9^2}{\&c.}}}}}\right)\times\left((x+1)+\cfrac{1}{2(x+1)+\cfrac{3^2}{2(x+1)+\cfrac{5^2}{2(x+1)+\cfrac{7^2}{2(x+1)+\cfrac{9^2}{\&c.}}}}}\right)=x^2,$$

di quanto maggior pregio a confronto della Wallisiana comparir deve all' occhio d' un Analista l' altra Equazione

$$\left(1+\cfrac{mx}{1-\cfrac{(m-1)\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{(m+1)}{3}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{(m-2)}{3}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{(m+2)}{5}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{(m-3)}{5}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{(m+3)}{7}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{(m-4)}{7}\frac{x}{2}}{\&c.}}}}}}}}\right)\times\left(1-\cfrac{mx}{1+\cfrac{(m+1)\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{(m-1)}{3}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{(m+2)}{3}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{(m-2)}{5}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{(m+3)}{5}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{(m-3)}{7}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{(m+4)}{7}\frac{x}{2}}{\&c.}}}}}}}}\right)=1,$$

nel-

„ *Constructio Aequationis differentialis &c.* „ a 231., nè dubita punto (§. 2. p. 232) d' assegnarla al suo vero inventore quando dice „ *quam Cl. Comes Riccati primum Geometris examinandam proposuit*. „ Chi aggradisse di seguitarne cronologicamente la storia consulti il T. *VIII.* de' *Supplementi* degli Atti di Leipsick edito nel 1724. (Sezione *II.* del 1722) a pag. 66. e più di tutto a 72. e segg. *Animadversiones in Ae-*

nella quale non solamente si contengono due variabili m, x (mentre una sola n' ha quella del Wallis), ma di più il prodotto delle due Frazioni *continue*, che nelle Wallisiane dipende dal valore dell' unica variabile x, è affatto indipendente nell' ultime dalle due variabili m, x, perchè sempre *costante*? Si reciprocano in conseguenza talmente ambedue le ultime Serie, che come altri ebbero il dritto di chiamarne alcune *paralelle* (*a*), io non potrei mai meglio usarne se non assegnandole il titolo d' *asintotiche*, avuto segnatamente ri-

guar-

---

quationes secundi gradus &c., *il Giornale degli Eruditi di Lipsia* del *M. DCC. XXV.* alla pag. 473. e segg., il Volume *I.* di Pietroburgo (a 187. e §. *X.* a 204.) del 1726, fatto di ragion pubblica nel 1728, nei quali luoghi si posero a sciogliere la Riccaziana Daniello e Niccola Bernoulli non meno, che Cristiano Goldbach, e finalmente il T. *I.* delle Opere del Conte Jacopo Riccati „ edizione di Lucca del *M. DCC. LXI.* a pag. 437., e di nuovo nella Parte *II.* Annotazione *X.* da 510. a 527. *Della separazione delle indeterminate.*

(*a*) A queste Serie ha non poco contribuito per dar loro nome e celebrità l' errore, in cui cadde fino dal 1703. l' Abate Don Guido Grandi, ch' ei s' impegnò di sostener poi virilmente, ma sempre invano. Si posson leggere sopra di ciò il *Dialogo* da lui stampato in Lucca (da p. 20. fino a 41.) non meno, che la sua *Risposta apologetica* (Parte *II.* dalla pag. 153. alle 286. nel *M. DCC. XII.*, ed in oltre la sottilissima Satira fattane da un Anonimo negli Atti di Lipsia del *M. DCC. XV.* da 42. a 46. sotto il titolo *Examen Corollarii tertii ad Propositionem Septimam Tractatus de Quadratura Circuli & Hyperbolæ . . . ., in quo Corollario quantitatem ex infinitis nullitatibus componi statuitur*, dove (a 44.) se la prende ancora con Galileo. Il Conte Riccati ride poi molto di questo abbaglio replicatamente sostenuto da Grandi sulla pretesa forza dell' infinito nel Capo *IV.* Annotazione *II.* pagg. 86. 87. del „ Saggio intorno il Sistema dell' Universo „ (Tomo *I.* della precitata Raccolta). Nè manca di far molta impressione la lettura di due Pistole di Cesare Godemini da Pistoja, parzialissimo amico del Grandi, a lui scritte sopra dello stesso argomento in data de' 25. Gennajo 1716. ed inserte in un Codice MS. della Biblioteca dello Studio di Pisa segnato *XIII. II. O. III. N.* 13., nelle quali vengon promosse con tutta chiarezza parecchie difficoltà contro della dottrina del suo Maestro, ch' egli chiamava maravigliosa ed astrusa.

guardo all' Iperbola d' Apollonio. Delle Serie *paralelle* ho tenuto discorso, siccome aveva promesso fino del 1782 (*a*), nella Parte *III.* delle *Meditazioni Analitiche* sopraccitate, il principale oggetto delle quali si è quello di promovere parimente l' uso delle regole date da Newton nel suo aureo Trattato *de Quadratura Curvarum*, appoggiato presso che tutto ancor esso alla Formola del *Binomio* (*b*). E delle *asintotiche* di tutti i gradi, quanti corrisponderebbero senz' alcun limite in Geometria all' Iperbole di vario genere, si vedrà qualche nuovo esempio nel proseguimento di questo *Saggio*, se in grazia di questo sol cenno non sarò prevenuto dai valorosi Analisti, di cui va gloriosa la nostra età; lo che in vece di muovermi invidia, m' arriverà sempre gratissimo. Chiudo frattanto questo §. coll' avvertenza, che il prodotto delle Serie di Wallis non mai raggiugne il prodotto delle altre due, le quali fin quì son servite di paragone, fuori del caso di $x = 1$. Ma allora si sfigurano come ognun vede, siffattamente le prime, che possono esser solo di pascolo al talento vago di speculare in astratto fra gli *infiniti* e gli *zeri* (*c*). Del resto non è poi tanto frequente nell' Algebra, che l'*unità* divisa per una Frazione *continua* ne restituisca come *quoziente* un' altra della medesima forma.

16. Non vi sarebbe il prezzo dell' opera fermandomi a cambiar forma alla Serie di La Grange, e perciò ancora all'

ag-

(*a*) Cap. *VI. Magnitudinum exponentialium* &c. al §. 266. p. 360., ove si legge *De usu serierum ut vocant, Parallelarum in nonnullis quæstionibus enodandis*. Alcune delle più semplici proprietà delle Serie suddescritte sono accennate di volo nel Capo *I.* §. 35. pag. 31. e segg., di nuovo nel *VI.* §. 265. pag. 358. e segg., e finalmente nel *X.* §. 401. pag. 608. e seguenti.

(*b*) Tutto questo si farà manifesto dall' Articolo *II.* intitolato „ Come nasca l' integrale $Sdx(-Lx)^{\pm\frac{1}{2}}$ per $x = 1$ dalle scoperte di Newton. „

(*c*) Chiunque legga la Prefazione d' Euler alla grand' Opera *Institutiones Calculi differentialis*, dove dà corpo agli zeri, si rammenterà facilmente dell' aurea Sentenza = La vérité même ne doit pas être outrée. = („ Journal Encyclopedique &c. „ T. *V.* 20. Giugno N. *XVII.* 1792. Bouillon a pagg. 88. e 89.).

aggiunta da me come sua indivisa compagna. Lo ha fatto in diversi modi e tutti eleganti quel Ch. Autore, ed io potrei farlo adesso egualmente senza scostarmi dal *Binomio* di Newton. Ma non essendovi bisogno d'arte dopo discoperta la prima, e dipendendo tutto da regalar quante forme differenti si vogliano alle *Frazioni continue* secondo i canoni ormai conosciuti, e ciò col raggruppare in uno solo due o più passi delle *Frazioni* medesime (come, per esempio, da $\cfrac{p}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{r}{\&c.}}}$ nascono $p-\cfrac{pq}{1+q+r\cfrac{}{\&c.}}$ ovvero $\cfrac{p(1+r)}{1+q+r\cfrac{}{\&c.}}$ ossia $\cfrac{p(1+q+r)-pq}{1+q+r\cfrac{}{\&c.}}$, &c.) sarebbe vana ogni speculazione ulteriore, che non rimandi al principio. Applichiamo piuttosto il metodo di già spiegato al ritrovamento delle altre Serie, delle quali fa uso La Grange nella stessa *Memoria* (a) adattando il Calcolo Integrale per convertire in Frazioni *continue* alcune delle più semplici quantità *trascendenti*, come quelle che prima si nominavano *Funzioni* del Circolo e dell' Iperbola (b), e deriviamole anch' esse immediatamente dalla Formola del *Binomio*, con unirvi eziandio sotto di quest' aspetto più semplice le ricerche fatte da Euler intorno alle Frazioni medesime, ed i Teoremi bellissimi dell' insigne Elvetico Lambert (c), che nell' età nostra non ebbe forse l' eguale o si consideri la chiarezza o l' eleganza de' suoi ritrovati, e non avrebbe a mio giudizio nella passata nemmen da invidiare Giovanni Bernoulli il seniore. Ma egli è così vigoroso e rapido il moto, che anima di presente tutte le Scienze, ed in particolar modo le Matematiche, ch' io non saprei lusingarmi nè di por mente a ciascuna delle Scoperte, le quali potrebbonsi travestire alla foggia del *Binomio* di Newton, nè di raccoglierle interamente dai Libri, che tardano assai a venire di là dai monti in Italia (*a*). E difatti s' affollano in così gran copia ogni giorno ὅσοι Ψαμμος i metodi nuovi e gli avanzamenti dell' Algebra, che tanto è difficile pretender oggi ad avere il vanto di Matematico sommo, quant' era facile ai tempi di Galileo.

(a) Comincia a trattarne dal §. 12. alla pag. 252. Sono spezialmente quelle attenenti tanto ad e^x, quanto a $L(1+x)$, e sempre s'adopera, come sopra, il Calcolo Infinitesimale per rintracciarle, quand' io per l' opposto mettendo in uso i principj già dati nei Capitoli *II.* e *III.* della mia Opera del *M. DCCLXXXII.* ne faccio un caso particolare della stessa Formola del *Binomio*.

(b) Simili Funzioni *trascendenti* meritavano d' essere emancipate dalle Figure di Geometria. Era stato più volte tentato di farlo in proposito di $S\frac{dx}{x}$. Se ne veda la Storia nella *Memoria* Francese citata fra queste *Note* alla nota (a) p. 292.

(c) Volume *XVII.* della R. Accademia delle Scienze di Berlino per il *M. DCC. LXI.* stampato nell' anno *M. DCC. LXVIII.* alla pag. 265., da cui principia *Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantites transcendentes circulaires & logarithmiques (lû en 1767.)*.

Sarà continuato.

(*a*) Fa meraviglia a questo proposito di mancamento del commercio librario come l' illustre Monge scrivendo verso il *M. DCC. LXXXV.* la sua profonda Dissertazione *Sur les Developpées* &c. nelle *Mémoires de Mathématiques & de Physique par divers Savans* &c. dell' anno indicato s' esprimesse così al §. *XLV. p.* 550. „ Donc une portion quelconque de la surface d'un Cône droit est à sa projection sur le plan de la base du Cône dans le rapport du rayon au cosinus de l'angle que fait le côté du Cône avec le plan de la base. Proposition que **M.** l'Abbé Bossut a demontrée le premier dans sa *Géométrie*, & qui n'est qu'un cas particulier du Théorême précédent. „ Montucla aveva pure notato nel Tomo *II.* della sua *Histoire* &c. Par. *IV.* Lib. *I.* a pag. 71. il „ *Tentorium Camaldulense*, de' Vivianèi „ pubblicato dal Grandi fino del 1699., ed ivi particolarmente a pag. 73. *(a)* annunziasi come fatta dall'ultimo (ed è l' istessa di Bossut) la dimostrazione geometrica di quell' elegante Teorema scoperto nel 1695. da Giovanni Bernoulli.

SPIEGAZIONE POPOLARE DELLA MANIERA, COLLA QUALE SI REGOLA L'ANNO SESTILE O INTERCALARE, ED IL COMINCIAMENTO DELL'ANNO REPUBBLICANO

Del fu Lorenzo Mascheroni Socio

Ricevuta il dì 20. Agosto 1801.

L'Anno sestile è quello, che conta 366 giorni, cioè sei giorni di più dei dodici mesi di 30 giorni ciascuno, e per questo numero di sei giorni è chiamato sestile. Si chiama anche Intercalare, perchè viene ad intercalare, ossia a frapporsi di quando in quando fra gli anni comuni.

L'anno comune conta 365 giorni, cioè soli 5. giorni di più dei dodici mesi. Per questa ragione può essere anche chiamato quintile.

L'anno sestile ha lo stesso numero di giorni, che l'antico anno bissestile. Quello era così chiamato, perchè nel Calendario Romano antico, quando l'anno aveva 366 giorni, due erano i giorni nel mese di Febbrajo cioè il 24, e il 25, che si notavano colla stessa indicazione di *Sexto calendas martias*. Laddove nell'anno comune di 365 giorni, il solo giorno 24 si notava col *sexto calendas*, e il 25 col *quinto calendas*.

L'anno sestile sarebbe in sostanza lo stesso, che il bissestile antico, se colla nuova legge si facessero coincidere costantemente: ma in seguito non avverrà che per accidente, che quell'anno che sarebbe stato bissestile secondo le regole del Calendario Gregoriano, sia anche sestile secondo le nuove.

La regolazione del Calendario è sempre stata finora un mistero pel popolo. La cura, che prende il Governo perchè si tolga il velo a questo mistero, è un nuovo argomento che la rivoluzione è fatta per diffondere i lumi.

La regolazione del Calendario era un offizio dei Pontefici nella Repubblica Romana. Giulio Cesare come Pontefice stabilì il Calendario da lui chiamato Giuliano. Quindi passò naturalmente ai Papi, e Gregorio XIII. uno di essi fece la riforma conosciuta sotto il nome di Calendario Gregoriano. Ora si lascia agli Astronomi. Questo è così giusto, anzi è lo stesso, che lasciar loro la decisione sui movimenti del Cielo.

Il popolo tenuto nell' ignoranza ora ha creduto, che la distribuzione dell' anno fosse legata colla Religione; ora che l' anno bissestile, che ha un giorno di più degli altri fosse come una specie di mostro a due teste. In alcuni luoghi dell' Europa dura ancora presso il popolo il pregiudizio, che l' anno bissestile sia un anno infausto.

Se il Sole, che come ognun vede è alto nell' estate, e basso nell' inverno, e due volte all' anno fa il giorno eguale alla notte quando si trova nel piano dell' Equatore, impiegasse tutte le volte lo stesso tempo di 365 giorni esatti a ritornare sull' Equatore nella stessa stagione, tutti gli anni sarebbero comuni. Se impiegasse 366 giorni in punto, tutti gli anni sarebbero sestili. Ma egli vi impiega al presente 365 giorni, 5 ore, e 48 minuti, e 33 secondi in circa. Tutti sanno che l' ora si divide in 60 minuti, e il minuto in 60 secondi dietro l' antica divisione.

Per preparare meglio le idee ad intendere l' origine del bissestile, e per entrare nello stesso tempo nello spirito della nuova legge; scegliamo il primo punto del segno della Libra, al quale arriva il Sole il primo Vendemmiajo. Quel dì il giorno è uguale alla notte. Se il Sole corrispondesse sempre a quel punto del Cielo, il giorno in tutti i paesi del mondo s' agguaglierebbe alla notte. Per questo il primo punto della Libra si chiama punto dell' equinozio, e il cerchio che descriverebbe il Sole stando in esso si chiama Equatore.

Supponghiamo che il Sole arrivi a questo punto del

Cielo nel momento presente, e che in questo stesso momento sia mezza notte. Comincierà ora il dì primo Vendemmiajo di quest' anno, che và sino alla mezza notte seguente. Passati 365 giorni in punto arriva la mezza notte: ma il Sole non è ancora arrivato al primo punto di Libra, e bisogna, che a ciò v' impieghi anche 5 ore, 48 minuti, e 33 secondi (*a*).

Poichè la legge vuole, che il primo Vendemmiajo sia quello, dentro le 24 ore del quale da una mezza notte all' altra cade l' arrivo del Sole al primo punto della Libra; si dirà, che in questo secondo anno il Sole arriva all' equinozio a 5 ore, 48 minuti, e 33 secondi del dì primo Vendemmiajo. L' anno seguente conviene aggiungere altre 5 ore, 48 minuti, e 33 secondi, perchè il Sole arrivi all' equinozio; sicchè vi arriverà a 11°, 37', 6'' del dì primo Vendemmiajo dell' anno terzo. Egualmente si troverà, che aggiungendo sempre ogni anno le stesse 5°, 48', 33'', l' anno quarto il Sole arriverà all' equinozio il di primo Vendemmiajo a ore 17°, 25', 39'', e l' anno quinto a ore 23, 14', 12''.

Chiaramente s' accorge, che nissuno dei quattro anni precedenti deve essere sestile, nissuno deve aver avuto più di 365 giorni, poichè lasciando loro questo solo numero di giorni, l' equinozio cade nel primo Vendemmiajo dell' anno quinto a ore 23, 14', 12'' cioè 45', 48'' prima della mezza notte seguente.

Ecco quattro anni di seguito senza un sestile. Si capisce chiaramente, che se il primo anno il Sole fosse arrivato all' equinozio non al momento della mezza notte, ma den-

---

(*a*) Secondo gli ultimi risultati dell' astronomia, la lunghezza media dell' anno, è di 365^{g} 5°, 48', 48'. Ma le piccole irregolarità delle equazioni del Sole danno per questo secolo, e pei tre seguenti 15'' di meno. Vedi la memoria di Délambre, Connoissance des tems an. VII, pag. 318.

dentro lo spazio di 45′, 48″ dopo la stessa, quanto appunto sopravanza al fin del conto; ancora si avrebbero avuti quattro anni senza un sestile.

Andiamo avanti ripigliando la prima supposizione, e supponghiamo dunque, che nel primo Vendemmiajo dell' anno quinto il Sole arrivi all' equinozio a ore 23, minuti 14, e secondi 12. Se a questi si fa la solita aggiunta di ore 5, minuti 48, e 33 secondi si troverà, che l' anno seguente il Sole arriverà all' equinozio a ore 29, minuti 2, secondi 45. Quindi se si lasciasse l' anno quinto di soli giorni 365, siccome in 29 ore si trova un giorno intero, e avanzano 5 ore; l' equinozio caderebbe nel secondo giorno Vendemmiajo dell' anno sesto a ore 5 minuti 2, e secondi 45.

Per fissare il principio dell' anno a un punto determinato, e per non lasciare che l' equinozio vada cadendo in seguito nel terzo giorno, nel quarto, e nei successivi giorni di Vendemmiajo, poi di Brumajo, poi di Frimajo &c. come succederebbe se si conservassero gli anni di soli giorni 365; la legge ha determinato che si conti pel primo Vendemmiajo quel giorno, nell' intervallo del quale da una mezza notte all' altra cade l' equinozio della Libra. Assegnando dunque all' anno antecedente quel giorno, che si è formato colla replicata aggiunta di 5°, 48′, 33″ si avrà l' anno quinto di giorni 366 cioè sestile, e così l' equinozio caderà nel primo giorno di Vendemmiajo dell' anno sesto a ore 5, 2′, 45″.

Senz' altra spiegazione si capisce, che nell' anno settimo l' equinozio caderà nel primo Vendemmiajo a ore 10, 51′, 18″ &c.

2.° Che ogni qual volta coll' aggiunta, che si fa ogni anno delle ore 5, 48′, 33″ si verrà a formare un giorno, questo anderà aggiunto all' anno precedente, che diventerà sestile.

3.° Che seguitando questa legge, il più delle volte si avrà un sestile ogni quattro anni, come facilmente se ne convincerà chi vorrà fare il conto. Di fatti in quattro anni l' equil'equinozio ritarda di ore 23, 14', 12", le quali non differiscono dalle 24 ossia da un giorno intero, se non di minuti 45, e 48 secondi. Quindi tutte le volte, che si avrà un equinozio posteriore alla mezza notte più di 45', 48", nei primi quattro anni seguenti vi sarà certamente un sestile. Questo sarà il più delle volte.

4.° Che dopo un certo numero di anni nel quale in ogni quattro anni avremo avuto un sestile avverrà, che avremo quattro anni successivi senza un sestile. Questo avverrà quando in qualche sestile l' equinozio caderà più presto di 45', 48" dopo la mezza notte.

Ecco la semplicissima spiegazione della ragione per la quale tutti gli anni non sono eguali nel numero dei giorni, ma alcuni di essi hanno un giorno di più degli altri.

Non vi è dunque nissun mistero religioso nel distribuire gli anni più lunghi, o più corti, come non vi è alcun mistero, che il Sole torni allo stesso equinozio in 365. giorni, 5 ore, 48 minuti, e 33 secondi.

E' cosa naturalissima, che la legge si uniformi al moto del Sole, e che l'anno si cominci a un punto del Cielo, al quale sieno stabilmente legate le stagioni.

Ogni altro regolamento come quello del Calendario Giuliano, o Gregoriano, o altri che si avessero voluto fare diversi da questo, sarebbero stati soggetti al bisogno di sempre nuove correzioni, come lo è stato il Giuliano, e come ormai lo era anche il Gregoriano. Tutto ciò, che è sistema artificiale, e non è regolato precisamente sulla natura viene da essa di quando in quando richiamato all' ordine.

Se il corso del Sole fosse di giorni 365, 5°, 48', 33" in punto, o se almeno fosse di egual tempo da un anno all' altro: dato una volta questo tempo, e date le ore nelle quali per esempio in quest' anno settimo della Repubblica il Sole è arrivato all' equinozio il dì primo Vendemmiajo, le quali si trovano essere 20°, 6', 22"; non vi sarebbe bisogno degli Astronomi per calcolare in avvenire in qual anno convenga aggiungere un giorno nel decorso del tempo. La regola semplicissima data quì sopra basterebbe, perchè ogni principiante d' aritmetica facesse da se il conto.

Ma le ore 5, 48', 33'' non sono di tutta la precisione. Di più non è costante la lunghezza del tempo, che il Sole impiega a ritornare all' equinozio. La Teoria di queste varietà è troppo alta per essere spiegata al popolo. Può però il popolo essere persuaso, che non si poteva far meglio, che raccomandare l' affare agli Astronomi soli giudici legittimi in questa materia. L' annuario Repubblicano non ha viste politiche. Esso prende regola dalla natura, ed è puramente Astronomico.

Quantunque le sottili differenze, che entrano a variare da un anno all' altro la quantità delle 5 ore 48' 33'' non vadano trascurate in un lungo corso d' anni, e di secoli durante il quale portando un' accumulamento di piccole frazioni, introducono, o tolgono dall' anno dei giorni interi, e però cambiano la distribuzione degli anni sestili: non ostante per la pratica ordinaria e comune, e pel corso di quattro secoli, e più basta impiegar la regola data quì sopra per trovare con sicurezza quale anno sarà sestile, e qual no.

In primo luogo noi troveremo, che l' anno presente settimo della Repubblica deve essere sestile. Poichè ritenendo, che il Sole è entrato al punto dell' equinozio della Libra il dì primo Vendemmiajo di quest' anno a ore 20 6' 22'', se vi aggiungeremo 5 ore 48' 33'' avremo 25° 54' 55'', e però un giorno intero da aggiungere in fine di quest' anno oltre i 365. Così fatto sestile quest' anno, l' equinozio dell' anno ottavo caderà il dì primo Vendemmiajo a ore 1 54' 55''.

In questa determinazione del presente anno sestile non v' è nulla d' arbitrario, nulla che senta il sistema particolare. Sono le leggi della natura, più che quelle della Repubblica, che fanno che volendo cominciare l' anno dalla mezza notte osservata al meridiano di Parigi, quest' anno è di giorni 366.

In seguito noi troveremo sestile egualmente l' anno 11, 15, e quindi non già il 19, ma il 20, e gli altri, che sono notati nella seguente tavola. Essi vanno sino all' anno 400. Essi sono sicuri, e non può cader dubbio, se non sopra i soli tre 144, 301, 362. In questi anni l' equinozio caderà assai vicino alla mezza notte, così che attese le piccole irregolarità, delle quali abbiamo parlato, non si potrebbe decidere molti anni avanti col calcolo, se esso anderà qualche momento avanti, o dopo la mezza notte. A questo inconveniente però rimedieranno interamente le efemeridi astronomiche. Siccome esse si pubblicano anticipatamente di due, o tre anni, esse avviseranno per tempo il pubblico del giorno dell' equinozio di quegli anni dubbj, e quindi fisseranno i veri anni sestili.

TAVOLA

Tutti gli anni della Repubblica dal suo principio sino all' anno 400 sono comuni, ossia quintili di 365 giorni, eccettuati i seguenti, che sono sestili.

Tratta dalla citata memoria di Delambre.

3	69	135	201	267	334
7	73	139	205	272	338
11	77	144	210	276	342
15	82	148	214	280	346
20	86	152	218	284	350
24	90	156	222	288	354
28	94	160	226	292	358
32	98	164	230	296	362
36	102	168	234	301	367
40	106	172	239	305	371
44	110	177	243	309	375
48	115	181	247	313	379
53	119	185	251	317	383
57	123	189	255	321	387
61	127	193	259	325	391
65	131	197	283	329	396
					400

Niente vi sarà di più utile, che introdurre nelle scuole primarie, dove si insegnano le prime operazioni dell' Aritmetica il calcolo degli anni Sestili dandolo per esempio, e per esercizio delle stesse. Il maestro abile ne saprà trarre varj problemi. Si avvezzeranno tutti i figlj de' Cittadini non solo a trovarsi da sè gli anni Sestili, e i comuni, ma ancora a conoscere la ragione, che ignorata lascia comparire sotto un falso aspetto questa differenza di anni, e mette anche in taluni che si vogliono creder colti, della ritrosia ad adottare il nuovo metodo, ed a staccarsi dalle antiche abitudini dell'anno bissestile. Negli agricoltori stessi una tale cognizione porterà il felice effetto di sradicare una certa paura di quegli anni, che crescon d' un giorno, e che sembrando mostruosi gli mettono in diffidenza e pigrizia quasi pensando, che al crescer d' un giorno debbano calare i frutti dei lor sudori di tutto l' anno. Questa paura cesserà del tutto qualora capiscano la ragione naturale della cosa. La ragione naturale ha dissipato ormai anche nel volgo le paure dei fuochi notturni, e dei fantasmi elettrici, o fosforici. Essa ha famigliarizzato da gran tempo gli uomini alle Ecclissi, ed alle Comete. Essa renderà famigliare a tutti l' annuario Repubblicano. Nissuno cercherà più altro Calendario.

Restano due cose ancora da spiegarsi sul proposito del principio dell' anno Repubblicano. La prima si è per qual ragione l' anno si cominci dall' equinozio d' autunno. L' altra a quali condizioni si debba scegliere un Meridiano per fissare la numerazione dei giorni.

Quanto al primo articolo essendo l' anno a guisa di un circolo, che torna in se stesso, dalla quale proprietà ha pure ricevuto il nome d'anno presso gli antichi; è indifferente da qual punto di questo cerchio si voglia prendere il suo principio, purchè sempre scorso tutto il cerchio, si ricominci l' anno appresso da quell' istesso punto. Quindi sono nate infinite diversità di cominciamenti d' anno in varie parti del Mondo, ed in varj secoli, che sarebbe lungo riferire, molte delle quali durano infelicemente anche a dì nostri. Nulla di più imbarazzante per la Storia, e per la Cronologia. Nulla di più incomodo pel commercio, e per la corrispondenza delle Nazioni in grande. Nulla dunque di più importante pel vantaggio generale degli abitanti del nostro globo di quello, che fissando anche nel resto uniformità di misure, di pesi, e di monete, s' accordino le nazioni ad adottare una sola misura del tempo, sicchè tutte abbiano lo stesso cominciamento, e la stessa lunghezza dell' anno.

Per ottenere questo, siccome nell' altre misure è convenuto attenersi a quantità prese nella natura medesima, così conviene legare anche il principio dell' anno a qualche punto rimarcabile del corso del Sole. Tutti i principj dell' anno fissati ad epoche di fatti umani ancorchè appartengano a grandi nazioni, se per avventura non coincidano con epoche naturali, non appartengono a tutto il globo, con difficoltà si ricercano nella Storia, difficilmente si ammettono dalla gelosia de' popoli, e pel continuo giro delle vicende umane facilmente si cambiano.

A prima vista si presentano nel corso dell' anno i quattro punti più rimarchevoli nel giro del Sole. Essi sono la maggior altezza del Sole sul nostro orizzonte, ossia il solstizio d' estate; la maggior depressione, ossia il solstizio d' inverno, ed i due punti nei quali si agguagliano i giorni, e le notti, uno in primavera, e l' altro in autunno, che son chiamati equinozj. Più ragioni hanno determinato a scegliere per principio dell' anno piuttosto un equinozio, che un solstizio. Una principale si è la maggiore imparzialità di riguardo ai varj paesi del mondo. Un solstizio fa i giorni più lunghi per un emisfero, e più corti per l' altro. I due equinozj indistintamente fanno il giorno eguale alla notte in tutti i paesi del mondo. In essi il Sole si trova nell' equatore, cerchio che divide per metà il nostro globo. Gli equinozj presentano un tipo d' eguaglianza naturale. Se l' eguaglianza è uno dei due principj della Repubblica, uno dei due equinozj doveva essere il principio dell' anno Repubblicano. Tra essi due una forte ragione astronomica determina a preferire quello di autunno. Si sa, che il Sole impiega minor tempo a passare dall' equinozio di autunno a quello di primavera, che da quello di primavera a quello di autunno. In 180 giorni circa il Sole passa dall' equinozio di autunno a quello di primavera, cioè dalla Libra all' Ariete; e in 185 giorni dall' Ariete alla Libra. Quindi nasce, che se si fissa il principio dell' anno in autunno, dopo sei mesi di 30 giorni l' uno si trova, che l' equinozio di primavera cade al principio del settimo mese, e quei cinque giorni di più, che si trovano in un anno oltre i dodici mesi di trenta giorni l' uno, vanno a cadere in fine dell' anno avanti l' equinozio di autunno, e formano i giorni complementarj. Laddove se si cominciasse l' anno in primavera dopo sei mesi di trenta giorni non saremmo all' equinozio di autunno, il quale cadrebbe nel sesto giorno circa del settimo mese. Per la stessa ragione, come è facile vedere cominciando l' anno in autunno, l' ingresso del Sole nei segni del Zodiaco, o cade nel primo giorno di ciascun mese, che gli corrisponde, o poco lontano da esso. Laddove se si cominciasse in primavera, anderebbe a cadere lontano dal principio del mese, a meno, che i giorni complementarj non si volessero cacciare alla metà dell' anno fra i primi sei mesi, e gli altri sei; cosa, che turberebbe la continuazione dei dodici mesi eguali.

Questa ragione è astronomica è comune a tutti i popoli. La Repubblica Francese ha di più la ragione dell' epoca della sua fondazione.

Ma qual Meridiano si dovrà preferire per contar da quello il principio dell' anno?

Una legge, che determina per primò giorno dell' anno quello dentro il quale da una mezza notte all' altra cade l' equinozio, ha in vista due punti di tempo di due mezze notti, che si succedono. Ora le mezze notti come i mezzi giorni non accadono allo stesso momento per tutti i paesi del Mondo, come è noto; ma se per esempio in questo momento è mezza notte per Parigi; non lo sarà per Milano, che è più Orientale di 6° 51′ 15″, e però saranno già 27. minuti, e 25. secondi di tempo dopo la mezza notte di Milano. Nello stesso momento però, che cade la mezza notte in Parigi, cade ancora in una infinità d' altri luoghi, che si trovano sullo stesso Meridiano superiore. Si concepisca un mezzo cerchio, che da un polo all' altro passi per Parigi. Tutti i paesi situati sotto questo semicerchio, come sarebbe Dunkerque, Amiens, Barcellona &c. hanno la mezza notte allo stesso punto. I paesi più Orientali l' hanno avuta qualche tèmpo prima, ed i più Occidentali l' avranno qualche tempo dopo.

Ora per mostrare colla maggiore evidenza la necessità di fissare un Meridiano per legarvi il principio dell' anno, che si voglia ricevere universalmente; si supponga, che l' equinozio sia accaduto dieci minuti prima di questa mezza notte di Parigi, nel momento della quale noi supponghiamo essere al presente. Jeri sarà stato il primo Vendemmiajo. Ma la notte di Parigi coincide nella sua maggior parte colla notte di Milano. L' equinozio però accaduto dieci minuti prima della mezza notte di Parigi viene a cadere 17 minuti, e 25 secondi dopo la mezza notte di Milano. Sicchè se si volesse ottenere anche per Milano, che il primo Vendemmiajo in Milano fosse quello, nel quale da una mezza notte di Milano all' altra cade l' equinozio, il primo Vendemmiajo di Milano sarebbe oggi, e non jeri come in Parigi. Quindi ne segue, che il prossimo levar del Sole in Parigi, ed in Milano seguirebbe nel dì secondo Vendemmiajo di Parigi, e nel primo Vendemmiajo di Milano.

Si vede dunque manifestamente, che se si vuole lo stesso principio d' anno per Milano, e per Parigi, conviene scegliere un solo dei due punti della mezza notte, o quel di Parigi, o quel di Milano, ossia ciò che è lo stesso un solo dei due Meridiani, che determini il principio dell' anno per entrambi i Luoghi.

Lo stesso discorso, che si è fatto per Parigi, e Milano, potendosi fare per tutti i luoghi della terra, si vede che vo-

volendo un principio d' anno universale , la questione è ridotta a fissare definitivamente un Meridiano per osservarvi le mezze notti . Fissato un tal Meridiano, quello sarà il primo dì dell' anno per tutto il globo , nel quale da una mezza notte all' altra cade l' equinozio della Libra, che è per noi l' equinozio dell' autunno .

È noto che per la Geografia è necessaria la fissazione di un primo Meridiano dal quale si possano contare sul globo i gradi di longitudine di ciascun punto della terra . È poi cosa naturale, che si abbia a scegliere un solo Meridiano , che serva egualmente , e alla numerazione dei gradi di longitudine, e alla fissazione del principio dell' anno .

Nè l' Astronomia nè la Geografia Fisica offre alcun Meridiano , che meriti a quest' oggetto la preferenza sopra d'un altro . Convien dunque appigliarsi a qualche ragione estrinseca , che determini a tale scelta .

Principali motivi di preferenza saranno i seguenti .

1.° Se il Meridiano avrà un punto della sua circonferenza in qualche Osservatorio de' più celebri del mondo dove si siano fatte osservazioni le più accurate, dove la solidità dell' edifizio , e del Governo faccia sperare , che non si abbia a smarrire giammai la situazione di quel punto .

2.° Se avrà una porzione della sua circonferenza più grande di ogni altra, ben osservata , ed esattamente misurata , la quale abbia anche di più servito alle altre misure universali . Se di più questa porzione sarà quasi egualmente divisa dal parallelo , che passa pel grado 45 , e sarà terminata alle due sue estremità da due gran mari : cose che servono sommamente a determinare la lunghezza media del grado , e che per conseguenza danno a quel Meridiano un pregio particolare .

3.° Se sarà già a quest' ora il Meridiano più conosciuto di tutti , e adottato quasi generalmente in Geografia .

Questi articoli sono tali, che al solo enunziarli si giustificano da se stessi .

Ora se il primo articolo per alcuni riguardi può convenire a più di un Osservatorio; è facile vedere, che conviene per tutti i riguardi all' Osservatorio di Parigi.

Quanto al secondo: sul Meridiano di Parigi, non solo si sono già misurati più di nove gradi con estrema esattezza da un mare all' altro; ma sarà ben difficile, e quasi impossibile trovare un altro luogo del Mondo, dove si possa fare altrettanto. È noto quanto questi gradi servano alla determinazione delle misure generali.

Finalmente il Meridiano di Parigi è ormai impiegato comunemente nelle carte Geografiche; e non vi sono, che due altri Meridiani, che potrebbero venire in qualche competenza con esso.

Il primo sarebbe quello dell' Isola del Ferro. Ma esso non ha Osservatorio, manca di tutti gli altri requisiti, e ormai si va abbandonando anche in Geografia.

Il secondo sarebbe quello di Londra. Esso però finora non è impiegato, che dagli Inglesi, manca degli altri punti, e non vi è apparenza, che abbia ad essere accettato a preferenza di quello di Parigi.

Eccoci dunque condotti alla finale conclusione di questo discorso.

Da tutto ciò che si è detto risulta, che è dell' interesse comune di tutti i popoli fissare un anno comune per tutti, regolato sulla natura, e perfettamente messo in accordo colle apparenze del Sole.

Che il primo giorno di quest' anno deve esser quello, nel quale cade l' equinozio della Libra.

Che questo giorno deve essere determinato sul Meridiano di Parigi.

Che l' anno deve riuscire ora di 365 giorni, e sarà quintile, o comune; ora di 366, e sarà sestile, o intercalare, secondo che porterà l' incidenza dell' equinozio.

Che la determinazione dell' incidenza dell' equinozio deve appartenere per giudizio definitivo agli Astronomi.

SO-

SOPRA UNA TERRA VULCANICA

SCOPERTA

NELLA PROVINCIA BERGAMASCA

MEMORIA

Di Giovanni Maironi da Ponte

Ricevuta il dì 29. *Agosto* 1801.

ERa già nota da molto tempo nella mia patria, pel suo uso cementatorio, una terra sotto il nome volgare di *Lavezzara*, che si trova in Vallalta, e in que' contorni; e le cui proprietà essenziali da me poscia accuratamente esaminate, la caratterizzano per una Vulcanica sostanza.

Ne avea già avuti alle mani varj pezzi, e sentite decantar molto le qualità sue singolari principalmente nella costruzione delle Cisterne, e degli Acquedotti; ma non ha guari, dacchè volli esaminarla meglio, anche in confronto alle circostanze della sua situazione, onde corredare di tutte le necessarie induzioni le mie conghietture.

A illustrazione di queste, siami quì lecito di premettere quanto ebbe a scrivermi l' ora defonto rinomatissimo Signor Gio. Arduino, noto a tutta l' Europa per le sue opere pregiatissime di Storia Naturale, e specialmente per le osservazioni sue sopra i Vulcani estinti del Vicentino. ,, Ho letto ,, con piacere (egli dice) la sua Memoria (ms.) comunica- ,, tami sulla terra analoga alla Pozzolana, che costì chiamasi ,, *Lavezzara*. Ha essa delle proprietà assai stimabili; ed el- ,, la opina molto ragionevolmente intorno alla sua vulcanei- ,, tà. La composizione della medesima, le specie di fossili,

,, che vi sono frammisti, e i suoi effetti ne' cementi murali ,, a me ne sembrano chiare prove ,,.

Chiamato io a definirla, non saprei caratterizzarla che per una Pozzolana argillosa, di un color gialliccio-grigio, di una pasta serrata e compatta, ma terrosa e fragile, con de' pezzetti di Crisolide friabile vulcanica (1), con qualche picciolo cristallo di Sorlo ossia Scorillo (2), con della Mica (3), e della Marga argillosa ossia Carbonato di calce alluminoso (4).

Rassomiglia molto alla terza varietà delle Pozzolane riportate dal Sig. Faujas de Saintfond al cap. 18 della sua *Mineralogia de' Vulcani*.

E per incominciar le osservazioni dalla ispezione, e dalle circostanze della località di questo nostro prodotto vulcanico, descriverò così di volo la Valle Seriana in quella parte, in cui esso si rinviene.

Quivi la gran Vallata, sorta nel seno delle eccelse montagne, che confinano al *Nord* colla Valtellina, mette foce sulla pianura detta di Lombardia, e vedesi dilatarsi a ſoggia di un vasto seno, a cui fanno corona tutt' attorno monti alti e scoscesi, non lasciandone comoda la sortita, se non se lungo la defluenza del Serio.

Il piano di questo gran seno è nella massima parte un tessuto di materie gregarie, e di pezzi calcari, solcato dal fiume, sopra il cui letto si eleva molto, e a varie riprese.

Esse Montagne sono di pietra Calcare, ossia Carbonato di Calce, come dicono i moderni (5), con evidente apparenza di stratificazione in alcuni siti, e con poca in altri, segnatamente sulla cima, dove anzi certune mostrano una fronte torreggiante, merlata, e corrosa, su cui campeggiano orribilmente la rovina e la desolazione, riportate dalla longevità, e dalle terribili catastrofi sofferte nella primitiva sua conformazione, e dappoi, dal nostro Pianeta.

---

(1) Crisolitus spec. 109 Wallerii.

(2) Basaltes solidus spec. 148 ejusdem.

(3) Mica fusca spec. 174 *d.* et *e.* ejusdem.

(4) Marga argillacea spec. 30 ejusdem.

A Marga calcarea Cronstedt §. 25.

(5) Lapis calcareus rudis Wallerii.

Sulla sponda occidentale del Serio vedesi signoreggiare la grossa ed amena borgata d'Albino in un ubertoso territorio variato anche da ineguali pianurette sulla orientale. Il fondo, che tutto viene occupato dal Contado di Vallalta e dell'Abbazia, la quale ne è un' adiacenza, osservasi meno orizzontale, e più sparso di promontorj.

Alcuni di questi sono corredati da gruppi sterminati di pietra calcare, talora regolarmente strateggiati, i quali sembrano pezzi di monte balzati in aria da qualche forza sotterranea, e rovesciati là dove oggidì si veggono, e altri un ammasso confuso di ciottoli e di terra insieme conglomerati. I primi si osservano in vicinanza del ponte del Serio, i secondi molto superiormente, e sono interessanti per questo prodotto litologico.

Quello, sul quale io ho potuto eseguire le mie ricerche, è il così chiamato Colle di Vallalta. Esso ha varj piccioli piani, ed alcuni sprofondamenti di terreno configurati sul disegno de' Crateri vulcanici, nel cui fondo sta una specie di pozzo, il quale apparisce otturato da grossi ciottoli arretolativi dalla periferia, che ne ha moltissimi sotto la crosta vegetabile. Questi sono nella massima parte di granito (6) di porfirite (7) di schisto micacco (8) di quarzo (9) di spato (10) di pietro-selce (11), e d'altre pietre con segni non equivoci di alterazione per opera del fuoco.

Quin-

---

(6) Granites rubescens cum quartzo pingui semipellucido spec. 201 Wall.

(7) Saxum compositum jaspide, et feltspato, interdum mica et basalte sez. 266 *b*. Cronstedt.

(8) Corneus rigidus non nitens, apparenter lamellis paralellis Wall. pag. 170.

(9) Quarzum Cronst. §. 50.

(10) Spathum calcareum ejusdem §. 10.

(11) Petrosilex ejusdem §. 62.

Quindi non lungi veggonsi alcune vallette, le quali hanno una tale configurazione da farsi credere piccioli estinti camini a cui state sieno squarciate lè periferie dalle acque piovane, e da qualcuna delle terribili catastrofi sofferte dal nostro Globo, e le quali con caratteri indelebili veggiamo dipinte sopra tutto l' Orbe.

Consolidate presentemente si sono le sponde di queste bassure, e rivestite delle piante indigene. E quivi appunto è, dove sotto una crosta di terra *vegetabile* s' incomincia a trovare la nostra Pozzolana, la quale non di rado va accompagnata da banchi di una semplice argilla; ma più comunemente si trova frammischiata con pezzi di granito, di quarzo, di porfirite, di spato, di pietroselce, e di zeolite (12) variamente alterato e scomposto. Vi si rinvengono ancora de' piccioli cristalli di Sorlo (13) e della Mica, dei tufi calcarei e delle pietre vitrioliche ossia pregne di Solfato di Ferro (14).

Queste e varie altre osservazioni, che si fanno facilmente da chi con occhio filosofico percorre questo luogo, possono fargli conghietturare, non senza ragione, che una accensione sotterranea, e forse nello stesso tempo anche sottomarina, in un' epoca da noi rimotissima incominciasse a spezzare e a lanciare in aria gli strati della crosta antica del Globo, i quali dovettero essere di sostanze del genere delle dette primitive e primordiali; e che questi, infranti e sminuzzati ricadendo sulla bocca della gran fornace venissero a subire diversi gradi di alterazione dal fuoco, altri restando semplicemente arrostiti, altri calcinati, altri semifusi, ed altri totalmente alterati; e che poi dall'attrito violentissimo di queste pietre la polvere risultasse, dalla quale questa nostra sostanza viene costituita.

---

(12) Zeolites solidus particulis impalpabilibus. A. sez. 109 Crons.

(13) Basaltes crystalisatus sez. 76. A. Crons.

(14) Calx vitriolata §. 59 Bergman Sciagrafiaf *da me volgarizzata e corredata di note in Bergamo* 1783.

Alcuni pezzi di pietra saranno stati dal camino vomitati anche illesi da qualunque sensibile alterazione il che vedesi accaduto al Vesuvio, siccome nota il rinomatissimo Naturalista Gioeni de' Duchi d' Angiò, la cui Litologia Vesuviana fa tanto onore alla mineralogia Italiana.

La mancanza dell' ignea impressione sopra qualche pezzo di pietra, che si trovi all' intorno del nostro estinto Vulcano, non può essere presa per argomento contro l' esistenza sua antichissima.

La distanza degli strati dal centro d' ignizione potè bastare, onde alcune sostanze sentissero l' impulso violentissimo di projezione, senza provare internamente la forza del fuoco.

Oltre che quali vicende, e quali alterazioni non avrà dovuto subire la località stessa di questo nostro Vulcano, nel tempo rimotissimo forse da ogni epoca conosciuta, trascorso dopo la sua estinzione.

Siami lecito a questo proposito guidar l' osservatore ad alcune induzioni e conghietture, le quali mi sembrano convenienti, e all' uopo nostro opportune.

Sempre sulla destra della Valle da Albino all' in su, per lungo tratto, il piano semiorizzontale, elevato sopra il letto attuale del Serio, e ad un ottavo di miglio dal medesimo, trovasi corredato sul suo orlo da gran pezzi di una breccia cavernosa (15), che evidentemente comparisce formata dalle acque, e in alcuni luoghi consolidata fino a durezza di pietra, in altri soggetta ad attuale scomposizione in arena, ghiaja e ciottoli.

Tali deposizioni fluviatili dimostrano, che superiormente a questo elevato piano decorsero un dì le acque. E se ciò fu,

---

(15) Saxa conglutinata fragmentis Lapidum Cronst. §. 271.

fu, siccome non avvi luogo a dubitare, dovettero certamente dalle correntìe essere soverchiate sull' altro canto della valle molte delle inegnaglianze, sulle quali cade il nostro discorso: corrispondendo a questa induzione pienamente il livello delle località.

Ora sarebbe egli fuor di ragione il credere, che nuove acque immense, sopraggiunte (qualunque ne fosse la cagione o il movente) alla nostra Provincia, siccome al resto della Terra, già disseccata dalle primitive, che l'aveano lungamente coperta; inondandola nuovamente, e soverchiando se non altro le montagne meno elevate mettessero in disordine tutto il suo materiale; e rovesciando gli strateggiamenti superiori, e strascinandoli colle altre rovine, venissero a depositare tali fluviatili ammassi anche in questo seno, sotto la protezione de' monti, che lo conformano, cangiandone in qualche modo la prisca sua configurazione, e cancellando in gran parte le marche eminenti e caratteristiche, alla stessa località primitivamente impresse dal nostro Vulcano?

Ma lasciamo le induzioni, e rimettiamoci sulle osservazioni. Per codesto litologico prodotto è da vedersi parimente il monte Tinello nella contigua Val Cavallina. Separando esso l' una dall' altra valle, si può veramente considerare fra quelli, che dalla parte dell' *Est* formano la già descritta sinuosità della Val Seriana. Egli è situato alle spalle di un altro seno minore, il qual viene quivi formato dalla Val Cavallina, e all' occhio osservatore presenta un teatro di naturali curiosità.

Ridenti amenissime collinette a foggia di piccioli promontorj, e profonde dirupate orride vallette si vanno alternando, ed occupano stranamente per ogni verso il centro di questo picciolo seno. Quivi strati calcari rovesciati, tortuosi, infranti, e frammezzati da gruppi immensi di materie conglomerate, d' ogni specie, e d' ogni genere, presentano l' aspetto vero della rivoluzione del *Caos*, e dell' orrore. Là la natura vivace e spiritosa, ajutata dalla industria dell' uomo, mo, offre il prospetto di pascoli ubertosi, e di fertilissimi vigneti.

Il monte Tinello a mio parere deve aver avuta una doppia genesi. La sua pendice meridionale, dal punto, che chiamasi Colgallo, sin quasi al sito, ove dicesi alla Forcella, vedesi, alla metà circa della sua altezza (la quale certamente è minore di quella dell' altre vicine montagne) tratto tratto solcata da grandi rotture, apertevi forse dall' acque piovane sul dorso d' ammassi grandissimi di una materia vulcanica compatta, analoga all' anzi descritta; e la quale dalle impressioni dell' Atmosfera viene superficialmente disciolta. Appare che questo depesito incominciasse poco sotto l' integumento vegetabile. E chi sa quanto s' inoltri sul centro della montagna?

Superiormente a questi snudamenti il monte è rivestito di una pietra calcaria *rozza*, dell' indole già descritta, tutta bucata, e infranta, senza strateggiamento evidente, tale ammucchiata, qual forse ve l' ha lasciata piombare la forza sotterranea, che la debbe aver lanciata in aria. Dalla poca terra *fertile*, che vi si vede, spuntano i vegetabili, che la ricoprono.

Riandando poi il monte all'*Est*, ha il nucleo tutto di carbonato di calce, regolarmente strateggiato, ma quivi pure screpolato e infranto. Tutto il resto della sua periferia è coperto di un bosco foltissimo; e la pietra, che talora vi spunta dal terreno, è di una stratificazione evidente e continuata.

Il color dell' accennata terra, la qual quivi pure chiamasi *Lavezzara*, è grigio. E segnatamente i cristalli di Sorlo vi sono frequentissimi ed evidenti. Oltre le altre sostanze, che abbiamo enumerate rispetto alla Pozzolana di Vallalta, quivi essa contiene de' grandi gruppi di Lava indurata (16), in cui trovansi de' piccioli grani di Alumina, ossia Argilla vulcanizzata.

---

(16) Lava gen. I, spec. I, var. II delle riportate dalla prelodata Litologia Vesuviana.

Quello, che ho potuto osservar quivi, e non sul colle di Vallalta, è che insieme con questa specie di Pozzolana si rinviene talora una pietra Tofacea, la quale estremamente indura tratta dalla cava, e che que' villani utilmente impiegano nella costruzione de' forni, de' focolai, e delle stufe (17).

Si vedono alcuni banchi di questa terra vulcanica, anche in qualcuna delle accennate collinette, segnatamente in quella eminentissima, sulla quale signoreggia la villetta di Piano.

Io ne ho ravvisato qualche ammasso ancora lungo la strada, che dalla Valrossa conduce a Leffe; e so avervene pure sulla pendice settentrionale d' esso Tinello, e in que' contorni.

Se questi ammassi dovessimo conghietturarli derivati da un cratere, che un dì esistesse presso Vallalta, o in quest' altro seno di Val-Cavallina, dovrebbero, per colà giungere, aver fatto un volo di tre in cinque miglia. La forza del fuoco sotterraneo nelle esplosioni vulcaniche è incommensurabile. E questa riflessione all' osservator filosofo basta per la probabilità di sì gran projezione.

Discorrendo altra fiata del nostro estinto Vulcano, ho enunciato al pubblico, che avrei dato successivamente un catalogo sistematico delle produzioni lapidee di Vallalta e Tinello. Lusingandomi ora che cada in acconcio per illustrare il mio ragionamento, non tralascio d' inserirlo quantunque io creda poterlosi con maggiori osservazioni ampliare.

CATA-

---

(17) Tufi di terre e sabbie vulcaniche genere II. spec. I. var. I. della citata Litologia Vesuviana.

CATALOGO SISTEMATICO

Delle principali sostanze lapidee, che accompagnano la Pozzolana Bergamasca.

I. CLASSE.

Pietre primordiali *semplici* sulle quali veggonsi le impressioni del fuoco.

§. I.

„ Del genere di quelle a base di terra calcare, ossia di „ *Carbonato di calce*. „

1. Pietra calcare volgare, ossia carbonato di calce (*Lapis calcareus rudis Wallerii spec.* 41.)

2. Pietra calcare di grana fina (*Lapis calcareus particulis impalpabilibus Cronstedt* §. 76.)

3. Spato calcare (*Spathum calcareum Cronst.* §. 10.)

4. Pietra di porco solida (*Lapis suillus particulis impalpabilibus ejusdem* §. 23. *i.*)

5. Marmo ossia carbonato calcareo grigio oscuro (*Marmor unicolor lividum Wall. spec.* 56. *e.*)

6. Calce vitriolata ossia pietra pregna di solfato di ferro (*calx vitriolata* §. 59. *Bergman* Descrizione compendiosa del Regno minerale ec. da me tradotta e corredata di note in Bergamo 1783.)

7. Terra calcaria mista intimamente di Alumina ossia d' Argilla o carbonato di calce alluminoso (*Marga Cronst.* §. 25.)

§. II.

„ Del genere delle sostanze a base d' Argilla ossia di „ *Alumina*. „

1. Marga Argillosa (*Marga Argillacea, lubrica friabilis plastica Wall. spec.* 30.)

2. Argilla unita alla terra selciosa, ed alla marziale ossia Allumina unita alla Silice, ec. (*Argilla siliceo & martiali adunata Bergman* §. 114. *ejusdem operis*.)

3. Mica di color d' argento (*Mica argentea felium Wall.* 174. *a.*)

4. Mica oscura (*Mica fusca Wall. spec.* 174. *d.*)

5. Mica nera (*Mica nigra Wall. spec.* 174. *e.*)

Zeolite (*Argille unie avec* 2. 3 *ou* 8 *fois son poids de Silex, environ la moitié de son poids de Terre calcaire pure, & depuis une jusqu'à deux fois son poids d'Eau, sans Fer, si ce n'est accidentellement. Kirwan. Elémens de Minéralogie.*)

§. III.

„ Del genere delle sostanze a base di Terra Selciosa e
„ Silicea o *Silice*. „

1. Pietra cornea lamellosa (*Corneus rigidus non nitens apparenter lamellis parallelis Wall. spec.* 170.)

2. Quarzo (*Quarzum Cronst. sez.* 50.)

3. Feldspato (*Spathum scintillans opacum durum planis regularibus Wall. spec.* 91.)

4. Pietro-Selce (*Terra silicea argillae & peuxillo calcis unita Bergman* §. 129.)

5. Crisolite (*Crisolitus spec.* 109. *Wall.*)

6. Sorlo (*Terre Siliceuse plus ou moins parfaitement unie avec* 0, 46, *jusqu'à* 0. 83 *de son poids d'Argille depuis* $\frac{1}{14}$ *jusqu'à* $\frac{1}{9}$ *de Terre calcaire, &.* $\frac{1}{5}$ *ou* $\frac{1}{6}$ *de chaux de Fer à demiphlogistiquée et de* $\frac{1}{48}$ *à* $\frac{1}{58}$ *de Magnesie Kirwan.*)

7. Basalte (*Basaltes solidus spec.* 148. *Wall.*)

8. Basalte in piccioli cristalli (*Basaltes cristallisatus sez.* 75. *a. Cronst.*)

II. CLAS-

II. CLASSE.

,, Pietre *composte*, sulle quali vedesi impressa l' azione ,, del fuoco. ,,

1. Granito con Mica, Sorlo, e Feldspato (*Saxum quarzo, spatho scintillante & mica, in diversa proportione mixtis compositum spec. 201. e. Wall.*)

2. Granito rosso fragile (*Saxum micaceum quarzosum, spathosumque subfriabile spec. 201. i. Wall.*)

3. Porfirite (*Saxum compositum jaspide & feldspato, interdum mica & basalte Cronst. sex. 266.*)

4. Arenaria comune (*Saxa conglutinatis glanulis seu arena variorum lapidum Cronst. §. 276.*)

5. Arenaria di pasta più fina (*Lapis cotarius Wall. spec. 83.*)

III. CLASSE.

,, Rocce *scomposte*, e *reimpastate*, sulle quali comparisce l' azione del fuoco. ,,

1. Lava (*Lava micacea a base di pietra cornea gen. I. spec. I. var. I.: Litologia Vesuviana del Cav. Gius. Gioeni de' Duchi d' Angiò.*)

2. Altra Lava (*Lava a base di pietra cornea mista di Sorlo e di Mica (gen. I. spec. I. var. II., della stessa opera.)*

3. Tufo (*Tufo di terre e sabbie vulcaniche, gen. II. spec. I. var. I. della detta opera.*)

4. Altro Tufo (*Tufo terroso di apparenza compatta spec. II. 6. T. c. opera sudd.*)

Ma passiamo a dir qualche cosa anche dell' uso di questa nostra Pozzolana. Il di lei impiego nelle opere da muro che devono rimaner sott' acqua, è antichissimo in Albino, e in molti altri luoghi sì della Valle Seriana, che della Valle Cavallina principalmente.

Essa al cemento, nel quale viene impiegata, comunica una tenacità ed una resistenza indicibile. Convenne, alcuni anni sono, all'ornatissimo Cittadino Vincenzo Spini ampliare un acquedotto sotterraneo nella deliziosa sua villeggiatura d'Albino; la prima costruzion del quale constava da legal documento, essere sino del 1550. Trovò egli, che il cemento usato nella fabbrica di questo acquedotto era formato della così detta *Lavezzara*, impastata con un pò di calce viva. In duecento trent' anni incirca, dacchè era in opera questo vaso sotterraneo, non appariva che avesse mai avuta alcuna riparazione; ed era tuttora così forte e resistente il cemento, che i più gagliardi colpi di martello non bastavano a sconnetterne le pietre, e a romperne la intonacatura.

Lo stesso si ebbe ad ammirare in una Cisterna antichissima, la cui demolizione costò fatica, siccome essa stata fosse di un durissimo macigno. Altri esempj moltissimi potrei quì riportare sulla resistenza maravigliosa del cemento fatto con questa nostra terra vulcanica. In tutti i luoghi, dove fu primieramente introdotta, vi esistono le opere da più di un secolo costrutte, tuttora così ben conservate e forti, che sembrano di una recentissima costruzione.

Siffatta scoperta poi ha molto giovato ad estendere l'uso della nostra Lavezzara alla fabbrica delle cisterne anche ne' luoghi lontani. E i molti e lunghi canali sotterranei inservienti ai giuochi d'acqua, che adornano il giardino del sullodato Cittadino, e il bacino costrutto per il lago artificiale, che si vede nel medesimo, sono opere tutte fatte con un cemento, in cui entra la nostra Pozzolana.

La si potrebbe quindi molto utilmente usare nelle arginature sott' acqua lungo i fiumi, nella construzione delle dighe, e ne' grandi canali, che traducono le acque agli Edificj, ne' quali per la debole struttura de' muri tanti danni soglionsi provare. Ma già anche a quest' uopo incomincia ad essere adoperata; e giova sperare che la evidenza, la quale si fa sempre maggiore, della utilità sua ancora in quest' opre giangiungerà ad ampliarne sempre maggiormente l' impiego.

Chiuderò il mio ragionamento col dir qualche cosa anche sulla maniera, colla quale va usata.

Si prendano due terzi di questa terra della migliore che è quella del Colle di Vallalta, e un terzo di calce viva, ossia di calce caustica. Si estingua questa nell' acqua col solito metodo intanto che si distempera quella diligentemente pure nell' acqua. Poi si mischino insieme rimenandole bene, sicchè se ne faccia un impasto uniforme; vi si aggiunga un quarto di sabbia da fiume, la quale quivi è nella massima parte formata di granelli di quarzo, e di minutissime pagliette di mica.

Se il muro, che vuolsi formare, o per condotto d' acqua, o per arginatura di fiume, o per bacini, abbisogni di una solidità estrema, questo cemento si riponga anche nella commessione delle pietre, e a tutta opera, come si suol dire; e in questo caso una sottile coperta, che del cemento medesimo si distenda sul muro lungo la parete, che deve toccar l' acqua, basterà a renderlo solidissimo e resistente quanto occorre. Ma se fosse già costrutto il muro con altro cemento, e si amasse semplicemente d' intonacarne la superficie lungo l' acqua, allora la intonacatura debb' essere più forte, e della grossezza di un pollice almeno.

Quel, che conviene avvertire, in un caso e nell' altro, è che fatta l' opera, non si deve procrastinar molto a darle l' acqua, sia ella cisterna, sia bacino, o acquedotto sotterraneo. Bene impaniata la intonacatura, si metta l' opera ad uso, prima che il cemento screpoli, siccome accade, quando si lasci troppo asciugare. La fabbrica, guidata con tale avvertenza, avrà un esito felice, qualmente dimostrano le sperienze e le osservazioni praticate da tanti anni.

Quella terra *Lavezzara*, che trovasi mista d' Argilla, potrebbe forse con buona riuscita essere adoperata anche nelle opere figuline, massime quella che trovasi nelle adjacenze della descritta collina di Vallalta. E crederei che a quest' uopo potesse trovarsi meno conveniente quella dell' altro seno di Val Cavallina, nella quale la vera argilla non si trova che a pezzetti piccioli isolati nella Lava indurata, o intimamente combinata con altre vulcaniche sostanze.

Desideroso io di rintracciare donde a questa nostra Terra vulcanica possa esser derivata la denominazione di *Lavezzara*, mi è riuscito di sapere che così sia stata denominata dalla sua indole *apira*, alla foggia della pietra argillosa, della quale si formano i vasi da cucina chiamati *Lavezzi*, essendo anzi essa stata impiegata qualche volta a quest' altro uso con buona riuscita.

Possano queste poche tracce dar sosta ad osservazioni più estese e profonde, onde promovere vie-maggiormente anche la Litologia Vulcanica della mia patria.

MEMORIA

SOPRA ALCUNE NUOVE SPECIE DI PIANTE

Di Gaetano Savi

Presentata dal Socio Giuseppe Slop

Ricevuta il dì 7. Settembre 1801.

Verbena prostrata. Tav. I.

Verbena tetrandra, scabra, foliis lyrato-runcinatis, spicis laxis, bracteis longis patentibus, caule prostrato.

Fusti distesi, lunghi sei o sette pollici, ramosi. Foglie opposte; le inferiori ovali-lanceolate, dentate, assottigliate alla base in forma di picciòlo: le superiori lirato-runcinate, con lacinie incise. Spighe terminali al fusto e ai rami, lunghe al più tre pollici, cilindriche. Fiori piccoli, di color rosso-violetto, con quattro stami. Brattee frapposte, lineari-lanceolate ciliate, sul principio appoggiate ai fiori, ma dopo la fecondazione patenti, lunghe il doppio dei calici. Quattro semi nudi nel calice. La pianta è di color verde pallido, coperta di peli corti, bianchi, rigidi. Fiorisce nel Luglio. *Annua*.

Nacque nel Giardino di Pisa, da semi esotici innominati, e ci si riproduce spontaneamente.

La figura *A* rappresenta la pianta di grandezza naturale.

a il fiore colla brattea, *b* il calice, *e* i semi tutti di grandezza naturale.

c il fiore colla brattea, *d* il calice dopo la fecondazione, *f* i semi, tutti ingranditi.

Poa nana. Tav. I.

Poa foliis planis pilosis, panicula spicata, spiculis subseptem floris, valvis dorso ciliatis.

Culmi alti due o tre pollici, ramosi alla base, obliqui, sottili, cilindrici, pelosi, fogliosi, con due o tre articolazioni. Foglie piane, larghe circa una linea, coperta in ambe le superficie di peli bianchi, morbidi, più lunghi, e più folti all' ingresso della guaina, la quale non ha membrana particolare. I fiori son disposti in pannocchia ristretta in spiga, lunga da sei a dieci linee, ovale, lobata. Le spighette son composte di cinque a sette fiori, e son lunghe circa due linee. Le valve sono acute, ciliate sul dorso, turchiniccie prima del loro sviluppo, in seguito verdastre - *Annua*.

Nacque nel Giardino di Pisa da semi esotici innominati.

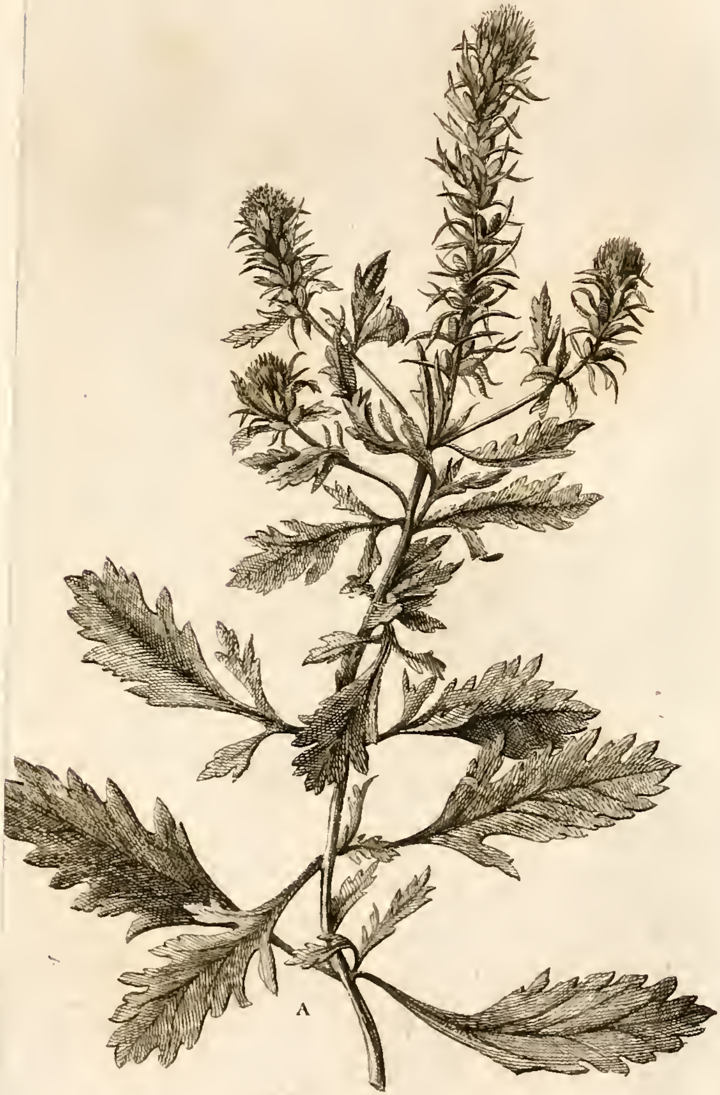
La figura *B* rappresenta una pianta di grandezza naturale.

g è una spighetta ingrandita.

Poa ramosa. Tav. I.

Poa pilosa, panicula coarctata cristata, spiculis multifloris rhombeis, culmo ramoso radicante, foliis apice involutis.

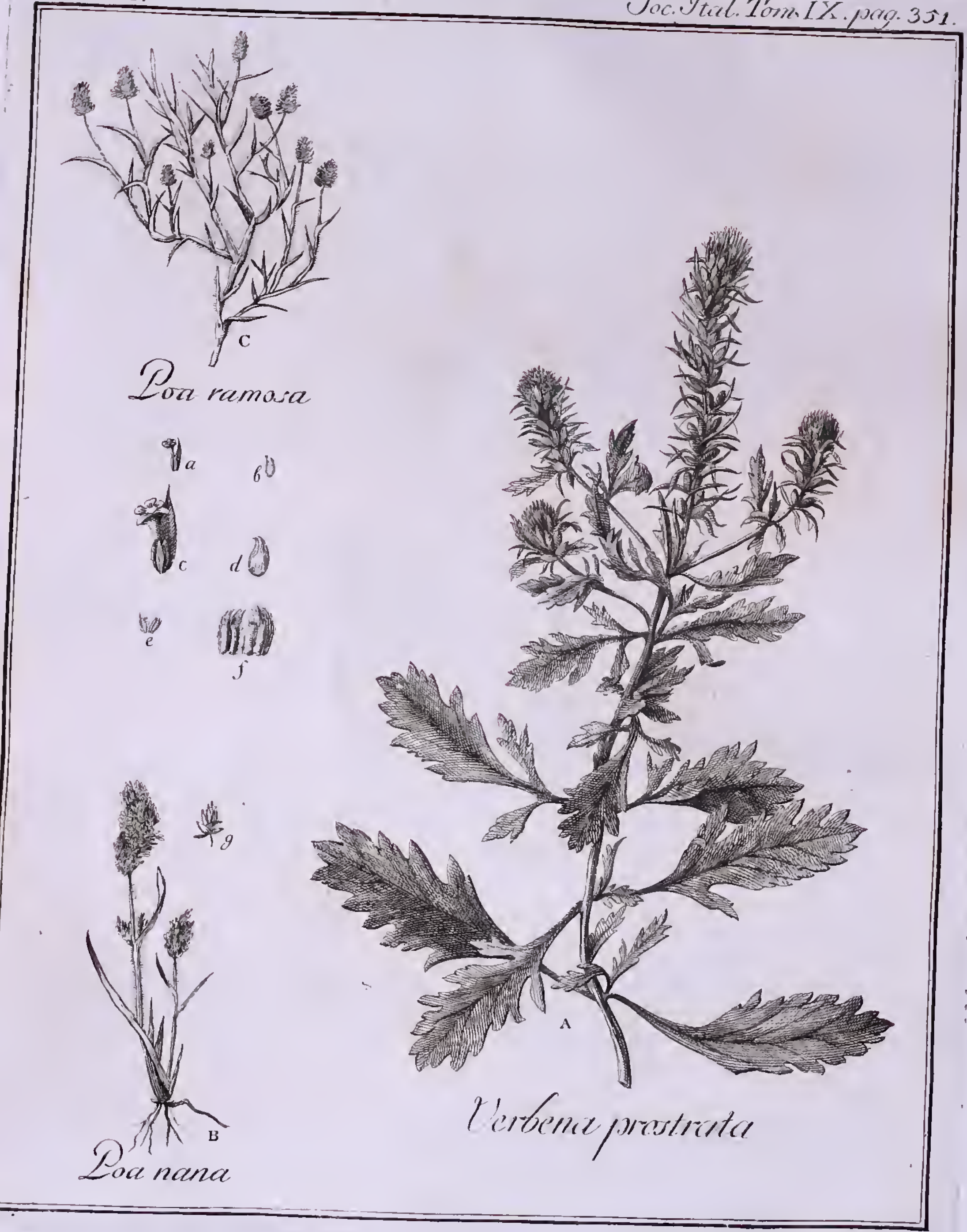
Culmi lunghi tre, o quattro pollici, piegati, o distesi, radicanti, ramosi, con rami semieretti. Rami sterili con foglie accartocciate nella sommità, formanti una punta acuta e rigida. Rami floridi con due o tre articolazioni, foglie piane, acute larghe meno di una linea, striate pelose, ciliate, con peli più folti verso l' ingresso della guaina, che è munita di una membrana cortissima, lacera. Pannocchia ristretta



Verbena prostrata

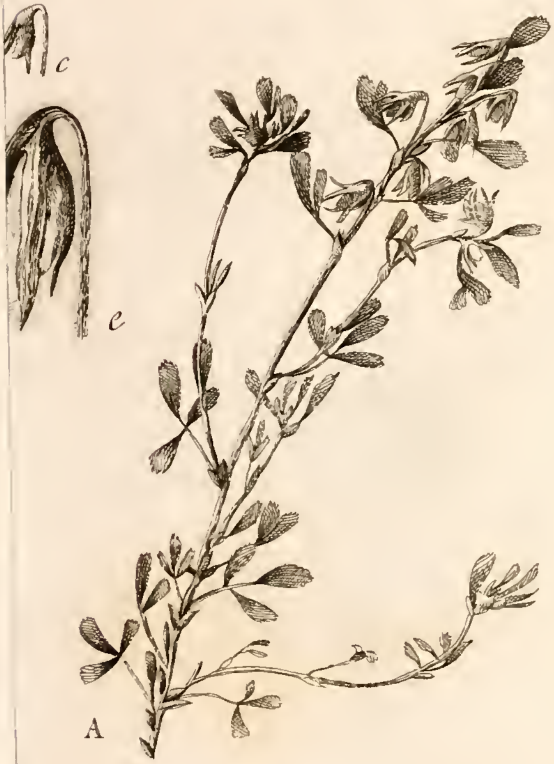
G. Gaiani sc.

Tav. VII. Soc. Ital. Tom. IX. pag. 351.


C
Poa ramosa
a
b
c
d
e
f
g
B
Poa nana
A
Verbena prostrata

G. Gaiani sc.

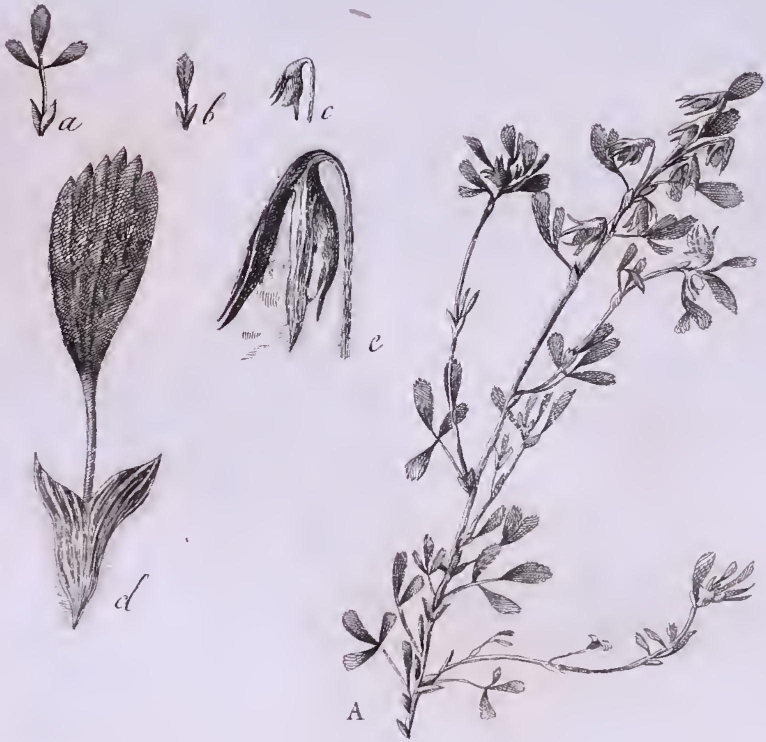
Soc. Ital. Tom. IX. pag. 351.



Ononis mollis

G. Gajani sc.

Tav. VIII. *Soc. Ital. Tom. IX. pag. 351.*



Ononis mollis

G. Gajani s.

ta in spiga, composta di 12-24 spighette ammucchiate, romboidali, formate di 11-23 fiori, i quali hanno la valva esterna striata, acuminata, pelosa, l' interna glabra Scariosa.

L' ho trovata nell' Erbario del fu Professore *Michel' Angiolo Tilli*.

La figura *C* rappresenta la pianta di figura naturale.

Ononis mollis. Tav. II.

Ononis pubescens, caule herbaceo, foliis superioribus simplicibus, foliolis cuneiformibus apice dentatis, pedunculis solitariis muticis unifloris, leguminibus cernuis.

Fusti erbacei, alti quattro o sei pollici, cilindrici, sottili. Foglie picciolate, con foglioline striate, cuneiformi, ottuse, dentellate in cima, le superiori semplici, le inferiori ternate. Stipole brevi, bifide, con divisioni ovali-acute, intiere. Fiori assillari, solitarj, peduncolati, orizzontali, con peduncoli mutici, più corti delle foglie: divisioni del calice profonde, lanceolate, acute, striate: corolle gialle, non più lunghe del calice: legumi poco più corti, piegati in giù, addossati al peduncolo. Tutta la pianta è coperta di peli bianchi, morbidi. *Annua*. Fiorisce nel Giugno. Trovasi in Toscana, nelle colline marittime.

La figura *A* rappresenta la pianta di grandezza naturale.

a una foglia inferiore; *b* una foglia superiore, *c* un fiore tutto di grandezza naturale.

d una foglia superiore, *e* un fiore ingranditi.

MEMORIA CIRCA LA DEVIAZIONE MERIDIONALE DE' GRAVI LIBERAMENTE CADENTI

Di Girolamo Saladini

Ricevuta il dì 9. Ottobre 1801.

1. FIguri il circolo (fig. 1.) APBQ il meridiano della Terra, dove s' innalza l' Edifizio LX, dalla cui cima X cada liberamente un grave. AMBK rappresenti l' Equatore, e PCQ sia l' asse di lui, che è l' istesso, che l' asse della Terra. Suppongo il Globo Terraqueo accostarsi moltissimo alla figura sferica conforme a ciò, che da tutti si ammette. La retta XLS sia la direzione del pendolo, ossia della gravità assoluta combinata colla forza centrifuga nata dalla *rotazione* diurna, che chiamo gravità *affetta*, ed ancor *combinata*. Questa propriamente è la direzione perpendicolare alla superficie delle acque stagnanti, e ai piani a questa paralleli, che sogliono chiamarsi *orizzonti* o *piani orizzontali*, e la direzione del pendolo si dice *linea verticale*; prescindo sempre dalle cagioni estrinseche ed accidentali, che potrebbero in qualche caso particolare recare alterazioni. La retta XOCD sia la direzione della gravità assoluta; cioè non combinata colla forza centrifuga. Se la Terra non è perfettamente sferica, e se gli strati non sono omogenei, non può questa direzione generalmente parlando passare pel centro della Terra. Convenendo per altro tutti gli Autori, che ànno trattato della figura della Terra, che se non è essa perfettamente sferica, pochissimo per altro ne differisca, come abbiamo di sopra accennato, siccome convengono, che gli strati di molto non si scostino dall' essere omogenei; potremo supporre, che la retta XO prolungata passi pel centro C senza timore d' alterazione sensibile nelle cose, che sarem per dire.

Mi sono di ciò assicurato ancor coll' esperimento, avendo ottenuto da' calcoli eseguiti in ambedue l' ipotesi gli stessi risultati, colla differenza, che se suppongasi non passare la retta XO pel centro, i calcoli riescono lunghi, e penosi. Essendo poi la direzione della forza centrifuga nel punto X normale all' asse PQ; poichè i corpi in vigore della rivoluzione diurna tendono a scostarsi dai centri de' circoli paralleli all' Equatore esistenti nell' asse terrestre; ne verrà in conseguenza da' principii di Statica, che i lati del Triangolo CSX, o di qualunque altro a lui simile, rappresentanti la direzione delle forze, che sollecitano il corpo X, ne rappresentino ancor la proporzione, cioè CX rappresenta la gravità assoluta, SX la combinata, CS la forza centrifuga.

II. La gravità assoluta in X si può in queste ricerche, in cui la differenza per essere picciolissima in riguardo ai tutti non induce variazione sensibile, eguagliare alla gravità assoluta in A, come costumasi dal Newton, Clerò, e da altri Matematici di somma penetrazione. La forza poi centrifuga in A comunemente si computa $\frac{1}{289}$ in circa rappresentando l' unità la gravità assoluta in A. Ma la forza centrifuga in A stà alla forza centrifuga in X, come CA stà alla distanza del punto X dall' asse della Terra eguale a GL per adequazione; cioè la forza centrifuga vicino la superficie della Terra seguita la ragione del coseno di latitudine; dunque chiamando l' angolo di latitudine $= \lambda$, avremo la forza centrifuga in X espressa per $\frac{\cos.\lambda}{289}$; ma nel triangolo CSX, essendo l' angolo ASL il vero angolo di latitudine $= \lambda$ come insegna l' Astronomia, da cui differisce pochissimo l' angolo ACL, ovvero ACO, avremo CX : CS, cioè $1 : \frac{\cos.\lambda}{289} : : \text{Sen.}\lambda :$

Sen. π, chiamando l'angolo in X $= \pi$. Sarà per tanto Sen. π $= \frac{\cos.\lambda \ \text{sen}.\lambda}{289}$.

III. Per togliere ogni scrupolo, chiamo l'angolo ACO $= \varphi$, e il raggio della Terra $= r$, sarà la forza centrifuga in O alla forza centrifuga in A, come $r\cos.\varphi : r : : \cos.\varphi : 1$; onde la sua espressione sarà $\frac{\cos.\varphi}{289}$, e posta l'altezza dell'Edificio LX $=$ OX $= a$, sarà $\frac{\cos.\varphi}{289} \times \frac{r+a}{r}$ la forza centrifuga in X, e posto come sopra l'angolo ASL di latitudine $= \lambda$, e l'angolo X $= \pi$, sarà nel triangolo SCX, CX : CS, cioè gravità assoluta a forza centrifuga, ossia $1 : \frac{\cos.\varphi}{289} \times \frac{r+a}{r}$, come $\text{sen}.\lambda : \text{sen}.\pi$; ma l'angolo esterno λ eguaglia i due interni $\varphi + \pi$, e perciò $\varphi = \lambda - \pi$; e $\cos.\varphi = \cos.(\lambda - \pi) = \cos.\lambda \cos.\pi + \text{sen}.\lambda \ \text{sen}.\pi$; dunque sostituendo avremo $1 : \frac{[\cos.\lambda \cos.\pi + \text{sen}.\lambda \ \text{sen}.\pi]}{289} \times \frac{r+a}{r} : : \text{sen}.\lambda : \text{sen}.\pi$, e perciò $\frac{[\cos.\lambda \ \text{sen}.\lambda \cos.\pi + \text{sen}.\lambda^2 \ \text{sen}.\pi]}{289} \frac{r+a}{r} = \text{sen}.\pi$; ma $\cos.\pi$ non differisce dall'unità per esser π un angolo di pochi minuti, perchè CS che rappresenta la forza centrifuga è piccolissima per riguardo a CX, che rappresenta la gravità assoluta. Dunque $\text{sen}.\pi = [\cos.\lambda \ \text{sen}.\lambda + \text{sen}.\lambda^2 \ \text{sen}.\pi] \frac{r+a}{289 \cdot r}$,

e perciò $\text{sen}.\pi = \frac{\cos.\lambda.\ \text{sen}.\lambda \times \frac{r+a}{r}}{289 - \text{sen}.\lambda \times \frac{r+a}{r}} =$

$\frac{\cos.\lambda \ \text{sen}.\lambda}{\frac{r}{r+a} \times 289 - \text{sen}.\lambda^2}$; ma la frazione $\frac{r}{r+a}$ per essere a

disprezzabile in riguardo al diametro della Terra, si può prendere senza timore d' errare per l' unità ; ed essendo $\text{sen.}\lambda^2$ una frazione, si può anche essa disprezzare al confronto di 289. Dunque avremo con tutta sicurezza $\text{sen.}\pi = \frac{\cos\lambda\ \text{sen.}\lambda}{289}$ come sopra.

IV. È proprietà nota del Circolo, che se si contino le ascisse dal centro, il rettangolo dell' ascissa nell' ordinata, allora sia massimo, quando il punto della periferia, corrispondente a tali coordinate, divida il Quadrante per metà, cioè quando sia $\text{sen. R} = \text{cos. R}$; sarà quindi in tal caso, cioè alla latitudine di 45°, $\text{sen. }\pi = \frac{\text{cos. R}^2}{289} = \text{cos. }\frac{\overline{45^\circ}^{2}}{289}$, a cui corrisponde un angolo quasi di sei minuti primi.

Alla latitudine poi di 41° : 54′ l' angolo X di deviazione per poco anche esso si scosta da sei minuti primi.

V. Cada ora il grave liberamente dalla sommità X, e suppongasi con ciò liberato da qualunque vincolo colla Terra, nè più sia costretto a girare con essa, onde non risenta forza centrifuga alcuna ; riterrà per altro in virtù della sua inerzia la velocità tangenziale eguale a quella, che compete al vertice X ; con questa velocità di projezione normale al Meridiano APBQ combinata colla gravità assoluta costante, che sollecita il corpo per CX alla discesa, descriverà esso la Trajettoria XNT, che assumeremo per una Parabola Apolloniana, secondo la Teoria delle forze centrali, la quale esiste, come è palese nel piano del circolo OTD, che passa per le due direzioni, cioè della velocità tangenziale, e della gravità assoluta ; e per ciò esso piano sarà normale allo stesso Meridiano APBQ. Il grave per tanto nel fine della caduta si ritroverà in un punto T della periferia del Circolo massimo OTD ; e condotto il Meridiano QTM per lo punto T, l' arco MT sarà la misura della distanza dall' Equatore, in cui si ritrova il grave compita la caduta. Per dimostrare adunque non esservi luogo a deviazione meridionale, fa d'uopo dimostrare, che quest' arco MT sia eguale all' arco LA distanza della base dell' Edificio da cui cadde il grave, dall' Equatore.

VI. A questo fine calo dal punto T sopra DO, in cui segansi scambievolmente il piano DTO, e il Meridiano APBQ normali trà loro, la perpendicolare TR, che sarà normale al meridionale stesso; e calata da R la perpendicolare RH sopra CQ, e congiunta HT, nascerà il piano RHT normale al Meridiano APBQ; ed RH sarà la comune intersecazione, a cui essendo QH perpendicolare, sarà perpendicolare ancora al piano RHT, e per ciò sarà normale ad HT; sarà adunque questo il cosseno, e CH il seno dell' arco MT preso il raggio della Terra per seno tutto. Prolungata HR fino che incontri il Meridiano APBQ in T, CH è ancora il seno dell' arco AT. Dunque AT, MT sono eguali; e per ciò all' uopo nostro conviene confrontare AT con AL, ovvero OT con OL, e dimostrarli eguali.

Dal punto L calata LG normale a CQ che tagli CO in Z, e chiamata l' altezza della caduta LX $= a$, la gravità affetta, che si può confondere in questo caso coll' assoluta, per essere picciolissima la differenza loro, posta $= 1$, la forza centrifuga in X $= f$, avremo $1 : f :: a : af = LZ$; inoltre nel triangolo LZO, chiamato l' angolo LZO $= \varphi$, sarà $1 : \text{sen.}\, \varphi :: ZL = af : LO = af\, \text{sen.}\, \varphi$.

VII. Sia ora t il tempo della caduta, s lo spazio percorso equabilmente colla velocità tangenziale eguale a quella del vertice X in un secondo; sarà $t\,s$ lo spazio percorso colla stessa velocità nel tempo t; or questo spazio eguaglia la retta RT per la Teoria delle Trajettorie; esprimeremo per tanto TR per $t\,s$; e posto al solito il raggio della Terra $= r$, sarà RO $= \frac{t^2 s^2}{2 r}$, giacchè RT rispetto a $2\,r$ ritrovasi disprezzabile. Nel triangolo IRO essendo l' angolo IRO $=$ LZO

$= \varphi$, sarà $1 : \mathrm{T}.\varphi :: \mathrm{RO} = \frac{s^2 t^2}{2r} : \mathrm{OI} = \frac{s^2 t^2 \mathrm{T}.\varphi}{2r}$. Dimostreremo per tanto, che sia OL = OI, cioè af sen. $\varphi = \frac{s^2 t^2}{2r} \mathrm{T}.\varphi$.

Disegnando s, come si è detto, lo spazio percorso in un secondo colla velocità tangenziale del vertice X, sarà $\frac{s^2}{2\mathrm{PL}} = \frac{s^2}{2r \cos.\ \varphi} = f$ per la Dottrina della forza centrifuga; ed essendo cos. $\varphi = \frac{\text{sen.}\ \varphi}{\mathrm{T}.\varphi}$, sarà $\frac{s^2 \mathrm{T}.\varphi}{2r} = f\,\text{sen.}\ \varphi$. Lo spazio percorso da un grave, che cada liberamente in un secondo, che è quello per cui disegniamo la gravità assoluta, da noi già si è posto $= 1$, il tempo della caduta per l' altezza a si dica t, sarà $1'' : t :: 1 : \sqrt{a}$; onde $t^2 = a$, e moltiplicando il primo membro dell' equazione quì sopra posta per t^2, ed il secondo per a, avremo finalmente $\frac{s^2 t^2 \mathrm{T}.\varphi}{2r} = fa$ sen. φ, cioè OI = OL come dovevasi dimostrare. Cadendo adunque il punto I nel punto L sparisce qualunque deviazione meridionale nella caduta libera de' gravi.

VIII. Fin quì non si è avuto riguardo alcuno alla resistenza dell' aria, da cui si sostiene porzione della gravità assoluta, e perciò si prolunga il tempo della discesa. Il Problema della caduta de' gravi per mezzi resistenti ha occupato ed occupa ancora i Matematici di prima sfera; ma le Teorie fissate in varie ipotesi di resistenza non sempre sono conformi a ciò, che osservasi in natura; rimane adunque in questa materia dell' oscurità e dell' incertezza. Sembra però che l' esperienza mostri, trattandosi d' altezze mediocri, e di corpi gravissimi, che la resistenza dell' aria non alteri di molto le leggi della caduta nel voto. Il Riccioli, Muschenbroek, ed altri di ciò ci assicurano; non mancano però alcucuni, che il contrario sostengono, come il P. Dechales, che impugna apertamente le sperienze del Riccioli, portando in contrario le sue esperienze, ripetute, come egli dice, più di mille volte sempre collo stesso successo; ma l' esperienze del Dechales a noi sono assai sospette. Se dovessimo attenerci ad esse, le sfere pesantissime si ridurrebbero cadendo per l' aria al moto equabile dopo aver percorsi piedi parigini 123; il che molto si scosta dalla regola, che si legge nel Newton, e nello Sgravesand per determinare questo *Spazio*. Princ. Mat. Lib. 3. Prop. 40. Sgravesand Physices Elementa Math. Lib. 3. Cap. 16. Scolio 7. Dunque supporremo nella discesa de' corpi pesanti per l' aria, che la gravità costante resti alterata di poco, e che la Trajettoria non differisca molto da una Parabola; quindi chiamato s al solito lo spazio percorso in un secondo colla velocità tangenziale, e t' il tempo della caduta, sarà la retta RT ancor in questo caso espressa per $t' s$; onde l' arco OI verrà disegnato per $\frac{s\,s\,t'^2\,\mathrm{T}.\varphi}{2\,r}$, la quale espressione non si potrà più eguagliare all' espressione $a\,f$ sen. $\varphi = \frac{s^2\,\mathrm{T}.\varphi.t^2}{2\,r}$, la quale rimane inalterata in tutti i suoi elementi. Laonde chiamando D la deviazione meridionale avremo $\mathrm{D} = \frac{s^2\,\mathrm{T}.\varphi}{2\,r}(t'^2 - t^2)$ del grave cadente per un mezzo, che resista alla sua caduta.

IX. Abbiamo detto, che s disegna lo spazio percorso in un secondo colla velocità tangenziale del punto X; se dunque S disegni la velocità tangenziale dell' Equatore, sarà S cos. $\varphi = s$, e sostituendo sarà $\frac{\mathrm{S}^2\,\overline{\cos.\varphi}^2\,\mathrm{T}.\varphi}{2\,r} \times (t'^2 - t^2) = \mathrm{S}^2\frac{\cos.\varphi\ \mathrm{sen}.\varphi}{2\,r} \times (t'^2 - t^2) = 0,053$ cos. φ sen. $\varphi\ (t'^2 - t^2) = \mathrm{D}$. Pongo $\frac{\mathrm{S}^2}{2\,r} = 0,053$. Compiendosi la rotazione della Terra in ore 23°:

56′

$56' : 4''$, cioè in $86164''$; in un secondo di tempo si percorrono 15, 0, $4''$ d' Equatore; ed eguagliando ciascun secondo d' Equatore 96 piedi parigini, assumo il raggio dell' Equatore di piedi Parigini 19613790, ne viene, che in un secondo si percorrano piedi parigini 1444 da ciascun punto dell' Equatore, con questi dati si ritrova subito $\frac{S^2}{2r} = 0, 053$.

X. Il Sig. Guglielmini in un Opuscolo stampato in Roma nel 1789, il quale diede in seguito occasione al Sig. Bonati di pensare alla deviazione meridionale, proponendosi un' altezza di 340 piedi parigini, e fondandosi sulli esperimenti del Sig. Desaguliers, stabilisce il tempo della discesa d' un grave per tale altezza nell' aria di $5''\frac{1}{4}$; indipendentemente poi dalla resistenza dell' aria il tempo della caduta sarebbe di $4''\frac{3}{4}$.

Posto ciò si ricerchi la deviazione meridionale per mezzo della formola sopra stabilita. La latitudine di Roma si pone eguale a $41° : 54'$; da cui defalcati $6'$, sarà l' angolo $\varphi = 41°, 48'$; onde sen. φ cos. $\varphi = 0, 5$; il quadrato di $5''\frac{1}{4}$ meno il quadrato di $4''\frac{3}{4}$ si ritrova $= 5$; fatta la sostituzione, si otterrà $0, 053 \text{ sen. } \varphi \times \text{cos. } \varphi \, (t^2 - t^2) =$ Pollici uno, e linee sette.

XI. Lo stesso Autore nel Libro del moto diurno della Terra pubblicato in Bologna nel 1792 ci assicura, che un globo di piombo del diametro d' un pollice parigino consumava nel discendere liberamente dall' altezza di piedi 241 minuti secondi $4''\frac{1}{5}$; quando senza la resistenza dell' aria avrebbe impiegato soltanto $4''$. La latitudine della Torre degli Asinelli si pone $44° : 30'$, e defalcando $6'$ rimane $\varphi = 44° : 24$; ed il prodotto sen. φ cos. $\varphi = 0, 5$; e la differenza za de' due quadrati dei tempi 1, 64; introdotti questi valori nella formola, abbiamo un mezzo pollice in circa di deviazione meridionale.

XII. Esperienza del Signor Newton. Newt. Princ. Mat. Prop. 39. Lib. 2. Scolio. Un globo di vetro ripieno d'aria del diametro di cinque dita di Londra, il cui peso era 483 grani, cadde dall' altezza di 220 piedi di Londra in minuti secondi otto, e dodici terzi. Questo istesso globo nel voto, come tutti gli altri gravi, per la Teoria Galileana dee cadere dalla stessa altezza in secondi 3″ e terzi 42‴ conforme il calcolo fatto dallo stesso Newton, ed i suoi Commentatori le Sieur, e Jaquier. La latitudine di Londra è $54° = \lambda$, onde $\text{sen.}\lambda \frac{\cos.\ \lambda}{289}$ sen. π, 0, 001645, e $\pi = 6'$ in circa; e perciò $\varphi = \lambda - \pi = 53° : 54'$, e $\text{sen.}\ \varphi \cos.\ \varphi = 0,\ 476$; la differenza de' quadrati de' tempi $= 53, 5$; introdotti questi valori nella formola, si ritrova la deviazione meridionale Piedi 1, Pollici 4, e linee due.

XIV. Esperienze del Sig. Desaguliers riportate dal Newton nel luogo sopra citato. Una Vessica del Diametro di pollici inglesi 5, 3 cadeva dall' altezza di piedi 272 inglesi in minuti secondi 18″, 5. Nel vacuo cadde dalla stessa altezza, come tutti gli altri gravi, a norma de' calcoli fatti nello sperimento superiore dal Newton, e da' suoi Commentatori in minuti secondi 4″, 115.

Una palla di Piombo di libbre due Romane cadeva dalla istessa altezza in minuti 4″, 250. La differenza de' quadrati de' tempi nel primo caso 325, 3; nel secondo caso 1, 13; $\text{sen.}\ \varphi \cos.\ \varphi = 0,\ 476$, fatta la solita sostituzione nella formola della deviazione meridionale, avremo nel primo caso una deviazione di piedi Inglesi otto, e nel secondo caso di piedi Inglesi 0, 03.

XV. Quando i gravi, che cadono da mediocri altezze sono pesantissimi l' esperienze riescono più sicure, poichè meno risentono l' influsso delle cause estrinseche alteranti; ma la differenza de' tempi della caduta nel voto, e nell' aria è sì picciola, che qualunque errore nell' osservazione, e ne' dati su cui si stabiliscono i calcoli, benchè sia minimo, può portare un divario non disprezzabile ne' risultati. Se poi li corpi sono leggeri si prolunga di molto il tempo della caduta per l' aria, da cui nasce una deviazione meridionale assai grande. Ma al contrario i corpi leggerissimi cedono alle più picciole impressioni, per cui deviano enormemente dal perpendicolo, e immergono gli esperimenti in un mondo di difficoltà e d' incertezze; oltre che in questa ipotesi venendo di molto alterata la gravità, non potendosi neppure per adequazione considerare per costante, non potremo con sicurezza confondere le Trajettorie con la Parabola.

XV. Altra considerazione si aggiugne (fig. 2) molto interessante. Sia C il centro della Terra, ed XC la direzione della gravità assoluta, ed MXN della gravità combinata. La gravità specifica del corpo cadente sia 1, quella del fluido sia n; il peso assoluto del grave si dica P, sarà il peso del fluido di egual volume nP; dunque il corpo in X verrà spinto da due forze una P per la direzione NX; poichè il fluido come aderente alla Terra risente la forza centrifuga, e premendo per la direzione della gravità combinata colla forza centrifuga spinge in su il corpo immerso per la direzione MXN. Facciasi $1 : n$ così CX : XN, e condotta CO eguale, e parallela ad NX, e congiunta XOF, sarà questa la direzione della gravità da combinarsi colla velocità tangenziale; onde la Trajettoria non passerà più per CX, ma per XO. L'angolo poi CXO non è sempre disprezzabile. Sia per esempio la gravità specifica del corpo cadente alla gravità specifica del fluido come $2 : 1$; sarà CX : CO : : sen. FOC : sen. CXO : : $2 : 1$; ma gli angoli sono come i seni trattandosi di angoli picciolissimi. Dunque l' angolo FOC = FXM sarà doppio dell' angolo CXO, = CXM angolo di deviazione primiera; dunque in questo caso l' angolo di deviazione sarà il doppio di quello, che si otterrebbe, se la gravità specifica del fluido fosse spregevole in confronto di quella del grave cadente; il che se sussiste, potrebbe dar luogo ad esperienze d' altro genere.

Negli esperimenti presi dal Newton coi corpi cadenti in vasi ripieni d' acqua, e la cui gravità specifica non differiva di molto dalla gravità specifica dell' Acqua, per quanta diligenza usasse, si accostavano essi a' lati del vaso, e alle volte vi urtavano prima di giungere al fondo; onde prescrive, che per avere esperimenti di cui potersi fidare (esaminava egli l' alterazione che soffrono i gravi, che discendono in mezzi resistenti) si procuri, che le due gravità specifiche, cioè del solido, e del fluido, non si accostino di molto all' eguaglianza. *Ideoque pondus globi in aqua debet esse plurium granorum, ut experimentum certum & fide dignum reddatur*, sono sue parole (Lib. 2 Prop. 40 Schol.). Alle cagioni, di cui egli sospetta potersi attribuire le sovraccennate irregolarità, potrebbesi forse aggiungere ancora questa deviazione? Ma non giova inoltrarsi in queste ricerche, che richieggono molte speculazioni, e molto tempo.

Ciocchè abbiamo fin quì dimostrato ha luogo nella supposizione, che il grave mentre cade sia totalmente staccato dalla Terra, onde non risenta in conto alcuno la forza centrifuga, ritenendo soltanto la velocità tangenziale in vigore dell' inerzia. Ma se la cosa andasse altrimenti, come alcuni sospettano, e se la causa della diurna rotazione modificasse la di lui velocità mentre discende, onde fosse costretto a rotare anche esso con quella velocità, che conviene al luogo dove ritrovasi; cosa di cui io per altro non saprei formare idea, ruinerebbero i fondamenti, su cui abbiamo appoggiato i nostri calcoli.

LET-

LETTERE DEL CH. DOTT. BONATI AL CANONICO SALADINI .

Ferrara 15. Settembre 1797.

Ho avuto la vostra Memoria sopra la deviazione meridionale de' gravi cadenti . Vi dissi nell' ultima mia , che anche nel voto io trovo sempre una deviazione meridionale . Ora vedo , che questa da Voi si esclude , ma di una maniera , che non contradice alla mia dimostrazione , perchè questa porta (trattandosi di altezze di 200 , o 300 piedi) ad un deviamento sì piccolo, che ha potuto sfuggire alla vostra dimostrazione , che non è rigorosa , perchè alcune piccole differenze da Voi si trascurano , come in tanti casi si pratica .

Obbligatiss. , Divotiss. Serv.
ed Amico
Teodoro Bonati .

Ferrara 16. Settembre 1797.

A. C. V' accorgerete , che CAQ dev' esprimere un quadrante (fig. 3.) di un Meridiano terrestre . Rappresenterò quì la gravità assoluta colla XZ , e la forza centrifuga colla XD , lati del parallelogrammo ZD , delle quali forze la gravità combinata è XL altezza della torre che è normale alla superficie regolare della Terra in L . La Trajettoria del grave cadente da X sia la XNT prossimamente una Parabola apolloniana dell' asse XZ*a* , il cui piano è da concepirsi normale al piano CALQ . L' arco LE è descritto colla GL raggio del parallelo della base L della torre , cosicchè anche il piano GLE è da concepirsi normale al piano CALQ . Quindi i due piani *a*XN , GLE si tagliano in Z punto , sul quale insistono unite l' ordinata parabolica ZN, e la circolare ZE ambe perpendicolari al piano CALQ.

Proverò ZN > ZE. Col raggio PX descrivo l' arco XM del parallelo del punto X. Presa XB = XD = LZ e condotta l' ordinata BM, sarà XM il descritto dalla sommità X della torre, mentre il grave cadrebbe da X in B animato dalla sola forza centripeta XB eguale alla centrifuga XD; e mentre cadrebbe da X in Z spinto dalla sola gravità assoluta, ed in conseguenza mentre descrive l' arco parabolico XN dell' ascissa XZ animato dalla gravità, e dall' inerzia, la quale lo allontana uniformemente dal piano CALQ colla velocità, ch' ebbe partendo da X; cosicchè Voi vedete, che dev' essere ZN = XM. Ora noi abbiamo i due seni versi XB, LZ per costruzione eguali; e perchè in oltre il raggio PX è maggiore del raggio GL sarà BM > EZ. Ma ho detto ZN = XM, ed è XM > BM, e BM > ZE. Dunque ZN > ZE.

Ma il punto E è sulla superficie della terra. Dunque il grave arriva in N non avendo ancora toccato terra.

Sia T il punto della sua Trajettoria, nel quale incontra la terra; si vede, che la porzione XZN della Parabola cade tutta a tramontana del parallelo della base L della torre; e che tutto il tronco parabolico ZNTR cade a mezzodì dello stesso parallelo. Dunque T è più meridionale della base L; onde una deviazione meridionale (prescindendo dalle resistenze) sempre v' è.

Nel caso nostro PX supera GL di assai poco; e di poco anzi pochissimo, XM supera BM. Egli è quindi, che il punto T cade presso che in N. A Voi che avete assunto PX come eguale alla GL, e la XM come eguale alla BM, dovea appunto risultare una deviazione meridionale = o.

Con pienissima stima sono vostro

Devotiss., ed Obbligatiss. Serv.
ed Amico Vostro.
Teodoro Bonati.

RISPO-

RISPOSTA DEL CANONICO SALADINI AL CHIARISSIMO PROFESSORE BONATI.

Bologna 9. Ottobre 1797.

A. C. Rispondo alla vostra gratissima de' 16. del passato, in cui con somma penetrazione ed eleganza al vostro solito discorrete della deviazione meridionale de' gravi cadenti nel voto. Certamente, parlando a tutto rigore, questa deviazione dee ammettersi, qualunque poi essa siasi, trattandosi ancora d' altezze minime al confronto del raggio della Terra; ed io in ciò sono bene d' accordo con Voi. Ma Voi dovete concedere essere essa affatto insensibile più di quello, che si crede. La prova, che ne recai nella Memoria inserita negli Atti di Siena lo fa vedere bastantemente, mi astenni dal calcolo, riputandolo superfluo, il quale mi è piaciuto presentemente intraprendere per sottoporlo al vostro acuto diſcernimento.

Prima d' ogn' altra cosa determino la differenza delle due ordinate ZE, ZN da voi dimostrate diseguali, la prima esistente nel piano del parallelo LE, descritto col raggio GL, la seconda nel piano della Parabola XN, ambedue perpendicolari al piano del meridiano ALQ, intersecandosi nell' ordinata comune al punto Z. Poiche XD, BX, ZL debbono essere eguali, le quali non sono che di poche linee, come in seguito dimostreremo; i due rettangoli $2GL \times ZL - \overline{ZL}^2$; e $2PX \times BX - \overline{BX}^2$ avranno tra loro la istessa proporzione, che le due rette GL, PX; e la ragione subduplicata d' esse sarà eguale a quella delle due ordinate $ZE, BM = XM = ZN$; non fò conto alcuno della differenza tra XM, BM, essendo d' un ordine maggiore delle differenze, che siamo per valutare, come dimostro nella Geometria degli Infinitesimi; siccome non fò conto d' altre differenze, quando non mi alterano sensibilmente il valore della quantità che determino. Avremo per tanto $ZE : ZN :: \sqrt{GL} : \sqrt{PX}$. Sia $GL = 1$, $\frac{PX - GL}{GL} = \delta$; sarà $PX = 1 + \delta$, $\sqrt{PX} = 1 + \frac{\delta}{2}$ e $\sqrt{GX} - \sqrt{GL} = \frac{\delta}{2}$; onde $ZN - ZE : ZE :: \frac{\delta}{2} : 1$, e $ZN - ZE = \frac{\delta ZE}{2}$. Suppongasi la latitudine ASL di 45°, da cui ricavasi l' angolo SXa di 6′ minuti, un tantino meno, come vedesi nella Memoria citata. Il raggio della terra sia Piedi parigini 19747351, e l'altezza della mole LX, da cui cade il grave piedi 300, ciò posto si ritrova $GL = 13961377$, e PX piedi 13961589, e $\frac{\delta ZE}{2} = \frac{ZE}{131710}$. Resta da determinare ZE. La caduta teoretica di 300 piedi, porta 4″, 45 di tempo, il quale pochissimo differisce dal tempo della caduta reale; in questo tempo dal punto L si percorrono piedi 4530, ossia linee $652320 = ZE$. Dunque $\frac{ZE}{131710} = 5$ linee in circa; differenza tra le due ordinate ZN, ZE.

Sia ora T il punto, in cui la Parabola raggiunge la Terra; si cali da esso all' asse AX la normale TR, e pel punto R si conduca gRO parallela a GL, che tagli SX in Y, e si prenda $Xb = RY$, e si conduca l' ordinata bm. Sia il parametro della Parabola $= 2p$, $XR = x$, $XK = LX$, essendo la loro differenza di secondo ordine per la Geometria degli Infinitesimi, $= a$; aK, che può liberamente confondersi col raggio della Terra $= r$; $z = RK$. Avremo l' Equazione $2px = 2rz - z^2$; ma $z = x - a$. Dunque $x^2 \begin{array}{l} -\,2r \\ -\,2a \\ +\,2p \end{array} x = -\,2ra - a^2$; ed $x = r + a - p \pm \sqrt{r^2 + p^2 - 2rp - 2ap}$; e posto $r - p = q$, sarà $x = a$ +

$+ q \pm \sqrt{q^2 - 2ap}$; ed essendo $2ap$ picciolissima al confronto di q^2, sarà $x = a + q \pm \left(q - \frac{ap}{q}\right)$; il segno + confà al caso nostro; sarà per tanto $x = a + \frac{ap}{q}$, e $z = RK = \frac{ap}{r - p}$.

Nel triangolo ZLX, chiamo $XZ = y$, $LZ = ny$; posta la gravità assoluta alla forza centrifuga come $1 : n$, $LX = KX = a$, e l' angolo SLZ eguale all' angolo di latitudine $ASL = \varphi$, avremo l' Equazione $y^2 = n^2 y^2 + a^2 + 2a \cos.\varphi\, ny$; $a \cos.\varphi$ è l' intercetta tra il punto L, e la perpendicolare calata dal punto X sopra ZL prodotta. Essendo n^2 un numero picciolissimo; l' Equazione si riduce a $y^2 - 2nya \cos.\varphi = + a^2$, ed $y = na \cos.\varphi \pm \sqrt{n^2 a^2 \cos.\varphi^2 + a^2} = na \cos.\varphi \pm a$. Il segno positivo è quello, che fa al caso nostro. Dunque $ZK = na \cos.\varphi$. Passiamo al calcolo numerico di $\frac{ap}{r - p} = RK$, e di $na \cos.\varphi = ZK$.

Posto il raggio della Terra come sopra = 19747351 Piedi parigini; in un secondo si percorrono da ciascun punto del parallelo della latitudine di gradi 45° piedi 1018, il cui quadrato diviso per piedi 15 spazio, che si percorre dal grave in un secondo, avremo il quoto, che diviso per metà determina il semiparametro $= p$ della nostra Parabola, eguale a 34544 piedi parigini; e fatta la sostituzione nella formola $\frac{ap}{r - p}$, si ritrova RK = 75, 6 linee. La proporzione della gravità assoluta alla forza centrifuga nella latitudine di 45°, adoperando il raggio della Terra sopraesposto si ritrova di 2177, 377 : 5, 34, ossia di 100000 : 245, perciò avremo $n = 0,00245$; inoltre abbiamo $\cos.\varphi = 0,707$, ed $a = 300$ piedi; eseguite le sostituzioni si ritrova $ZK = an \cos.\varphi = 74,83$ linee. Onde $RK - ZK = RZ = 0,77$ linee.

Molto delicato è il calcolo per determinare RZ; da questa si potrebbe passare a determinare YL, e perciò LO, essendo nel triangolo YLO rettangolo in L noto l'angolo $OYL = ASL$ di latitudine; ma sarà più sicuro espediente non servirsi della determinazione di RZ, che per assicurarla spregevole al paragone di RX, e di ZX; poichè ogni picciola differenza nell' espressione del raggio terrestre, della gravità assoluta, della forza centrifuga, delle linee trigonometriche ec. porta variazione sensibile nei rapporti dell' espressione di ZR; ma in ogni caso si scopre ZR picciolissima e disprezzabile al confronto di RX; dal che deducesi, che la differenza tra RY, ZL sia ancor essa disprezzabile in riguardo di ZL; ed essendo ZL di alquante linee, d'altrettante sarà RY; quindi ancor RO dovrà essere di alquante linee, e disprezzabile in proporzione di gO, come $bX = Ry$ lo è di PX. Essendo pertanto $2gO \times RO - \overline{RO}^2 = \overline{RT}^2$, $2PX \times bX - \overline{bX}^2 = \overline{bm}^2 = \overline{RT}^2$; sarà $2gO \times RO - \overline{RO}^2 = 2PX \times bX - \overline{BX}^2$, e $gO \times RO = PX \times bX$ per adequazione. Dunque $gO : PX :: bX = RY : RO$, e $PX - gO : gO :: RO - RY = YO : RY$, ed $\frac{YO}{RY} = \frac{PX - gO}{gO} < \frac{PX - CL}{CL} < \frac{2}{131710}$, ed $YO < \frac{2RY}{131710}$. In un secondo in vigore della forza centrifuga alla latitudine di gradi 45° si percorrono linee 5, 34, ed in 4″, 45 tempo della caduta di piedi 300 si percorrono linee 106; avrassi perciò $YO < \frac{2 \times 106}{131710}$, cioè < di 0, 0016 di linea; ed $OL <$ di 0,001136 di linea; essendo $YO : OL :: 1 : \text{sen.}\varphi$ angolo di latitudine.

Ecco adunque dimostrato non solamente la deviazione meridionale de' gravi cadenti da altezze picciole per riguardo al diametro terrestre, spregevole anche essa; ma inoltre disprezzabile al segno, che si può contare quasi nulla, come già provai nella mia Memoria inserita negli Atti dell'Accademia di Siena, e che non vi sia perciò speranza da pote-

Fig. I.

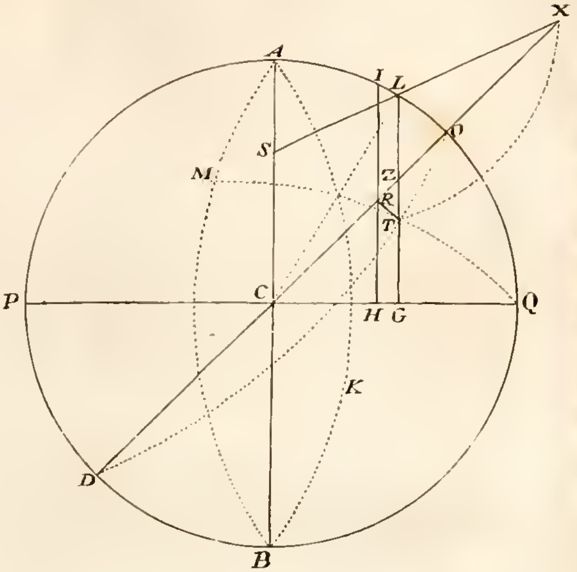

X
A
I
L
O
S
M
Z
R
T
P
C
H
G
Q
K
D
B

Fig. III

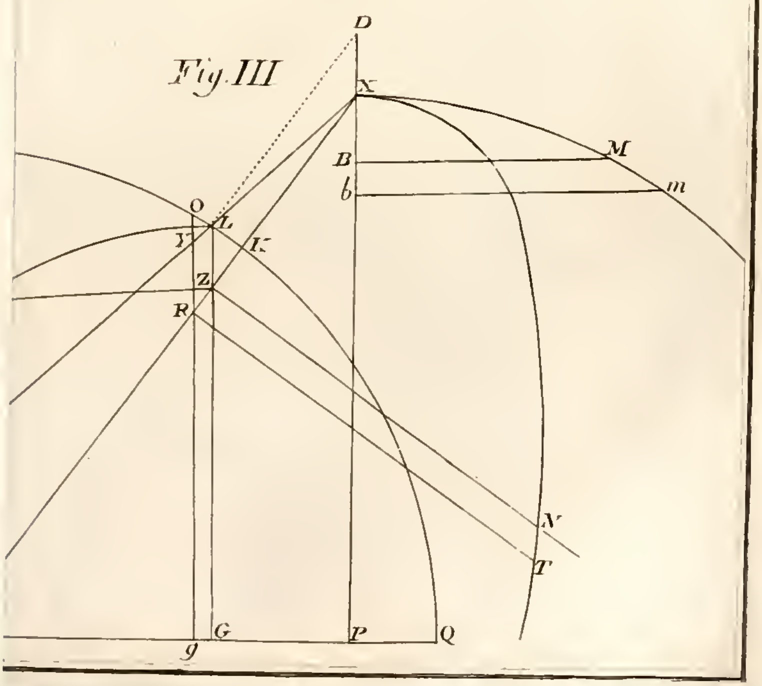

D
X
M
B
b
m
O
L
Y
K
Z
R
N
T
g
G
P
Q

Fig. II.

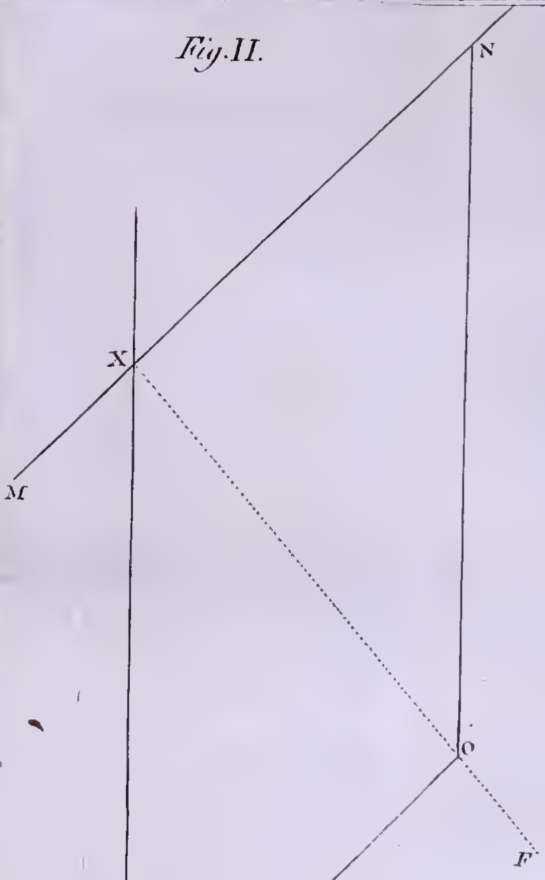


Fig. I.

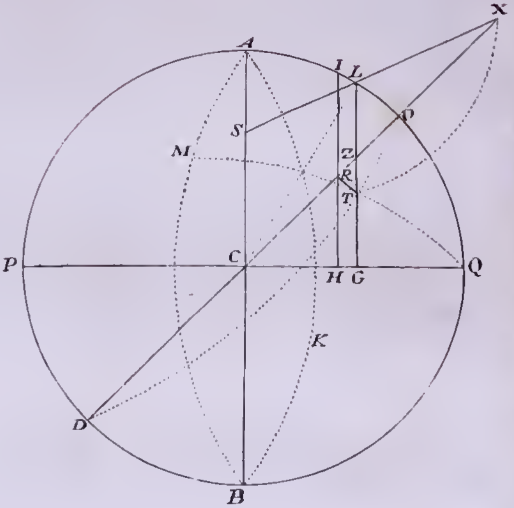
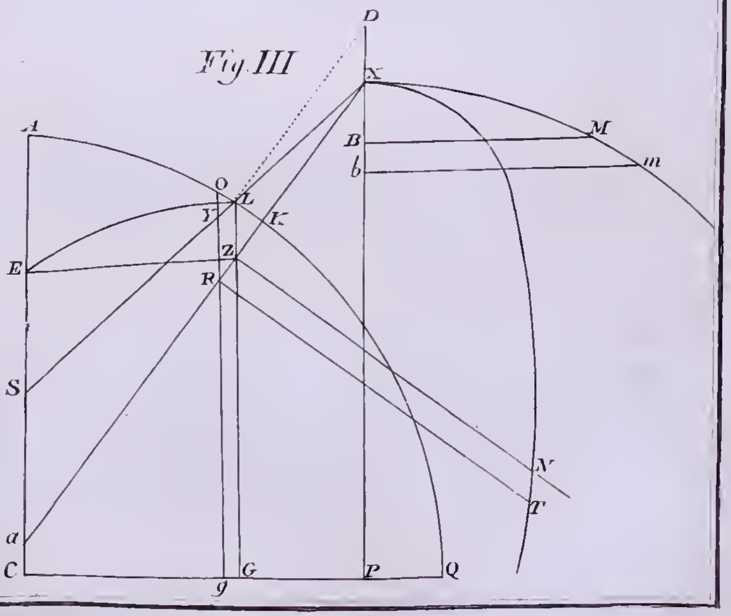

X
A
I
L
S
O
M
Z
R
T
P
C
H
G
Q
K
D
B

Fig. III


D
X
M
B
b
m
A
O
L
Y
K
E
Z
R
S
N
T
a
C
g
G
P
Q

tere scegliere altezza tale di caduta , onde risulti la deviazione meridionale sensibile , come ho sempre sostenuto prescindendo dalla resistenza del mezzo per cui cade il Corpo .

Ed in attenzione del vostro autorevole giudizio, mi confermo al solito

Vostro Obbligatiss. Servo,
e Amico vero
Girolamo Canonico Saladini .

ESAME

DI ALCUNE STORIE SPETTANTI ALLA CRAVIDANZA DELLE MULE

Di Leopoldo M. A. Caldani

Ricevuto il dì 11. *Ottobre* 1801.

La letteraria amichevole corrispondenza che passò pel corso di non pochi anni fra il celebratissimo *Carlo Bonnet* Ginevrino, e la persona mia, si aggirò, quattordici o quindici anni sono, su l' esame di alcune storie, spettanti a casi di Mule gravide, ed all' esistenza di certi altri Quadrupedi singolari, che chiamansi *Jumarts* dai Franzesi; *Bif* e *Baf* dai Piemontesi (secondo che si credono generati dall' accoppiamento del Toro con un' Asinella, ovvero con una Cavalla); *Giumeni* o *Giumani* dagli Italiani, ed anche volgarmente *Bosmuli*. Un tal esame era diretto a decidere, se quelle storie siano tali, che, di niuna necessaria circostanza mancando, debbano perciò le gravidanze delle Mule annoverarsi fra le poche verità, che appartengono al Regno delle Fisiche.

Prima però di farmi a narrare quanto fra l' Illustre Filosofo Ginevrino e me medesimo fu scritto intorno alla fecondità, o sterilità de' Muli, stimo conveniente il richiamare alla memoria de' Leggitori, che il Sig. *Bonnet* nella prima edizione dell' opera sua, intitolata *Considerations sur les corps organisés* (*a*) portava opinione, che i Muli non generassero: e ne aveva data, congetturando, una qualche ragione apparentemente lodevole, scrivendo, che *des vaisseaux que le fluide seminal n'a pu développer, ou qui sont demeurés obli-*

(*a*) Art. LXVII.

obliterés de la conception, donnent lieu à cette impuissance. A questo tratto della penna sua fece, nella nuova edizione, l' aggiunta seguente: *quand j'écrivois ceci j'ignorois qu'il y a des preuves du contraire. Je les indiquerai ailleurs*. Egli è l' esame di queste prove in contrario che formerà il soggetto di questa qualunque Memoria, che consegnai alla penna quattordici anni sono.

Non entreranno però in questo esame le storie lasciateci da alcuni antichi Filosofi e Scrittori, che attestarono il parto di alcune Mule. Noterò una sol cosa (che potrebbe forse essere stata notata da altri) nel ricordo tramandatoci da *Plinio*, che scrive; *est in annalibus nostris Mulas peperisse saepe; verum prodigij loco habitum:* dove pare a me, che quel *saepe* avrebbe fatto assolutamente svanire ogni ombra, o sospetto di prodigio. Smentirono questi racconti altri Autori di nome; e fra questi, come si legge presso il nostro *Vallisnieri* (*b*), *Pierio Valeriano;* il quale, oltre di aver fatta tacere la favola a' suoi tempi comune delle frequenti gravidanze delle Mule di Egitto, ci avvisò anzi che gli Egizj, volendo indicare una donna sterile, co' loro gerolifici disegnavano una Mula.

Passerò dunque tosto ad esaminare quelle gravidanze di Mule, le quali secondo l' amico Sig. *Bonnet* hanno tali caratteri di verità, e tanto di peso, che lo fecero cambiar di opinione. Tre sono le storie di Mule gravide, che si leggono nell' Opere sue (*c*). La prima ei la trasse dalle pag. 16, e 17 del Tomo VII del supplemento del Sig. di *Buffon*; il quale scrive che il dì 19 di Maggio del 1769 una Mula alla Martinica partorì un bel Mulo di pelo lungo e nerissimo. Non si seppe per altro se fosse stata coperta da un Mulo, o da un Asino; pure perchè somigliava piuttosto a questo, che a quello, ne inferì il suddetto Sig. di *Buffon*, ch' era figlio di un Asino. Questo fatto è attestato legalmente.

(*b*) Op. fis. med. Tom. II. pag. 237. e seg.

(*c*) Luog. cit. Art. CCCXXXVI. not. addition. (*) ✠✠.

Il secondo esempio di Mula gravida è noto per una lettera del chiarissimo Signor *Senebier* di Ginevra, che porta la data delli 16 Ottobre 1772. Con essa avvisa il suo Concittadino Sig. *Bonnet*, che certo Sig. *Poyen*, Marchese di Santa Maria, il quale scriveva allora la Storia naturale della Guadalupa, gli riferisce come un fatto da non rivocarsi in dubbio, che una Mula, la quale serviva a trasportare le canne di zucchero alle Terre del nobil suo Genitore, restò gravida, saranno in circa quattro anni, (così sta scritto nella lettera del Sig. Marchese, la quale però è priva di data) ma che abortì poco dopo un feto ben distinto. Il Sig. Marchese aggiugne, che questa Mula ingravidò nuovamente, e portò il feto sino alla maturità. Morì però allora, ed avendola fatta aprire vi si trovò un ben formato Muletto.

Finalmente il terzo esempio, o piuttosto un numero di siffatte gravidanze, fu asserito dal Sig. *Bourgelat* all' amico Sig. *Bonnet*; avendogli scritto che una Mula avea partorito alla Martinica (ed è forse quella stessa di cui aveva fatto menzione il Sig. di *Buffon*), e altre Mule avevano fatto lo stesso nelle Provincie meridionali del Regno: e benchè, soggiugne il Sig. *Bourgelat*, questi avvenimenti siano rarissimi, bastano essi non pertanto per opporsi con forza alla supposizione d' impossibilità che i Muli d' ogni spezie possano essere fecondi.

Sono queste le Storie alle quali, come ad un Tribunale, mi citava l' amico Ginevrino, onde convincermi della fecondità de' Muli: Storie che lo fecero cambiar d' avviso, come si è detto pocanzi, intorno a questa materia, e lo indussero a proporre la seguente quistione: cioè; perchè fatti simili siano cotanto rari anche ne' Climi caldi; e perchè nessuno di essi, per quanto sappiasi, accaduto sia ne' freddi? Conchiudendo in appresso che la risposta a tal quistione appartiene a ricerche molto più minute di quelle, che sono state tentate sino a quì: indi suppone negli organi genitali dell' uno e l'altro sesso de' Muli qualche cosa di molto ascoso, so, che non s' incontra negli Individui, ai quali essi Muli debbono la propria origine.

Io aveva già risposto intorno a questo argomento più d' una volta; e le risposte mie, tutte dubitative, avevano per fondamento le replicate asserzioni, e sempre conformi, di più persone, che avvezze a tenere e condurre Muli e Mule insieme confuse con Cavalli e con Asini d' ambedue i sessi, protestavano tutte concordemente di aver veduto più volte accoppiarsi fra loro ne' prati e nelle campagne queste spezie diverse di Quadrupedi; ma sempre infruttuosamente dalla parte de' Muli, e delle Mule: vale a dire che nè queste si videro mai gravide, nè quelli mostrarono giammai di essere fecondi: ma se le suddette asserzioni mi sembravano atte a conchiudere che le Mule sono sterili, non era però assolutamente persuaso, che lo stesso dovesse dirsi de' Muli: imperocchè rari essendo presso di noi i Muli che non siano castrati, le ricerche mie e le risposte ottenute non erano poi sì numerose, che bastassero a stabilire una verità filosofica. Aveva inteso a raccontare da più d' uno, che nel Genovesato rari sono i Muli castrati; e questo racconto erami stato confermato da persone, che vissuto avevano lungo tempo nel Genovesato medesimo. Mi procurai dunque da colà notizie certe da uomini spregiudicati, ma insieme idonei a fare le più diligenti ricerche. Si ebbe in fatti avviso che in que' paesi molti erano i Muli non castrati; ch' erano portatissimi alla copula la quale con frequenza esercitavano con Cavalle e con Mule; ma che non vi era mai stato esempio, nè vi era memoria, che siffatti accopiamenti fossero stati fecondi.

La lettera che recava queste notizie, diretta al fu mio chiarissimo amico e Collega Abate *Toaldo*, aggiungneva che da certo *Domenico dalle Rose, uomo di buona fede, raccontavasi che nell' anno 34 o al più tardi 36 del secolo ora scorso, ritrovandosi egli in Napoli, regnando Carlo Terzo, vide una Mula pezzata, che partorì un Cavallo* (prodigio veramente nè più inteso, e forse nemmen sognato) *simile in* *tutto ad un Cavallo pezzato intiero, che stava nella stessa scuderìa: che vi accorse tutto Napoli a vedere questo portento: indi col suo allievo fu condotta nella scuderìa reale . . . . e che potrebbesi riscontrare il fatto, osservando i registri, che si teneano in que' tempi nelle regie scuderìe, e nelle mandrie.*

Partecipai queste notizie all' illustre amico Ginevrino. Gli promisi di far guardare attentamente ne' registri della regia scuderìa di Napoli. Aggiunsi non pertanto che questo parto della Mula Napolitana non parevami tale, che se gli dovesse prestar fede. Possibile, io gli scrissi, che niuno si fosse prima avveduto che la Mula era gravida! La lettera di Genova dice che il *dalle Rose* vide il Cavallo pezzato partorito dalla Mula; ma punto non dice che fosse stata scoperta la gravidanza. Può mai credersi che una Mula partorisca un Cavallo; e tanto ben formato da meritarsi di passare nella scuderìa reale? Quanto a me sono di parere che si dicesse parto di Mula ciò ch' era uscito da una Cavalla: e che forse si fosse pezzato ad arte il Cavallino, che si dicea figlio di Mula, perchè, trasportato mai sempre il popolo per tutto ciò che sorprende, ed ha qualche carattere di maraviglioso, colà portandosi in folla, potessero i bassi custodi delle regie stalle trarne qualche profitto.

Rispose il Sig. *Bonnet* esser egli di opinione che le relazioni de' Montanari di Genova non siano sufficienti a dimostrare la sterilità de' Muli. Imperocchè, soggiuns' egli, avevano quelli prese tutte le precauzioni necessarie, tanto per assicurarsi di un vero accoppiamento, quanto per far sì che l' atto esattamente si compiesse? Sonovi de' casi, ove la mano d' opra del custode si rende necessaria. Dico di più. Se vi fosse un solo esempio ben circostanziato che un Mulo, o una Mula è stata feconda, questo solo basterebbe a distruggere l' opinione della loro sterilità. Ora mi sembra, che i due esempj da me prodotti (*d*) cio provino bastantemente: al-

---

(*d*) Oper. cit. Tom. VI. Edit. in 8. pag. 381. e seg.

almeno io non veggio cosa si possa loro opporre di ragionevole: e perciò persisto nel desiderio, che alcuni abili soggetti replichino le sperienze intorno a questo accoppiamento, e che ricorrano pur anche alle fecondazioni artifiziali.

Ora vedremo se veramente i lodati esempj siano tali, che pruovino ciò di che si tratta, e non possa loro opporsi niente di ragionevole. Al qual proposito s' egli una volta mi scrisse che la mia *logica era un po troppo severa*, forse che, se fosse ancora tra vivi, ripeterebbe lo stesso. Imperocchè sono bensì persuaso che alcune volte sia necessario l' ajuto del custode, onde far sì che l' accoppiamento non manchi di alcuna circostanza essenziale: ma è egli mai possibile, che in mezzo a sì conosciuto e da molti attestato trasporto di questi animali all' atto venereo, siavi sempre mancata quella condizione, che alla fecondità ricercavasi? E che si può sperare ed ottenere di più da soggetti abili, oltre il ritrovarsi presenti a siffatti e replicati accoppiamenti, come vi si trovano i custodi o padroni di questi animali medesimi? Da quali fenomeni, accaduta la copula, dedur potranno giammai che l' atto fu esattamente compiuto? Ovvero che mancò all' intero compimento una qualche circostanza, e delle più necessarie?

Io non prenderò a dimostrare l' impossibilità del difetto di qualche circostanza in mezzo a questa unione fra diversi animali, ma se questa unione, simile, quanto a tutte l' esterne apparenze, a quella che accade fra animali della specie medesima, replicata moltissime volte, tornò mai sempre infeconda, sembra potersi ragionevolmente conchiudere, che l' impossibilità e possibilità in questo caso non differiscono fra di loro che per una sillaba di più, o di meno.

Ma si passi all' analisi degli esempj riportati di Mule, che si dice e si legge aver partorito. La Mula della Martinica secondo il Sig. *di Buffon* partorì un bel *Mulo di pelo lungo, e nerissimo*. Ignoravasi se fosse stata coperta da un Mulo, o da un Asino (e perchè nò da un Cavallo dir potrebbebe qualcuno ?) Pure perchè aveva più dell' Asino che del Mulo, ne inferì il Plinio Francese, che fosse stata coperta da un Asino.

Io veramente mi aspettava di leggere che avesse partorito tutt' altro che un Mulo a rigor di termine comune: e la ragione si è; che se dal commercio della Cavalla coll' Asino, e dell' Asina col Cavallo, nasce un terzo animale che non è nè Asino, nè Cavallo; ragione voleva che dal ventre di una Mula coperta da un Mulo, o da un Asino, dovesse uscirne un frutto, che non fosse propriamente nè l' uno nè l' altro de' genitori. Ma non si faccia caso, se si voglia di questa qualunque riflessione; potendosi forse rispondere che trattandosi di un Mulo il quale aveva dell' Asino, partecipava per conseguenza e della madre, e del supposto padre suo. Si consideri piuttosto che nella stessa relazione si legge, che il figlio di questa Mula aveva più dell' Asino che del Mulo: eppure li *Muli*, che ci son noti, hanno ed ebbero mai sempre più somiglianza colla madre, che col padre loro. Dunque in questo caso la cosa è ita al rovescio, e quindi contraria ai fatti più frequenti, e più conosciuti.

Ma potrebbe per avventura dire qualcuno, che tutte queste riflessioni non hanno alcun valore, essendo certo il fatto, come lo è veramente per essere confermato da documenti autentici. E non sarebbe possibile, soggiungo io, che quì si supponesse ciò di cui si disputa; e tanto più che il Sig. *di Buffon* non era alla Martinica quando accadde questo prodigio? Le giuridiche attestazioni oh quanto sono facili a fingersi e ad ottenersi! E quì in pruova mi sia permessa una breve digressione.

Alcune volte mi è accaduto che mi si chiedessero attestazioni a conferma di certi avvenimenti, che da alcuni si tenevano per cose sopranaturali. Furono stampate le relazioni con documenti autentici; ma per mia buona sorte, tra varj testimonj sottoscritti con giuramento, il mio nome qualunque a piè di quelle relazioni non vi si lesse giammai; ed eb-

ebbi coraggio di negare una legale attestazione ad una mia prossima parente, che aveva visitato una o due volte, e che si voleva da molti guarita da una tisi ulcerosa polmonare nel breve giro di una notte. Di fatti ebbi motivo in appresso di rallegrarmi meco medesimo di quella mia negativa. Mi fu inspirata questa riserva nella mia prima gioventù da una relazione stampata, che dalla Germania era stata spedita alle Accademie Scientifiche di Europa, e certamente a quella dell' Istituto di Bologna mia patria, ove una sera fu letta. Trattavasi di un uomo dal cui ipocondrio destro, cresciuto pel tratto di molti mesi a gran mole, era finalmente dopo dolorosa suppurazione uscito un feto morto. Non so dire di quante giurate ed autentiche attestazioni fosse fornita quella relazione, che dopo non molto tempo si scuoprì essere in ogni sua parte favolosa. A questa lettura molti si scossero: io, così volendo la mia età, me ne stava zitto zitto, quando un venerando vecchio, solo allievo superstite del gran *Malpighi*, piena la testa di una malmenata ipotesi di aura seminale, d' inviluppi, e successivi sviluppi, cercava da uomo di ottima fede (quale si era veramente) di persuadere me stesso ed il celebre Sig. Co. *Francesco Algarotti*, che mi sedea vicino, della probabilità di un prodigio di tal natura non più accaduto. Manca poco ch' io non rida attualmente di quella supposta probabilità, onde risarcirmi del silenzio che mi fu d' uopo allora di osservare; non altro rispondendo alle ragioni, sulla forza e valore delle quali mi si chiedeva dal vecchio venerando il parer mio qualunque, se non se un *non capisco*, *dubito*, *non intendo bene*, ed altre parole dello stesso valore.

Ritorniamo in cammino, ed esaminiamo le due gravidanze successive della Mula, attestate da Monsieur *Poyen* Marchese di Santa Maria al chiarissimo Sig. *Senebier* di Ginevra: nelle quali, s' io mal non mi appongo, mancano le circostanze più necessarie per confermare i fatti, de' quali si quistiona. S' ignora cioè, anche in questo esempio, con qual

Animale si fosse accoppiata quella Mula: si dice che una volta abortì, e che l'altra volta morì in tempo del parto. Il primo frutto si chiama *feto*, *in cui tutte le parti erano distinte*. Ma, che feto? Mulo o Mula? Asino o Asina? Cavallo o Cavalla? O un bastardo, poco o niente somigliante a qualcuno di questi Animali? Il frutto secondo si dice *Mulo ben formato*: ma questo termine di *Mulo* è parimente assai vago ed equivoco; e in un siffatto prodigio, come si è quello di gravidanza condotta a maturità da una Mula, era senza dubbio necessaria la minuta ed esatta descrizione della forma, e de' caratteri di questo nuovo Animale, che avrebbe dovuto, ragionevolmente parlando, costituire una spezie di Mulo *sui generis*; cioè diverso da quelli che ci son noti.

Ma supposte queste gravidanze, e questi parti: e dovendosi attribuire all' imperizia e poca diligenza soltanto de' relatori la mancanza delle necessarie circostanze testè indicate; se questi casi, anche da quelli che vi prestano fede, si dicono rarissimi, e si considerano come altrettanti prodigj, come potrà credersi al fu Sig. *Bourgelat*, che altre Mule nelle Provincie meridionali della Francia, avessero ancor esse partorito, come fatto aveva una Mula alla Martinica? E, ciò essendo, che dovrebbe dirsi dei Dotti, o che vivono in quelle Provincie, o che scorrendole ne' loro viaggj, e tenendo esattissimo conto di tutte le più minute particolarità che v' incontrano, appartenenti alla Storia naturale, non furono mossi da siffatto fenomeno, il quale, deggio ripeterlo, o non trovò credenza, o fu stimato rarissimo prodigio? E che dir non si potrebbe spezialmente del Sig. *Bourgelat*, se il *parce sepulto* non lo vietasse; il quale credendo all' esistenza del forse, e senza *forse*, chimerico quadrupede chiamato *Giumerro* quanto alla sua propria, ebbe in que' frequenti parti di quelle Mule delle Provincie meridionali la negligenza di non informarsi mai da quali Animali quelle Mule fossero state coperte, e quali fossero le forme e i caratteri di que' frutti, che avevano dato in luce?

Sono queste le riflessioni ch' io credo sufficienti o per non ammettere per vere le indicate storie di Mule gravide, o almeno per dubitare, o sospendere il giudizio intorno a siffatte gravidanze. Dico per *dubitare*, o *sospendere* un tal giudizio, avvegnachè confessar deggia ch' io era preventivamente persuaso della sterilità de' Muli per le ragioni che letto aveva nell' opere del celebre *Antonio Vallisnieri*; e per quelle che intorno allo stesso soggetto aveva pubblicate nella prima edizione dell' opera citata l' amico Filosofo Ginevrino.

Credeva il nostro *Vallisnieri* che le vescicole trovate da alcuni nelle ovaja delle Mule, non fossero le vere uova: e di fatti altro sono le vescicole che nell' ovaja s' incontrano, altro ciò cui meglio convenga il nome di *uovo*; nel quale, per sentimento quasi comune, in mezzo ad un acqua gelatinosa e concrescibile, proporzionatamente assai copiosa, dee esser sospeso come in un centro l' invisibil germe del futuro Animale. Quindi è che la presenza sola delle vescicole non basta per giudicarle uova, se, oltre ciò, scrive lo stesso Autore, *esser può la materia del vero uovo, inabile, bastarda, difettosa*. Ed è qui che dee ammirarsi *la provvidenza della natura, la quale non soffrì che si moltiplicassero oltre i confini nuove spezie di Animali. Si contenta essa che per una volta veder si possa una maniera di mostro che costi di due spezie, ma non si va più avanti; posciacchè gli organi alterati fino a un tal segno passar non possono senza rompersi, o senza distruggersi:* seguendo a dire, che siccome nella fecondazione dell' uovo della Cavalla per l'accoppiamento coll' Asino, o dell' uovo dell' Asina per la sua unione col Cavallo, *il moto che vien dato alla macchinetta inclusa nell' uovo, urtando alcune parti più, altre meno, o con maniera violenta e non affatto naturale, ne segue che il feto partecipi dell' una e dell' altra figura, e nè l' uno nè l' altro sia distintamente; così quella figura, che veggiamo esternamente mutata, lo sarà anche internamente, e in particolare nell' ovaja, quantunque occulta alla nostra corta vista, e in conseguenza* *renduta inabile per ricevere dentro le sue uova mal fatte, imperfette, e crude* (o forse che non ci sono) *quella fecondazione e quel moto, che alla grand' opera si ricerca*. Le quali congetture di questo nostro illustre Italiano sembra a me che non poco somiglino all' espressioni del celebre amico di Ginevra, quando scrisse, come si avvisò poco sopra, dipender forse la rarità del fenomeno di cui si tratta (posto che sia veramente accaduto) da ciò che negli organi della generazione de' Muli siavi qualche cosa di molto ascoso, che non s' incontra negli Individui, ai quali essi Muli debbono la loro origine.

Premesse queste riflessioni rendo conto brevemente della gravidanza della Mula di Napoli, attestata da quel *Domenico dalle Rose*, forse tuttora vivente in Genova, che fece scrivere di aver veduto il Cavallo pezzato, dato in luce da quella Mula, e somigliante ad un Cavallo pezzato ch' era nella scuderìa reale. Per avere genuine, e sincere notizie di sì stupendo avvenimento, scrissi a nobilissima Dama mia singolarissima Padrona, Consorte di S. E. il Sig. Duca *di Termòli*, Cavallerizzo Maggiore di Sua Maestà Siciliana. La risposta gentilmente ottenuta si esprimeva con queste precise parole. *Il noto caso, o prodigio, accadde in tempo che mio Marito non era Cavallerizzo Maggiore di S. M. Mi ha però detto che ne avea sentito a parlare. Lo pregai dunque di prenderne con esattezza l' informazione, senza farne una Poesia. Eccole la relazione distinta, e veridica, fatta da questi Pratici, che da molto tempo servono la reale scuderìa.* La relazione, scritta in carta a parte, è la seguente. *Nell' anno circa* 50 (e non 34 ovvero 36 come attestò il *dalle Rose*) *inaspettatamente si conobbe nella scuderìa del Re, che vi era una Mula gravida, forse coverta da qualche Cavallo Padre, che stavasi nella medesima scuderìa. Partorì a tempo proprio, facendo un Cavallo Bajo, che aveva più del Mulo, che del Cavallo. Questo, avendo tre anni, si pose alla Cavallerizza, e riuscì bastantemente buono. Visse molti anni,*

e

e morì molto vecchio. La Madre Mula non uscì mai più gravida per quanto possibili diligenze si fossero usate.

Questa relazione, che venne da persona non sospetta certamente di prevenzione alcuna, è corredata di alcune circostanze, le quali a prima vista pare che mettano il fatto fuor d' ogni dubbio. Pure si ravvisa che non fu tratta dai Registri della reale scuderìa, i quali forse non sono più in uso: imperocchè non si assegna con precisione l' anno in cui fu scoperta la gravidanza *Mulesca* scrivendosi *circa l' anno* 50; e nemmeno quello in cui accadde il parto tanto prodigioso, se fa ritornare la spezie bastarda alla naturale, ch'era propria della Madre: oltre di che si comprende che una tal relazione è frutto della memoria d' alcuno di quelli che servono nella scuderìa; come è manifesto dalla lettera della nobilissima Signora Duchessa *di Termoli*.

Non si tratta dunque di *Cavallo pezzato, simile ad altro Cavallo pezzato* veduto da *Domenico dalle Rose*; ed è cosa assai stravagante che abbia preso un Cavallo Bajo per uno ch' ei disse *pezzato*; siccome è singolare che scopertasi la Mula gravida circa l'anno 50, il Genovese deponesse che il Cavallo era nato l' anno 34 o al più 36: che venuto alla luce circa il detto anno 50, e quindi a un dipresso 37 anni prima ch' io ne ricercassi la notizia alla Veneratissima Signora Duchessa, siasi aggiunto che *visse molti anni*; che *morì molto vecchio*; e che per avere la suddetta relazione, che si dice *distinta e veridica*, siasi dovuto ricorrere a *que' Pratici*, che servono da lungo tempo la reale scuderìa; quasicchè nell' intervallo di non molti anni, se *il Cavallo morì molto vecchio*, altre persone non vi fossero, che potessero attestare un fatto simile. È anche da notarsi quel *partorì a tempo proprio*; imperocchè non credo che noto sia il tempo, in cui le Mule portano il feto prima di darlo in luce. Non meno singolar cosa finalmente si è, che un Cavallo, il quale si dice che *aveva più del Mulo che del Cavallo*, siasi mandato alla Cavallerizza.

Comunque però sia, posta la verità di questo fatto medesimo, che ha tutta l'apparenza di favola, egli mi sembra, siccome dissi, almeno a prima vista il più circostanziato degli altri casi che si leggono su questo proposito; ed è cosa osservabile, che, a fronte di *molte diligenze usate*, la stessa Mula non restasse nuovamente gravida, come avvenne di quella di Monsieur *Poyen*; e che niuna sperienza fosse fatta sulla fecondità o sterilità del Cavallo da essa partorito, avvegnacchè *vivesse* molti anni.

Queste diligenze usate perchè la Mula di nuovo ingravidasse mi richiamano alla memoria un tratto del Sig. *di Buffon* (e), il quale chiede a se medesimo perchè le spezie de' grandi Animali siano sì poco feconde, rispetto a quelle de' piccioli: ed osservando la fecondità di quelli cotanto ristretta, ne conchiude che dee questa fecondità ristrignersi anche più negli Animali prodotti da due spezie diverse. Ma se la cosa è così come appunto la sembra, aggiungo io, non pare forse molto probabile che questo ristrignimento abbia ristrettissimi confini ne' frutti prodotti da queste diverse spezie? Questa riflessione però sarebbe da rigettarsi ogni qualunque volta si avesse un caso senza eccezione della fecondità de' Muli: caso, il quale se accadesse, farebbe certamente ch'io, unitamente ad altri non pochi, prestassi tutta la fede alle storie poco esatte, che ho esaminate.

Intanto il Sig. Bonnet, pieno esso pure, siccome era, del desiderio che un caso simile accadesse, investigando le cagioni di questa ristrettezza, avvertita dal Sig. *di Buffon*, congetturò ch' essa dipendesse dai rapporti primitivi, che passano fra l' umor fecondante ed il germe. Se i rapporti, ei disse, sono grandi ed omogenei, copioso è il frutto: e scarso, al contrario, quanto più i rapporti sono eterogenei e minori. Ma qualunque sia la cagione segreta della copia o scarsezza de' frutti ne' diversi Animali, e sulla qual cagione non possono azzardarsi che delle congetture, io sono portato a pensare doversi tutto questo ai saggi disegni della natura, che ha prevedute le fatali conseguenze, che deriverebbero dalla ferace fecondità degli Animali più grandi.

(e) Luog. cit.

Che sarebbe in fatti di quelle pressocchè interminabili vasche, destinate a ricevere le acque di quanti fiumi scorrono e signoreggiano il più delle volte da tiranni su questo globo, se que' smisurati viventi che vi nuotano, alcuni de' quali si dicono poco minori de' superbi edifizj di certi ricchi, o potenti oziosi ed ignoranti, avessero fecondità uguale a tutti que' pesci di molto minor grandezza, i quali popolano i mari, ed altri suoi simili nutriscono, che poi fanno pomposa e ricca comparsa alle mense degli Apicj, e di tanti doviziosi spensierati, che pare si pregino d' insultare all' altrui miseria? Potrebbero forse varcarsi li mari con sicurezza anche in tempo della più perfetta calma? Servir forse potrebbero le loro acque a qualche uso medico, come mai sempre servirono? I Fonti che dalle esalazioni loro si formano, somministrar forse potrebbero acque limpide e salutari? A solleticare l' organo del gusto incallito dal soverchio sapore di alcuni alimenti, potrebbero mai li Ghiottoni unire ai pesci le carni più dilicate e più squisite, che si traggono dalla varietà de' volatili, se le Aquile, gli Avoltoj, gli Sparvieri, i Falconi, e tanti altri uccelli rapaci e voracissimi, che vivono a spese e a danno della più minuta e deliziosa famiglia degli augelli, fossero tanto fecondi quanto lo sono le Passere, che, divenute ancor esse a questi giorni di lusso strabocchevole un cibo famigliare a molti, sembrano burlarsi di chi tende loro per varie guise gli agguati, producendo siccome pare maggior copia di frutti in proporzione che crescono le insidie? Anzi chi non prevede ed intende, che pria scemerebbe di molto, indi si anderebbe a perdere la razza di tutti gli Animali domestici, e finalmente quella degli Uomini, se la fecondità de' Lioni, delle Pantere, delle Tigri, degli Orsi, de' Lupi maggiori e feroci, e di tanti altri Animali, che si sostentano coll' altrui morte facendo a brani qualunque vivente può lor cadere tra denti o tra l' ugne; se la fecondità, io dissi, di cotali Fiere pareggiasse quella per esempio de' Coniglj, che in pochi mesi vi cangiano un luogo deserto in una ben popolata colonia di loro simili? V' ha forse chi risponda, anzi speri e si lusinghi, che fatta numerosa una razza d' animali, la cui voce tutto vi scuote e riempie di terrore, saprebbero gli uomini moltiplicare gli agguati e le insidie; e quindi scemarne moltissimo il numero? Ma l' uomo occupato a coltivare la terra per diverse guise, onde renda il necessario alimento, come mai perder potrebbe i giorni suoi cacciando Animali feroci soverchiamente abbondanti; e che, quando uccisi fossero, richiederebbero profonde ed ampie fosse, scavate a mano dall' utile e benefico Agricoltore, ad oggetto di prevenire la micidiale infezione dell' atmosfera, che sarebbe necessaria conseguenza de' vasti corpi animali imputriditi e fetenti? Che tali esser dovessero li fatali effetti dell' indicata fecondità, che dalla saggia e provvida natura fu confinata entro angusti limiti negli animali più grandi, s' intende facilmente per ognuno, senza ch' io quì mi trattenga ad esagerarli e dipingerli con quella vivacità di colori, che la mia rozza penna non saprebbe impiegare.

RICERCHE

DI GIUSEPPE BARONIO

Intorno alcune Riproduzioni, che si operano negli Animali così detti a Sangue freddo,

Presentate da Pompilio Pozzetti

il dì 17. *Ottobre* 1801.

Tra le scoperte del Secolo Decimottavo tiene uno splendido luogo il ritrovamento delle animali Riproduzioni allora quando si rigenerano alcune parti per malattia, o per esperimento distrutte; I Polli gallinacei, i Colombi, gli Agnelli, i Cani, e l' Uomo medesimo ci hanno offerto un giocondo, e favorevole spettacolo, che applicato alla Chirurgia pratica formò il soggetto di una Memoria inserita nel Tomo 4.° (1): nella quale con varie sperienze di confronto mi lusingo di avere abbastanza dimostrato, che nelle morbose vicende di grosse distruzioni di ossa, muscoli, tendini, nervi, e porzioni anche di cervello, lungi dall' inventare Apparecchj, e Macchine, conviene confidare nelle tanto valevoli forze, che alla Natura competono, e delle quali suol essere riccamente adorna.

La mal intesa opinione di reputare troppo brevi i limiti della Natura, e giudicare irreparabili le distruzioni di molti organi, che Ella sa benissimo rifare, e rigenerare ha ritardati i progressi della più bella parte di Chirurgia.

Dopo avere adunque trattato delle Riproduzioni, che si osservano negli Animali così detti a sangue caldo, e nell' Uomo (2), e di aver veduto quali andamenti tiene la Natura

---

(1) Pag. 480.

(2) Tom. IV. pag. 480.

nel riordinare la tela animale guasta, o distrutta, l'analisi sperimentale esige, che trattisi anche degli Animali di fredda tempra per riguardo alla facoltà, che hanno di riprodurre le parti troncate, avendo questi servito di guida alle sperienze degli Animali a sangue caldo descritte nell' indicata Memoria; e quantunque siasi da Uomini grandi declamato, che la scoperta delle Riproduzioni delle estremità organizzate negli Animali a sangue freddo è riuscita più maravigliosa, che buona, recando agli Inventori più gloria, che agli Uomini utilità, è fuor di dubbio, che ha dato alla Fisiologia non men luce, che nuovo fondo, ed ha meritamente eccitato molti Naturalisti ad occuparsi di questo ramo di Fisica animale, per cui credo di non dover celare alla pubblica Istruzione anche le mie ricerche intraprese su questi oggetti, in ispezie sul preteso rifacimento del cervello delle Lumache terrestri, che con controverso voto ha intertenuto molti rinomati Filosofi per lo spazio di ben trent' anni (3). Anzi essendo questa materia sembrata ad alcuni ruvida, e ritrosa, perchè quelli, che scrissero su di essa, scrissero per i Dotti e nella lingua dei Dotti Naturalisti, per cui molto ristrinsero questa Scienza, mi sia permesso il trattarla con quella naturale semplicità, che serve a non rendere privativa di pochi la cognizione di una parte così dilettevole di na-

---

(3) Fu nel 1768. che colle stampe di Modena sortì il Prodromo sulle Riproduzioni animali dell'Abbate Lazzaro Spallanzani in cui parlò della Riproduzione delle corna, e della testa così dimezzata che intera nelle Lumache terrestri; scoperta, che mise in galloria molti Fisici, le di cui opinioni furono, e sono divise; alcuni credendo, che si taglia soltanto l' apparente testa senza toccare il cervello dell' Animale, e che quando si arriva a distruggere il cervello, lungi dal seguire la Riproduzione, l' Animale muore; altri poi sostenendo al contrario, che col taglio del capo delle Lumache se si distrugge anche il piccolo cervello, si rigeneri. Le Osservazioni di questi Autori trovansi inserite, e registrate nella Memoria seconda dello stesso Abbate Spallanzani sulla Riproduzione della testa delle Lumache terrestri nel Tom. II. Parte II. 1784.

naturale Filosofia, e poichè mi sono già prevalso della denominazione di Animali a sangue freddo, seguendo in ciò una distinzione già fatta dal grande Haller, e da Spallanzani, ragion vuole, che prima di entrare in dettaglio a parlare della Riproduzione evolutiva, mi faccia ad ispiegare cosa intender si debba per Animali di *sangue caldo* e *freddo*.

Animali di freddo sangue sono quelli, che al toccarli somministrano una sensazione di freddo, che il loro sangue è niente, o quasi niente più caldo dell' Atmosfera, o dell' acqua in cui vivono; cosicchè introducendo il Termometro nella bocca di questi Animali, e facendolo pervenire fino al ventricolo, s' inalza al più mezzo grado, e qualche rara volta un grado, e lo stesso succede applicandolo al cuore, ed immergendolo nel vivo sangue. Tutto il contrario si osserva negli Animali a sangue caldo, nei quali mettendo il Termometro di Reaumur sotto le ascelle, o in bocca, oppure immergendolo nel vivo sangue, ascende anche oltre il 30.^{mo} grado.

La prima classe comprende le Rane, i Rospi, le Lucertole acquajuole, e terrestri, i Rammari, le Anguille, tutti i Serpenti, i Testacei, l' immenso stuolo degli Insetti, i Pesci squammosi &c. &c.; alla seconda classe appartiene l' Uomo, una serie pressochè infinita di Quadrupedi, ed Uccelli d' ogni genere, Pesci cetacei, ed in generale tutti gli Animali dotati di mammelle, nei quali il cuore è fornito di due ventricoli, e due orecchiette, mentre negli Animali di freddo sangue, il cuore ha un ventricolo solo, ed una sola orecchietta. Ciò presupposto entriamo a parlare delle Riproduzioni.

ARTICOLO I.

Osservazioni sulla Riproduzione evolutiva del Polipo d' acqua dolce e di altri Animali.

Il Polipo è un Animaletto emulo nella Figura al seme del Cardo santo di color verdeggiante, lungo un pollice traverso, e largo niente più di due in tre linee. Abita nelle acque de' fossati, che hanno un lento corso, e si tiene aderente alle foglie delle piante, ed ai filamenti d' erbe, che bordeggiano i fossati, ed i rigagnoli delle acque.

Osservato attentamente questo Animaluzzo, rappresenta un Intestino ceco, da una parte chiuso, e dall' altra aperto, ove viene corredato di certi viticoli, che li servono per prendere i piccolissimi Insetti, che nuotano nell' acqua, coi quali si alimenta, introducendoli nell' accennata apertura, dalla quale li rimette dopo qualche tempo.

Siamo debitori all' illustre Ginevrino Trembley di questa famosa scoperta fatta l' anno 1740 (4).

La curiosità filosofica si esaurisce nel vedere questo Animaletto tagliato a capriccio in varj sensi, e ridotto in piccolissimi, ed al solo occhio armato visibili minuzzoli bellamente riprodursi. Trembley lo divise in 64. parti, ed ottenne 64. Polipi; ma quì non cessano le maraviglie di questa bestioluzza. Si può rovesciare un Polipo come un guanto, che si vede prendere cibo, accostarlo alla bocca, ed inghiottirlo, gettare dei rami in varie parti del suo corpo; si può cacciare un Polipo dentro un altro, e di due Polipi ne risulta uno solo più grosso, che esercita le solite funzioni; si taglia un Polipo, e si uniscono insieme li due pezzi tagliati, e si vede formarsi un sol Polipo; lo stesso accade se si uniscano due pezzi tagliati da due diversi Polipi, i quali si uniscono formando un solo Animale, abbenchè i pezzi abbiano avuta una differente origine; ma tanta ammirazione si diminuisce qualora venga il Polipo esaminato anatomicamente, presentando una sostanza gelatinosa omogenea semplicissima; diffatti non vi si trova cuore e molto meno arterie, o vene, per conseguenza è privo di vera circolazione d' umori, manca di cervello, di spinal midollo, e di nervi, e dell' accompagnamento di quelle parti, e di quelli organi, che si ravvisano in un' infinità di altri Animali; appena vi si scorgono dei granellini sparsi abbondantemente per tutto il corpo del Polipo, che si tingono dell' alimento, che prende.

---

(4) Memoire sur les Polipes. Leyde 1744 in 4.

Pubblicata che fu questa scoperta, Reaumur (5) predisse all' Accademia delle Scienze di Parigi, che in altri Animali si sarebbe scoperta ben presto la prerogativa di riprodurre in una maniera presso a poco a quella osservata nel Polipo; diffatti non andò guari che nel 1741. toccò ad un altro Filosofo Ginevrino Carlo Bonnet di verificare questa predizione, avendo scoperto che varie specie di Vermi di terra, d' acqua dolce, di Ortiche, e Stelle marine riproducevano qualunque volta venivano tagliati in pezzi (6), ne' quali Insetti la struttura è meno semplice del Polipo; e diffatti i Vermi d' acqua dolce, che nella molle gelatinosa sostanza più degli altri si accostano al Polipo, abbenchè privi anch' essi di cervello, e di nervi, pure sotto il Microscopio danno indizio di una vera circolazione d' umori, che si eseguisce da una parte all' altra del loro corpo, e parlando di Vermi di terra, il Lombrico terrestre quantunque anch' esso privo di cuore presenta un organismo molto più composto; la circolazione del suo sangue si opera per mezzo di un' arteria, che scorre lungo il dorso dell' Animale sotto la pelle soggetta ad un alternativo ristringimento, e successiva dilatatazione, non altrimenti che una vera Sistole, e Diastole, ed in esso trovansi i polmoni, gli intestini, lo spinal midollo, e i nervi &c.

---

(5) Memoire sur les Insectes T. VI. preface pag. 19. &c. Edition in 4.

(6) Traitè d'Insectologie: Partie. II Paris 1785. in 8.

Questo Animaletto a differenza dei Vermi d' acqua dolce non riproduce se venga tagliato al minuto, e defrauda parimente l' Osservatore del bramato intento, qualora venga tagliato per lo lungo, perchè diviso con simil taglio quel grosso vaso, che gli serve di cuore, l' Animale muore di un emmoragía, giacchè nel taglio trasversale vedesi questa grossa arteria restringersi, e seppellirsi dentro se stessa in vigore dell' estrema contrattilità di cui è dotata, non rare volte osservabile anche in Creature più grandi.

I Gamberi di fiume sono quelli in cui più facilmente d' ogn' altro Animale s' incontra di osservare la Riproduzione, ed è ben raro, che sopra una quarantina di Gamberi non ve ne sia alcuno che abbia rigenerato qualche estremità, che si riconosce dall' essere più piccola, e meno resistente delle altre. Quel tubo crostaceo, e petroso in cui sono involti è quel desso, che li rende più soggetti a staccarsi, e perdere qualche estremità urtando ne' fiumi attraverso de' legni, sassi, e restando come sovente accade intricate le gambe nelle erbe filamentose de' fossi, si spezzano, e si distaccano le antenne, e le gambe.

È in balìa di qualunque Osservatore di staccare ai Gamberi le antenne, rompere, e distruggere le gambe, e separare dei pezzi della scatola ossea in cui sono rinchiusi, colla sicurezza di veder rifare tutte queste parti, operazione però lentissima, come me ne sono ocularmente convinto, e come risulta anche dalle osservazioni di Reaumur, che tenne dietro a tal sorta d' operazioni per qualche tempo.

Ciò che riesce attendibile nel rifacimento delle estremità de' Gamberi è, che nella Riproduzione delle porzioni staccate della crosta ossea, la natura tiene lo stesso ordine, che nelle ossa degli Animali a sangue caldo, da me descritto quando parlai della riproduzione delle ossa (7), producendosi dal periosteo il nuovo osso sotto le sembianze di una gelatina addensata, la quale a poco a poco s' indura, e cresce fino a prendere la primiera consistenza, e forma consueta dell' osso (8). Con reiterate prove mi sono altresì accertato, che anche i Pesci squammosi rifanno una porzione delle loro pinne, e della coda, ma in un tempo assai lungo.

Io ho messo al cimento que' Pesci dorati, che formano la delizia delle acque, che si conservano nei Giardini, per essere a preferenza degli altri più teneri, o per dir meglio meno resistenti, e ruvidi; eppure non m' è riuscito di veder crescere, e riprodurre le parti staccate tanto delle pinne, come della coda, che in capo a tredici mesi in alcuni, ed in altri fino al termine di quindici mesi, ed anche più, anzi conviene riflettere, che siccome le pinne de' Pesci, che altro poi non sono che quelle due squamme larghe situate ai lati dell' Animale, distese oltre l' ambito del corpo sotto forma di due alette, loro servono per mantenersi in equilibrio nell' acqua, come anche la coda, della quale si prevalgono come di remo, con cui si spingono avanti, l' operazione del taglio non è eseguibile, che per piccolissime parti, altrimenti si correrebbe rischio di pregiudicare l' equilibrio dell' Animale, che col grosso taglio delle pinne si rivolta supipino nell' acqua (9), e ciò basti di avere osservato su tal genere di Riproduzioni. Vengo ora a parlare delle Lumache, che formano il precipuo oggetto delle mie ricerche; ed acciocchè le sperienze riguardanti la Riproduzione del capo di questi Animali, riescano facili a chiunque fosse preso di vaghezza d' interrogare la natura con questi Rettili, comincerò dal dare un minuto ragguaglio anatomico delle parti constituenti l' esterna, ed interna organizzazione della testa delle Lumache, per poi in seguito tutte dettagliare le circostanze, che si richiedono per ottenere la rigenerazione ad oggetto di dimostrare l' insussistenza della recisione del cervello stata tanto contrastata, viscere, che effettivamente non si taglia abbenchè colla decollazione della Lumaca tutta l' apparente testa venga separata.

---

(7) Tom. IV. pag. 482.

(8) Tutti gli Animali coperti di una crosta ossea sono proveduti del loro periosteo, di cui è internamente ricoperta tutta la scatola, che forma il loro abitacolo. L' Animale spreme da certi determinati luoghi del di lui corpo un viscido umore, che forma il periosteo, il quale degenera in osso non altrimenti, che la scorza delle piante degenera in legno. Il vapore dell'acqua nella Macchina Papiniana rende gelatinose queste croste, e coll'acido nitrico tanto il tubo osseo de' Gamberi fluviatili, come il coperchio di tutti i Testacei si riducono in carbonato di calce, e glutine non altrimenti, che le ossa degli altri Animali, quindi a ragione furono da qualche Naturalista chiamati Animali colle ossa esteriori.

ARTICOLO II.

Osservazioni anatomiche sulla testa della Lumaca dirette a distinguere la vera dall' apparente testa.

Le Lumache terrestri riproducono le corna interamente o in parte soltanto, secondo che loro sieno state tagliate, rifanno tutto il berettino, o calotta, se venga recisa per metà, o tutta, e sanno riparare il collare, ed il piede poco, o molto, che lor venga separato: una sì bella prerogativa riesce anche più interessante esaminando anatomicamente il corpo di questi Rettili; e per cominciare dalle parti esterne, quando la Lumaca si distende fuori del suo nativo portatile guscio, la prima che mette in vista è la testa armata di quattro antenne altrimenti dette corna, o *tentacula*, due più alte, e poste superiormente, due più corte situate inferiormente. Ciascuna di queste quattro antenne ha un globo in cima, e nelle corna maggiori evvi una macchia oscura, sulla quale lo Swammerdamio credette essere collocato l'organo della vista. Questa testa è attaccata ad un lungo collo, che si continova fino al piede, che è la parte sulla quale appoggiasi la Lumaca per istrascinarsi, la di cui estremità posteriore alcuni chiamano *Coda*.

---

(9) I Pesci a scaglia hanno una vescica nella cavità del petto divisa qualche volta in due concamerazioni, gonfia d' aria, che ristringono, e dilatano a piacimento ad effetto di diminuire il volume del corpo, o di accrescerlo secondo il bisogno. Questa vescica riceve, e tramanda l' aria dalle loro branchie, che sono gli organi della respirazione nei Pesci, ed è sommamente importante per nuotare, cosicchè ferita che sia, l' Animale non può più sostenersi a nuoto, e si rivolta supino come col taglio delle pinne.

Dove termina il collo si scorge un rialzo circolare detto il collare della Lumaca, e nella parte destra di esso vi è un' apertura la quale serve egualmente alla respirazione, che all' uscita degli escrementi, e da essa sortono all' occasione le parti destinate alla generazione (10): immediatamente sotto le corna minori si trovano le labbra sotto di cui sono comprese le cavità della bocca coi denti, e la lingua, e queste parti unitamente al collo sono coperte di una pelle fatta a zigrino, tutto al contrario della membrana, che cuopre il piede, la quale è liscia, e sottilissima, ed attraverso di essa si vedono delle linee longitudinali al centro, e trasversali ai lati, le quali altro poi non sono, che le muscolari fibre, per cui si opera il movimento del piede medesimo.

Quantunque la Lumaca non abbia la testa rilevata dal rimanente del suo corpo, come si osserva in molti altri Animali, e che anzi essa è unita per tal modo al corpo di formare un sol tutto; pur non di meno gode in massima di un organismo niente diverso da quello dei grandi Animali.

Tagliando longitudinalmente gli integumenti, che cuoprono la testa ed il collo, e rovesciandoli indietro insieme al mus-

---

(10) Della maniera di generare di questo curioso Animale, e di alcune Conchiglie marine parlerò in altra Memoria sulla Riproduzione generativa.

muscolo cutaneo, si scuopre una membrana sotto cui giace un corpo ovale, il quale contiene le due mandibole, la bocca, la lingua, ed il principio dell' esofago; sopra questo corpo, ossia globo ovale si trova il cervello posto ora sopra la parte anteriore, ora posteriormente al globo medesimo. La ragione di tal cambiamento di luogo del cervello dipende dalla mobilità di esso nelle Lumache, la quale viene messa in azione da alcuni muscoli situati lateralmente ad esso.

Dal cervello si producono due Appendici, ossiano gambe dette il ganglio, e tanto dal cervello, come dal ganglio nascono molti nervi. Queste generali notizie non bastano al nostro scopo, vediamo ora più minutamente quali sieno le parti costituenti l' organismo della testa delle Lumache terrestri.

Lo Swammerdamio nella *Biblia naturae* ha dato l'anatomia delle Lumache in maniera, che le sole figure bastano per darci una grande cognizione dell' ammirabile struttura della testa di questo Verme, e desse possono servire di lume non equivoco per coloro, che si esercitassero sulla Riproduzione del capo delle Lumache. Non ostanti però sì grandi fatiche il Professor Michele Girardi Parmigiano ha saputo spingere più in là dell' Olandese Osservatore le sue ricerche (11), dando segnatamente la storia dei nervi della testa molto più chiara, e bene dettagliata, ed io mi trovo in gran parte debitore a questo caro Amico di molte notizie risguardanti l' organizzazione del capo delle Lumache, ed altri oggetti di naturali curiosità, essendo sempre stato con lui in relazione delle mie osservazioni sulle Riproduzioni animali; e per seguire quell' ordine, con cui mi sono fatto ad esaminare le singole parti del capo delle Lumache sugli insegnamenti di questo grand' Uomo, le prime che mi si presentarono all' occhio dentro l' accennato globo ovale furono le mandibole delle quali la superiore è di natura quasi cartilaginea lavorata a ferro di Cavallo, e fornita di 5, o 6 denti, ed anche più secondo l'età della Lumaca, e la spezie (12), e l'inferiore affatto membranosa priva di denti più propriamente detta labbro, o gengiva; dalla mandibola superiore si forma internamente il palato (13).

---

(11) Lettera di Michele Girardi scritta all'Abb. Spallanzani Tom. II. par. II. pag. 539.

Alla gengiva resta strettamente attaccata la lingua, e avendo la base dalla parte anteriore della mandibola inferiore, essa compare tanto aderente per modo, che non si distingue a prima vista dal rimanente della mascella, ma con paziente diligenza si svolgono da essa due membrane più resistenti della mandibola superiore, delle quali s' attacca, e si unisce a quella, che cuopre la mascella inferiore, e poi ripiegandosi in varj modi forma un appendice globosa, che lussureggia dalla parte inferiore del globo ovale di uso finora incognito. La membrana poi sottoposta della lingua è tutta dentata come la lingua di un Gatto, la quale struttura pare, che supplisca ai denti di cui manca per l' importante opera della masticazione (14); al terminar della mascella superiore si ritrova l'esofago ristretto assai nella sua origine, ma in progresso si fa maggiore, ed è di un colore cinerino; dall' esofago poi, e dai denti anteriormente, e posteriormente è formata la bocca, il di cui ambito abbastanza grande dalla parte superiore, ed inferiormente vien formato dalla lingua, e dal palato.

Nella parte anteriore del globo ovale già descritto al di sopra è collocato il cervello di un colore sbiadito della lar-

---

(12) Questi denti tuttocchè uniti tra loro si possono distinguere per la loro acuta punta.

(13) Abbenchè questi denti restino molto indietro delle labbra, la Lumaca ha l'abilità nel prendere il cibo di spingerli tanto avanti, che supera quasi il livello dei labbri, e ciò succede ben sovente quando la Lumaca avidamente cerca di staccare una qualche foglia.

(14) Le foglie di Viti, le Veccie, e le Lenticchie sono l' ordinario, e famigliare cibo delle Lumache.

larghezza di una linea circa, e della lunghezza di una linea e mezza con pochissima varietà riguardo alla maggiore, o minor grossezza della Lumaca, in apparenza diviso in due lobi, i quali si allungano a formare due appendici ossiano gambe del cervello componenti il ganglio appena maggiore di un grano di miglio, non altrimenti che dalle gambe del cervelletto umano si compone la protuberanza anulare.

La mobilità del cervello fa sì che esso non abbia fissa la situazione sopra la parte anteriore del globo ovale, ma ora si trova posteriormente ad esso, ed ora fin sopra l' esofago, e nella massima distensione anche al di là dell' esofago per ben tre linee, posizione che riesce cinque linee circa indietro della base delle due corna lunghe; e siccome tutti gli Sperimentatori convengono d' aver fatto il taglio alla base delle due corna lunghe, egli è facile di dedurne, che nella decollazione di tante Lumache cimentate anche dai Fautori della rigenerazione del vero cervello, non siasi mai giunto a tagliare il cervello medesimo.

Per chiarirsi di questa situazione del cervello conviene far morire la Lumaca lentamente nell' acqua, perchè sforzandosi di sortire mette fuori dal guscio tutta l' estremità anteriore del suo corpo, e la distende quanto può.

Da questo cervello nascono dodici nervi esattamente descritti dal Girardi, e da esso divisi in sei paja, oltre molti altri nervi procedenti dal ganglio, che tutt' insieme si distribuiscono per tutta la testa delle Lumache.

E quì conviene riflettere, che la testa negli Animali non si desume dalle esteriori apparenze, ma dall' organo del cervello, che ne costituisce l' essenza, e da cui riceve il nome di capo per essere l' organo appunto al quale mettono capo tutte le parti sensibili, che sono proprie della vita animale. Vi sono infatti degli Animali corredati di organi in figura di testa, i quali però non hanno della medesima che le sole apparenze. Tali si trovano essere tutti gli Insetti in istato di larva. La natura ha posto all' estremità anteriore del loro corpo un anello rotondo in forma di capo, del quale si valgono finchè sono Bruchi per raccogliere, e masticare i loro alimenti, essendo il medesimo armato di due tanaglie come la vera testa degli Scarafaggi, e dei Carabi. Tale anello però si stacca interamente dall' Animale, allorchè si trasmuta in Crisalide, e dà a divedere che esso non è una testa, ma soltanto un capo posticcio adattato dalla natura alla fisica costituzione dell' Insetto in istato di Bruco.

Da tutto ciò io ne deduco un' eguale conseguenza rispetto alla testa delle Lumache, poichè in questo curioso Animale il cervello da cui partono i nervi si trova collocato nella parte posteriore del collo, e l' apparente testa, che nella naturale posizione della Lumaca sta lontana da esso per ben cinque linee non è altro, che un prolungamento del collo stesso, ossia l' estremità anteriore dell' Animale, dove la natura ha collocati gli organi della masticazione e del tatto. Posti questi principj, che discendono dall' accurato esame dell' interna loro struttura, la rigenerazione dell' estremità suddetta non ha più per rapporto ai fenomeni della Riproduzione quella singolarità, ed importanza, che da altri le viene attribuita, trattandosi di un' estremità, che quantunque agli occhi del non pensante volgo rassembri una vera testa, pure non è tale a quelli di un Filosofo osservatore, e maggiormente cessa di esserla quanto più l' Animale la sporge fuori del suo guscio.

Abbenchè non si tratti che della rigenerazione del berettino o calotta, ciò non pertanto si presentano all'atto pratico molte difficoltà alle quali conviene riflettere acciò riescano al cimento le Lumache, che sottoposte vengono alla decollazione, od al taglio di alcuna di quelle parti, che tutt' insieme formano l' ammirabile struttura dell' apparente capo di questi Animali.

AR-

ARTICOLO III.

Dell' amputazione dell' apparente Testa.

Il taglio della testa delle Lumache è un' operazione dell' ultima importanza, a cui deve avere molto riguardo l' Osservatore, ed esigesi tutta la sagacità, e la possibile destrezza, perchè dalla felice esecuzione del taglio il buon esito dipende dell' esperienza.

Prima di tutto conviene far sortire l' Animale dal suo nativo guscio, e ciò si ottiene facendo una piccola apertura all' estremità del guscio medesimo, ove termina la spira che egli rappresenta, facendovi passare un sottil legno, che giunga a toccare il corpo della Lumaca. Il miglior mezzo per farle sortire è quello d' immergerle nell' acqua, perchè allora stendendosi quanto più può per andare all' asciutto, mette allo scoperto tutta la parte anteriore, ed in tal maniera si presenta in una comoda situazione per il taglio.

In qualunque modo però si eseguisca è bene, che l' apparecchio sia disposto su di un piano levigato. L' Operatore colla mano armata di un coltello affilatissimo deve curare il tempo in cui la Lumaca fuori del proprio guscio mette in vista tutta la lunghezza del suo collo, e prendendo di mira quella linea, che si trova immediatamente sotto la base delle due corna lunghe posteriori, ivi deve applicare il coltello, o rasojo, oppure con un colpo di forbice, e fare il taglio più prestamente che può, perchè la Lumaca ha l' abilità di contrarsi prontissimamente per evitare il taglio della testa, onde sovente non si giunge a tagliare, che un pò di pelle, ed una porzione di corna.

Una linea circa al di là della radice delle corna maggiori è conceduto di fare il taglio, ma oltrepassando questo limite, e facendo il taglio un poco più indietro si feriscono dei grossi vasi, i quali contengono quel ceruleo umore, che loro serve di sangue e muojono di emorragia, e da questa immancabile osservazione abbiamo una riprova, che non si giunge mai a recidere il piccolo mobilissimo cervello, che nella violenta distensione del collo della Lumaca si porta cinque linee indietro della base delle corna maggiori, mentre tagliando la supposta testa, allorchè l' Animale incomincia a contrarsi, e a ritirarla nel guscio; siccome allora il cervello avvicinasi ad essa, e va a corrispondere colla sua posizione alla linea, che siegue immediatamente la base delle due corna maggiori, così accade facilmente di spingere il taglio sopra il medesimo, e allora la Lumaca in luogo di riprodurre la parte recisa, rimane in pochi istanti priva di vita; e questo è appunto il motivo per cui da cento Lumache alle quali da inesperta mano tronchisi il capo allorchè si contrae, poche sono quelle che lo riproducono, poichè ordinariamente colla finta testa si taglia loro eziandio una parte del contiguo cervello che è il vero capo, offeso il quale l' Animale è costretto a perire. Tutto al contrario facendo l' operazione, allorchè l' apparente testa è interamente dispiegata, si ottiene sempre l' effetto dell' accennata Riproduzione; ed essendomi fatto carico presso lo stesso Professor Spallanzani delle annunziate osservazioni, ed altre simili sperienze, parmi che se ne fosse mostrato persuaso, avendogli dimostrato a forza d' occhio, e di dito la situazione, che prende il piccolo cervello mobilissimo delle Lumache nella massima distensione, che si esige per fare il taglio secondo le regole da lui prescritte, che esclude affatto il dubbio che insieme alla testa apparente si possi tagliare il cervello. L' esperimento è tanto chiaro, e tanto palmari sono le prove, che converrebbe rinunciare alla facoltà di vedere chi negasse questa verità, e posso dire, che questo degno mio Maestro (15) abbia dato sufficiente prova della di lui persuasione coll' aver deposto il progetto di rendere pubblica colle stampe la sua grand' Opera sulle Riproduzioni, che più volte aveva promesso di fare.

---

(15) Il mio cuore tace con fatica i molti obblighi, che mi corrono per le istruzioni ricevute quando studiava in Pavia da questo grand'

Seguita, che sia la mutilazione, la Lumaca rapidamente si ritira nella sua cassetta, e col mezzo di un viscido sugo, che le Lumache quando sono mutilate in qualche parte spandono abbondantemente dal loro corpo, forma come una lastra, o cartella, colla quale l' Animale si chiude dentro al suo guscio come con un coperchio. Tale situazione abbenchè molto comoda all' Animale, fa d' uopo però all' Osservatore di sconcertarla qualunque volta gli viene talento di esaminarne i progressi della riproduzione. Questa cartella chiude tanto esattamente il guscio alle Lumache, che se non con difficoltà si concede l' ingresso all' aria. Il colore di questo coperchio, ossia di questa lastra è bianco, la sua tessitura sottile, ed una Lumaca qualche volta ne ha due, uno sopra l' altro, ed anche tre. Se esso viene distrutto, la Lumaca torna a rifarlo, ed è sorprendente il numero di queste lastre, che un solo Animale è capace di riprodurre. Continovando per altro a distruggerle, finalmente questo tenace umore si esaurisce nella Lumaca, e resta il guscio aperto; non è però necessario all' opera della Riproduzione simil coperchio, perchè alcuni di questi Rettili, benchè in piccolissimo numero riproducono il capo troncato, restando sempre la loro portatile cassetta priva della descritta lastra.

Non ostante pero l' amputazione accade qualche volta, che la Lumaca esce dal suo guscio, e si strascini da sito a sito, come faceva prima dell' operazione. D' ordinario stanno

---

Uomo, e per la particolare amicizia, che mi ha dimostrato, alla quale tutto devo ciò che in fatto di scienze naturali ho già pubblicato colle stampe, ed anderò in seguito producendo. Sto lavorando presentemente una Memoria sulla Riproduzione generativa, che altro non è, che il risultato delle istruzioni, e delle cognizioni datemi da così gran Maestro.

no quiete per più settimane, ed anche per mesi, e per farle uscire quando esaminare si vogliano i progressi della Riproduzione, conviene togliere colla punta di uno scalpello il loro coperchio, e poi usare qualche mezzo per farle sprigionare. Bonnet immergendo nell' acqua le sue Lumache, non solo si prevaleva di questo mezzo per fare l' amputazione, ma eziandio per mettersi al fatto degli andamenti della Riproduzione; non riesce però di farle sortire tutte subito. Alcune si mostrano molto ostinate, e non escono sennon parecchie ore dopo essere state sommerse nell' acqua. Allora quando però sortono dal loro guscio camminano come se nemmeno fossero prive di testa, colla sola differenza però, che il moto loro suol essere più lento. Il vellicarle con un pezzetto di legno nella maniera di sopra esposta è un mezzo abbastanza valevole per farle sortire anche più presto, che coll' acqua; nè altrimenti io usava allora quando decapitate aveva alcune Lumache, e voleva farle uscire dal guscio ov' eransi ritirate. Più volte mi sono divertito ad obbligarle a sortire un giorno, o due dopo l' operazione, e mi compiaceva a vedere quel tronco mozzo colle carni però tanto contratte, che dell' enorme piaga fatta non vi restava la menoma apertura, essendovi un piccolo incavo dove però non appariva indizio alcuno del taglio. L' acqua tepida le fa sortire anche più facilmente della fredda, e volendosi approfittare delle placide piogge, che cadono in Primavera, ed in Estate si possono far sortire facilmente esponendole all' aria aperta. Il partito preso da Spallanzani di romperle a piccoli colpi di una chiave, o della costola di un coltello una piccola parte del guscio di dietro riesce abbastanza bene, perchè la Lumaca irritata da quella viva impressione si determina a spuntare per d' avanti, poca, o molta che sia stata la recisione del capo. Si prevaleva Spallanzani di questo espediente qualunque volta la Lumaca si mostrava ostinata a comparire. L' apparecchio fin quì esposto serve non solamente per il taglio dell' intera testa, ma ora per quello delle sole corna, ora per la me-

metà soltanto della testa, ed ora per la metà delle corna secondo il capriccio dell' Osservatore. Parlando delle corna ossia antenne un colpo di forbice basta a farle balzare dalla testa quando sono abbastanza sviluppate, e ciò che è da riflettersi si è, che possono tagliarsi le une dopo le altre, per esempio dopo aver fatta l' amputazione delle corna anteriori, la Lumaca al suo solito ritira, e nasconde dentro al capo le corna minori, aspettando un poco d' ordinario ritorna a far comparire le altre intatte, le quali si tagliano. L' operazione della testa dimezzata consiste nello spaccare per lo mezzo il capo a questi Rettili, e ciò si fa distruggendo soltanto quella porzione, che si estende sino alle corna lunghe esclusivamente, e per reciderla a dovere bisogna far sì, che la Lumaca porti in fuori quanto è possibile quel cono, che rappresenta colla sua testa, e facendo con la forbice una sezione perpendicolare all' asse di questo cono si arriva a dimezzare esattamente la testa.

La soverchia mobilità della testa della Lumaca, lo allungarsi, e stringersi, e muoversi, che ella fa in tante maniere, siccome rende difficile l' intero taglio della testa, così rende più stentato il colpo di dimezzarla perfettamente; lo Sperimentatore però con paziente diligenza deve aspettare quel momento in cui la Lumaca è quieta, o meno in moto di quello, che suol essere d' ordinario, e ciò perchè la decollazione sia per metà, sia per intiera riesca quale si desidera, per giusto timore di non incappare in alcuno di quei equivoci, che indussero alcuni Naturalisti a negare apertamente il rifacimento della testa nelle Lumache. Oltre le accennate avvertenze discendiamo a considerare quale sia il grado di calore, in cui si debbano intraprendere simili esperienze, e quali siano finalmente le Lumache, che riescono al cimento, mentre molte ve ne sono, che ricusano in verun modo di riprodurre: sorgente di errori, e di contraddizioni mosse da varj Autori intorno a siffatta rigenerazione.

Toccante il grado di calore, che si richiede per simil fatta di esperienze, regolandosi col Termometro di Reaumur, non mai meno del decimo-terzo grado si possono intraprendere le sperienze con speranza di un felice riuscimento, che soltanto nella Primavera avánzata siam soliti godere nel nostro clima, e ciò sull' autorità del medesimo Spallanzani. Che se il taglio si faccia in un tempo in cui il sopraddetto grado di calore suol essere notabilmente minore, tali prove non riescono a meno, che le Lumache rese acefale nella mentovata fredda stagione, si mantengano col tepore di una Stufa fomentate fino al grado decimo-terzo, od anche più. Dando un' occhiata ai risultati di tali sperienze riferite dal proprio Scopritore in queste Memorie di Matematica, e di Fisica della Società Italiana, si trova che se la decollazione era seguita nel principio del Verno, custodendole dal freddo durante tutto l' Inverno, non compariva niun principio riproduttore, ed appena si rendeva palese in Maggio, e proseguiva coll' andar dell' Estate. Se poi era già cominciata la Riproduzione, per tutta quanta la cruda stagione veniva arrestata e sospesa, ma al ritorno della Primavera le corna, o il capo, qualunque esse fossero, che prima d' Inverno avessero cominciato a svilupparsi, seguitavano a farlo finchè giunti fossero all' ultimo grado di Riproduzione.

Oggetto non meno importante di tutto quello, che abbiamo finora esposto, si è la scelta delle Lumache, perchè nel prodigioso numero, che si trova di queste, disbrigandosi col linguaggio di Linneo, subito verrebbero determinate quelle spezie di Lumache, che pronte sono a riprodurre: *L' Helix pomatia, Itala, Zonaria, Nemoralis, Lucorum* sono quelle, che si possono cimentare con isperanza di un fortunato evento. Ma oltre essere la Lumaca di una delle citate specie, conviene, che sia anche di una tale età, perchè altrimenti le Lumache vecchie non sono abili alla rigenerazione della testa, vivono però acefale qualche tempo, mostrando al luogo della mutilazione la cicatrice increspata in forma di *cul di gallina*, per cui non potendo pigliar cibo, per inanizione muojono, e sembra, che di ciò cagione ne sia la rigidezza soverchia della fibra loro, la quale all' urto degli umori circolanti ricusa di estendersi più oltre, e modellarsi, e per evitare tale inconveniente non bisogna far uso di Lumache nere, o di un rossigno colore tinte, le quali sogliono essere anche rifiutate dalle nostre Tavole appunto per la durezza loro. Le Lumache di Giardino, che sono di color bruno, dai Francesi chiamate *Giardiniere* che sono le più comuni di tutte sono anche le più adattate, ma da queste conviene escluderne le più piccole, di guscio sottile, e gracile, d' un bianco verdeggiante, e di eleganti colori scaccate, perchè queste mutilate non riescono alla Riproduzione, e sembra che l' istessa piccolezza, e dilicatezza sia la ragione per cui non riescono. Perchè siccome mancandogli la testa, per le prime, ed ordinarie vie non gli è concesso di prendere alcun nutrimento, così è d' uopo che la materia al rifacimento loro venga somministrata di quell' adipe di cui ne mancano le troppo piccole, il qual adipe viene riassorbito nel sangue di quelle Lumache che prive sono dell' ordinario mezzo di cibarsi, qual è la Bocca. Diffatti non piccola prova ci porge il dimagramento sensibile, che si osserva nel corpo dell' Animale sotto lo stato di Riproduzione, ed una certa trasparenza, che si manifesta fino dalle parti più interne della Lumaca medesima. Unendo però in un sol punto di vista tutte queste avvertenze, l' osservazione maestra delle cose c' insegna, che preferibilmente alle altre Lumache quelle debbono essere scelte, che sono di mediocre grandezza, sottili piuttosto di guscio, e bianche di pelle, tenere al palato, non amare, ma pingui quanto più si può, per modo, che ponderando attentamente tutte le accennate circostanze per la scelta delle Lumache, e fatto che sia il taglio da mano già avvezza alle naturali sperienze, la Riproduzione succede non senza grande soddisfazione dello sperimentatore, e ciò in tutte quelle maniere, che resta fatta la sezione; locchè vale tanto per la Riproduzione della testa, come per quella del piede, e della coda. Prima di un mese non riesce di vedere alcun indizio di Riproduzione, ancorchè si tratti delle sole corna; appena dopo questo termine comincia a comparire al luogo dell' amputazione un piccol globo d'ordinario irregolare nella forma, e nel numero; in capo a due mesi, ed anche più la testa suol essere perfettamente riprodotta, e la Lumaca ne fa quell' uso, che faceva prima. Una prova della perfetta riproduzione dell' apparente testa, si è, che le Lumache le quali per tutto il tempo della loro rigenerazione rimasero digiune, seguito il rifacimento si cibano se loro si diano delle foglie di lattuga, o di viti, e mandano per secesso gli avanzi della nutrizione: argomento non equivoco, che esse hanno bene rifatta la bocca, i denti, e le parti tutte della nutrizione. Al Bonnet gli occorse di vedere, che una sua Lumaca dopo un mese che aveva in essa scoperta la vera Rigenerazione, corrose il coperchio del vaso in cui stava, che era di carta, ed ha mandati molti escrementi ben formati, che al colore, ed alla consistenza vedevasi, che provenivano dalla carta di cui erasi cibata. Alcune per altro ricusano qualunque alimento, e malgrado il loro digiuno si mostrano piene di vita. Il colore della pelle nelle teste riprodotte suol essere men carico, piuttosto cenericcio, oltrecchè è più liscia, e non sagrinata come la naturale. Si distingue altresì il rifacimento per mezzo anche di un legger solco al luogo dell' amputazione. Tale diversità di colore, ed il solco fanno vedere come la nuova testa sia al vecchio collo applicata, e tuttocchè il colorito dolce della pelle si perda, e da liscia che era divenga sagrinata, come suol essere nello stato naturale, non così succede di questo solco, che ostinatamente più o meno si conserva per modo, che non mi è mai riuscito di vederlo finora del tutto obliterato, abbenchè abbia conservato delle Lumache fino due anni, e nove mesi dopo la Riproduzione.

ARTICOLO IV.

Del taglio delle corna in particolare, e della loro Riproduzione.

Alla sommità delle due corna maggiori si trova un punto nereggiante creduto dallo Swammerdamio l'organo della vista. Questo diligente Osservatore descrive i tre umori egualmente come nell' Uomo, e ci fa vedere, che l' umor cristallino viene contenuto dalla Membrana Aracnoide, oltre la quale trovasi l' Uvea abbastanza sensibile all' occhio armato di buone lenti. Abbenchè l' esistenza di queste parti sia stata confermata da altri Naturalisti, pur non di meno ci consta per molte sperienze che le Lumache non godono del beneficio della vista, e ciascuno può assicurarsene quando le grandi corna sono bene allungate, e che bene si manifestano i punti nereggianti: avvicinando ad essi qualche corpo luminoso, e per fino la viva luce della candela ardente, ed anche lo splendore che forma il fuoco d' una lente, e cambiando repentinamente questi corpi in altri affatto opachi, non riesce di vedere alcun cambiamento nel movimento di queste corna, nè nel loro cammino, che attribuir si potesse all'impressione, sennon che quando per caso questi corpi urtino nelle corna, od il soverchio calore di una luce artificiale le produca dello stimolo, per cui si mostrano prontissime le Lumache a ritirare le corna, e tutte nascondersi dentro alla loro cassetta, lo che ha esperimentato Girardi. Mi è insorto un dubbio, che forse il troppo rapido passaggio di un corpo opaco ad un corpo lucidissimo facesse quell' effetto, che produce in noi la viva luce del Sole, che vinti dallo splendore siamo obbligati a chiudere gli occhi; mi sono preso la pena, e qualche volta mi è riuscito di far passare d' avanti a questi punti nereggianti varj corpi suscettibili in proporzione di maggiore, o minore fosforcità, e cominminciai con alcuni pezzi di legno verde, con alcune parti animali, con qualche metallo, e presentandogli finalmente un anello di brillanti; e non ostante questa varia successione di luce, la quale avrebbe potuto a poco a poco dilatare l' Uvea, e disporla anche all' impressione di un corpo molto luminoso, non mi diede occasione di credere, che godessero del benefizio della vista, mostrandosi affatto insensibili.

Il taglio delle corna è accompagnato da un getto di ceruleo sangue, che bagna sensibilmente lo stromento feritore, e prosiegue a zampillare per alcuni secondi; l' impeto con cui esce questo ceruleo umore fa, che se le corna sieno tagliate soltanto per metà si rovescia la pelle in quel modo, che si rovesciano i labbri di un vase arterioso quando è ferito. Il corno tagliato resta sovente attaccato allo stesso ferro che ha servito per troncarli, s' ingrossa, e si accorcia notabilmente, e parlando delle corna maggiori, il punto nereggiante per lo più si perde non già perchè esso rimasto sia attaccato ancora al capo, ma bensì perchè questa macchia oscura si seppellisce nel medesimo corno reciso, e non è fattibile il rinvenirlo sennon tagliandolo. Le corna tagliate danno appena qualche indizio di elasticità a differenza di alcune parti di altri Animali forniti della prerogativa di riprodurre, le quali staccate dal corpo seguitano a moversi, e a saltellare molto tempo dopo la recisione. Tali sono le code troncate delle Lucertole aquajole, e di varj pezzi di lombrici terrestri. I primi segni di rigenerazione delle corna tanto grandi, che piccole d' ordinario non si manifestano, che un mese circa dopo seguito il taglio, al qual tempo nel luogo della recisione compare un bottoncino, e se si tratta delle corna maggiori apparisce un piccol punto nero, che crescendo il bottoncino si fa anch' esso più grande, che nel termine di tre mesi viene a risarcire intieramente quella macchia oscura, che si osservava prima del taglio.

La Lumaca fa lo stesso uso delle nuove corna, che faceva prima dell' amputazione, godono essi di un' eguale sensibilità, sono della stessa lunghezza, e nel loro tutto mostrano una certa uniformità tanto osservandoli esternamente, quanto colla più esatta anatomia. Un solo immancabile divario scorgesi in queste Riproduzioni ed è, che le corna rifatte sogliono essere di un bianco pallido, e la pelle molto più dilicata di quella del capo. Dopo un anno però riacquistar sogliono il loro primiero colore, e divenendo la pelle egualmente robusta a quella del berettino, non si distinguono più le corna riprodotte dal rimanente (16), cosicchè queste corna rigenerate non si possono distinguere dalle corna di un' altra Lumaca, che non abbia subita alcuna operazione. Avviene alcuna volta di trovare nelle corna riprodotte qualche notabile mostruosità, e ciò che più sovente succede è, che le due corna maggiori si uniscono a formarne un solo portante in cima due punti nereggianti. Esaminando per altro anatomicamente si trova come le due corna erano combinate insieme a segno di formarne apparentemente un solo, lo che ha osservato per la prima volta Bonnet (17), ed a me è toccata la sorte di verificarlo più volte, anzi mi è accaduto parlando di mostruosità di vedere rigenerarsi le sole due corna maggiori su di un globo irregolare, che a un tempo anche molto inoltrato non acquistò mai quella necessaria perfezione abile ad eguagliare il capo troncato.

Fece grandissimo carico Murray (18) all' Abbate Spallanzani per essersi fatto Autore della scoperta della Riproduzione delle corna, quando il Linneo nelle sue Amenità Accademiche (19) aveva già accennato una tale rigenerazione venti anni prima che il chiarissimo Professore di Pavia pubblicasse il suo Prodromo sulle Riproduzioni Animali, come fece nel 1768. Tuttocchè su tale obbietto si sia abbastanza rifatto l' illustre Maestro (20), non posso però dispensarmi dal ricopiare quanto intorno a ciò egli trascrive dall' Haller (21): ,, Æquo animo oportet expendisse non eum verum Inventorem esse, cui vaga aliqua cogitatio elapsa sit in nullo fundata experimento, sed eum omnino eam laudem mereri, ,, qui verum ex suis fontibus per sua pericula, suasque meditationes eruerit, et adeo firmis rationibus statuerit, ut ,, veri cupidos convincant ,, . Un fatto simile è quello di Schaeffer di Ratisbona, il quale nel riferire che fece nel 1770. alcune sue osservazioni tendenti a dimostrare la vera, e rigorosa Riproduzione del capo troncato delle Lumache terrestri, si gloria non solo d' aver veduto rinascere le teste, ma di aver spinto forse un poco più in là la sua curiosità di quello, che non abbia fatto il suo ben avventuroso Scopritore, avendo veduto, oltre le teste riprodursi eziandio le code, che loro aveva tagliate, mentre in termini formali accennò la Riproduzione della coda, anzi di tutto il piede lo stesso Spallanzani colle seguenti parole ,, Avutasi la Riproduzione della testa, era ben naturale il pensare, che la ,, Lumaca riprodurrebbe altre parti meno di quella complicate. Tali sono quell' eminente collare, che cinge, e adorna ,, la schiena della Lumaca quando è fuori del guscio, e quel ,, piano, e largo piede, su cui appoggia il suo corpo quando ,, si muove. Queste due parti recise si restaurano ottimamente (22) ,, Perchè altronde non avendo lette queste parole

---

(16) Chiamansi Berettino, o Calotta gli integumenti, che cuoprono il globo ovale, ed il cervello di questi Animali, che altrimenti si chiamano l' Invoglio della testa.

(17) Journal de Phisique de Rozier 1777. Novembre. pag. 368.

(18) Si de Tentaculis solis sermo est, non potest ille jure rei inventor haberi. Etenim illi a Linneo jam viginti annos antea Cochleas resumere Tentacula post refectionem edixit. Joan. Andr. Murray &c. De Redintegratione Partium Cochleis limacibusque præcisarum disserens &c. Gottingæ 1776.

---

(19) Tom. II. pag. 58.

(20) Memoria seconda, ed ultima sopra la Riproduzione della testa nelle Lumache &c. dell'Abbate Spallanzani = Tom. II. parte seconda Ved. pag. 585. = 586. =.

(21) Phis. Tom. I.

(22) Ved. Prod. citat.

Schaeffer nell' estratto de' pubblici foglj, aveva tutta la ragione di compiacersi di una tale scoperta, non essendosi parlato nei foglj pubblici, che egli unicamente lesse, che della rigenerazione sola del capo troncato.

Non meno interessanti sono i fenomeni della rigenerazione della testa dimezzata, e dell' intiera. Il taglio della metà della testa è l' operazione più difficile, e se non osservando scrupolosamente le leggi che abbiamo accennato di sopra, può riuscire abbastanza bene il rifacimento, altrimenti nascono delle anomalie, e delle irregolarità, e non arrivasi ad ottenere una perfetta riparazione. Dopo due mesi circa, ed anche meno non è buona regola di accingersi ad osservare le Riproduzioni delle teste dimezzate, mentre prima di questo tempo non riesce, che di vedere una piccola massa informe priva affatto di organizzazione, ma al contrario intraprendendosi le osservazioni nel tempo accennato, coll' ajuto di una lente vedesi da quel globo spuntare in miniatúra le corna maggiori, e spingendo più avanti l' osservazione coll' ajuto del coltello gli si può vedere la bocca, la lingua, e per fino il principio dei denti; le quali parti svolgendosi sempre più, acquistano la loro ordinaria forma, e grandezza. Un andamento sì perfetto di Riproduzione rare volte riesce di osservarlo, e si sagrificano più dozzine di Lumache inutilmente.

Quanto noi troviamo d' interessante in queste peculiari rigenerazioni, altrettanto trovasi degna della curiosità filosofica la maniera colla quale si appalesa allo sperimentatore la rigenerazione di tutta la testa. Non credo che si possa agli avidi Osservatori presentare un quadro più vivo, e più elegante quanto la narrazione che ci fa Spallanzani del modo di procedere della natura nel rifacimento dell' intiera testa di questi Rettili (23).

La rigenerazione del piede non manca mai in tutte quelle Lumache dotate della facoltà riproduttiva; lo stesso deve dirsi della coda, e del collare. Al taglio di queste parti succede un piccolo spargimento di sangue, e la Riproduzione si eseguisce in minor spazio di tempo di quel che succeda nelle corna, e nella testa, e perdono facilmente la bianchezza solita osservarsi nelle parti rigenerate per modo, che nel colore si uniscono al rimanente della Lumaca, senza potersi distinguere da quelle, che non hanno riprodotto.

---

(23) Ved. Tom. I. pag. 597.

ARTICOLO V.

Della Riproduzione delle estremità organizzate delle Salamandre acquajuole, e del cambiamento d' epidermide a cui è soggetto questo Animale.

La Salamandra acquatica comune ne' nostri fossati conosciuta da' nostri Contadini sotto il nome di Tarantola ha la figura di un piccolo Quadrupede col ventre, ed il petto tinti di un bellissimo giallo dorato frammischiato a macchie nere, le quali si estendono anche sui fianchi, e sulla schiena, ove però risaltano meno per essere confusi da un fondo scuro ferrigno. I maschi hanno per la maggior parte una cresta sulla schiena, sono meno macchiati, ed in numero indefinitamente minore delle femmine.

Lo spettacolo delle Riproduzioni nelle Salamandre acquatiche è il più bello, il più maraviglioso, ed il più istruttivo di quanti fenomeni presentar possa la Scienza delle Riproduzioni evolutive, operando questi Animali le loro riparazioni allo scoperto in un vaso di acqua limpida, i di cui avanzamenti l'Osservatore può vedere a colpo d'occhio d'ora in ora.

Il primo fenomeno, per il quale diventano attendibili al Filosofo le Salamandre acquatiche è il cangiare, che fanno sovente di pelle, o per dir meglio di epidermide. Du-Fay fu il primo ad osservarlo (24).

---

(24) Memoire sur les Salamandres = nelle Memorie dell' Accademia di Parigi 1729.

Questa epidermide è simile ad un finissimo velo anzi ad una tela di ragno, di cui l' Animale si spoglia quattro o cinque volte al mese, e resta fluttuante nell' acqua come una nuvoletta; la prima a spogliarsi di questa soprapelle è la testa, poi il rimanente delle parti anteriori, il mezzo del corpo, ed in seguito si spogliano le parti deretane; qualche volta la spoglia, che getta la testa forma attorno al collo della Salamandra una spezie di colletto, o cravatta, ed altre volte s' accomoda sulla testa in forma di capuccio, o d' una cuffia. Il tempo, che impiega la Salamandra per l' intiero spoglio di questa membrana egli è un giorno, o due, e qualche volta anche tre, e si conosce quando è vicina a mutar l' epidermide, allorchè guardando il dorso obliquamente rassembra un pò biancastro, e poco dopo pare ricoperto come di una fina tela di raguo, la quale apparenza è prodotta dalla spoglia, che incomincia a distaccarsi dalle parti, che ricuopre immediatamente. Per altro considerata più da vicino questa spoglia ad occhio nudo, oppure armato di una lente, che non ingrandisce troppo gli oggetti, sembra composta di tante piccole scagliette, che rappresentano delle piccole callosità, oppure tubercoletti, di cui il corpo della Salamandra è pieno.

Quello, che i Poeti hanno immaginato delle ombre è benissimo applicabile alla spoglia delle Salamandre, che nuotante nell' acqua rappresenta il corpo, ora vedendosi delle mani, dei diti, dei piedi, una coda &c. Vi sarebbero molte indagini da farsi intorno alla tessitura di questa fina membrana, e queste osservazioni potrebbero somministrare del lume intorno alla natura, ed all' origine dell' epidermide poco conosciuta malgrado le ricerche fino ad ora fatte dai Fisiologi.

Queste mute nelle Salamandre non sono una malattia perchè le vediamo in piena muta alzarsi sulla superficie dell' acqua, e dar fondo, in somma moversi egualmente, e mangiare, che nel tempo in cui si cangiano la pelle; nè a questa muta sono soggette le parti soltanto antiche, ma quelle, che tagliate si rinovellano, e quello, che forma maggior maraviglia si è, che non si servono delle mani a distaccare questa spoglia. Bonnet tenne dietro a queste mute, e dai 14. Luglio ai 7. Settembre vide una Salamandra di mezzana grandezza cangiar di pelle undici volte, e ne diede una Tavola, che si può vedere nella citata sua Memoria (25). Io però non credo di più oltre intertenermi su tale cambiamento d' epidermide, offrendoci questo interessante Quadrupede una più graziosa maraviglia sotto il coltello anatomico, che ci scuopre tante, e sì variate parti, che a ragione sorprendono chi si fa a contemplarle.

La Salamandra ha in piccolo moltissime di quelle parti che hanno i Quadrupedi in grande, per cui quantunque i Naturalisti l' abbiano giustamente collocata tra gli Amfibj, non lascia di essere un vero Quadrupede. Oltre il cuore, l' arterie, le vene ed i polmoni, gode di una vera circolazione di sangue rosso, è fornita di un vero, e genuino occhio, ha le mandibole armate di un osso, che le circonda, e termina con una quantità di acutissimi denti collocati tutti regolarmente.

Nelle gambe poi è dove l' organismo s' avvicina più d' ogn' altra parte a quelle dei grossi Quadrupedi, le anteriori hanno 22. ossiccioli, e le posteriori 26. di varie irregolari figure, i diti quattro in numero nelle gambe anteriori, e cinque nelle posteriori, guerniti di una bell' unghia, e tutte queste parti provvedute di muscoli in gran novero, e tendini motori coperti della sua cute, d'arterie, vene irrorati, e ramificazioni nervose pel moto, e pel senso a dovizia sparsi. Bonnet chiama col nome di braccia, e mani le estremità anteriori, e con quelle di coste, e piedi le estremità posteriori. (26)

---

(25) Giornale di Rozier. Novembre 1777.

(26) Ved. Giornale di Fisica dell' Abbate Rozier per il Mese di Novembre 1777. Parigi.

La coda è parimenti un organo compostissimo formato da un seguito di piccole vertebre incastrate le une dentro le altre, le quali diventano successivamente più piccole in proporzione che la coda si va assottigliando, ed in mezzo a ciascuna vertebra vi passa il midollo allungato, che si estende alla più sottile di esse, e nel suo decorso getta delle nervose ramificazioni, le quali si confondono col resto dell' accompagnamento de' muscoli, arterie, vene &c. (27)

---

(27) Degni di seria considerazione sono la vita, ed il moto, che conservano per alcune ore i pezzi staccati delle Lucertole tanto acquajuole, che terrestri. Ho particolarmente, osservato che la coda delle Salamandre acquatiche è dotata della massima sensibilità, e si risente in ispezie nella parte più gracile, e sottile in modo che al toccarla appena, tutto si commove, si agita, e si sconcerta questo Animale. Ciò presupposto, a questa somma sensibilità pare che attribuire si debba il moto, e la vita, che la recisa, e staccata coda gode per molte ore, non altrimenti che le Rane decollate, e scorticate saltano, e vivono per ore, e per una intiera giornata al pari delle troncate code delle Lucertole tanto lacustri, che terrestri, e ciò in vigore di quella estrema sensibilità, che ha la sua sede nel midollo allungato, che staccato insieme alla vertebra rimane dentro di essa custodito. Una prova non equivoca di ciò ne porge il famigliare sperimento delle Donne, e dei Ragazzi di punzecchiare il centro della prima vertebra, che immediatamente si presenta all' occhio dopo il taglio in modo di toccare la molle sostanza ivi contenuta del midollo allungato, e con questa punzecchiatura cessa all' istante e moto, e vita, e poco importa che sia forte la puntura, perchè una sola paglia basta per fatalmente colpire anche le Rane più grosse. Questo bizzarro fenomeno di repentina morte, che immancabilmente succede al toccare con qualche stimolo il resto del midollo oblongato separato colla coda non potrebbe far sospettare ciò che alcuno già disse, che l' allungato midollo composto fosse di gangli nervosi capaci di sostenere le funzioni del cervello? Io non troverei grande difficoltà a crederlo atteso un così palmare costante esempio. In questo caso la morte della Rana acefala, e scorticata dipenderebbe dalla ferita di uno di questi cervelletti. Questa ed altre molte conghietture potrebbero aver luogo, se seguendo la sola via dei fatti non mi fossi prefisso di stare lontano dall' arte conghietturale.

Questo corredo d' organi, che la Salamandra offre all'Osservatore colle sue estremità tutto perfettamente si ripara qualunque volta tagliate vengano le gambe, le due mandibole, e la coda tutte od in parte, e trattandosi delle gambe si possono disarticolare, e strappare l' omero intiero, che lo Sperimentatore mai viene defraudato della bramata Riproduzione. Fatto il taglio di una gamba, in capo ad un mese, ed anche più compare un bottoncino conico, e nel crescere si alzano su di esso alcuni bitorzoletti, che nello spazio di due mesi acquistano tutt' insieme la lunghezza di due linee; sviluppandosi in seguito a poco a poco i diti, mostrano al compir dei quattro mesi il piedino tutto organizzato, e ben sviluppato, ma in piccolo affatto, e biancheggiante. Nella coda non si forma il bottone, nè alcun bitorzoletto, ma bensì una lamella affilata sottile, e mezzo trasparente, la quale non giunge ad eguagliare la parte staccata, che nel termine di un anno, come anche le gambe, che per acquistare un perfetto stabilimento di lunghezza, e colore esige uno spazio di tempo anche maggiore. Per accelerare poi le Riproduzioni giova il nutrirle con dei lombrici terrestri, cibo per loro gradito perchè anche vivono per molti giorni sopra l'acqua senza cessare di moversi anche tagliate, i quali movimenti secondo Bonnet eccitano l' appetito alle Salamandre (28). Non è però permesso di tutte insiememente troncare le parti, che la Salamandra ha la facoltà di riprodurre, perchè l' Animale perde la facoltà di nuotare nell' acqua, e disiquilibrato si rivolge supino, e muore. Lo stesso pure dee dirsi della coda, che volendola tagliare vicino alla sua origine, s' interessano de' grossi vasi, ed una porzione abbastanza grossa di midollo allungato, per cui si forma un' enorme piaga, che lascia sortire dei grossi grumi di grasso mi-

---

(28) Lo stesso Autore ha osservato, che le Salamandre non si servono de' denti per masticare, ma solo per trattenere la preda. Ved. Mem. cit.

misti a sangue, e delle glandole, formando tutt' insieme de' corpi oblonghi biancheggianti, che subiscono la cancrena marcata da una spezie di muffa, per cui l' Animale è obbligato a perire; oltre di che la coda loro serve moltissimo per diriggersi nell' acqua. Le mie sperienze fatte sempre alla vista di tutti gli amici in una delle grandi Case di Milano, ove molte Dotte Persone frequentano (*) ebbero un favorevole risultato. Io teneva le mie Salamandre in Vetri da confetture pieni d' acqua, ove molti si divertivano a veder le mute, e le Riproduzioni, e sebbene io or tutte recidessi le braccia, e le coscie, or solo alcune parti, ora longitudinalmente, ora per traverso, ho veduto generalmente ripararsi quelle parti, che aveva recise, avendo sempre ottenuto un consimile effetto nelle due mandibole, e nella coda; e quando una Salamandra riproduce tutte quattro le gambe, riproduce 99. ossa. Questi rifacimenti non si fanno senza eccezione, e qualche irregolarità, che qualche volta si manifesta nelle Riproduzioni; per atto d' esempio un dito di più, o di meno, due dita vicini tra di loro, e simili mostruosità per eccesso, o per difetto, che si annunziano con maggiore, o minor numero di bitorzoletti.

Una cosa degna da osservarsi si è, che le parti, che si riproducono hanno una semi-trasparenza, locchè non si vede nelle parti non riprodotte. Questo divario si conserva lungo tempo, e la trasparenza non scema, che a poco a poco in ragione che le parti si colorano di più. Quando si osserva con una lente qualcuno dei diti nel tempo, che sono ancora mezzo trasparenti, si vede che lo sono di più ai loro contorni di quello non sieno nelle altre parti; sembrano rinchiusi in un sottile invoglio trasparente, i diti vecchj non presentano questa pellucidità; la cosa è naturale. Le parti che cominciano a svilupparsi hanno un grado di trasparenza, che non hanno quelle parti le quali hanno finito di svilup-

par-

(*) Casa Anguissola.

parsi, oppure che lo sviluppo sia molto avanzato. A misura che lo sviluppamento si va aumentando si accresce il calibro dei vasi, e questo accrescimento di calibro dà luogo all' introduzione delle particelle nutrienti più grosse, e più coloranti.

Il tempo atto alle Riproduzioni è Giugno, Luglio, ed Agosto, Aprile, Maggio, ed ancora Settembre, e ne' primi tre mesi le Salamandre giovani riproducono in quattro mesi.

Due cose ho costantemente osservate nelle mie Riproduzioni, una, che la parte riprodotta non si allunga mai più della naturale, che si è levata, anzi resta per lo più alcun pocolino più corta, ed altre volte ella l' uguaglia perfettamente, sicchè si trovi la gamba destra anteriore affatto uguale in lunghezza alla sinistra pur anteriore ma naturale ugualissimamente, poi ho trovato allungarsi le due gambe, p. e. anteriori contemporaneamente tagliate ad un Animale, e le gambe anteriori ossia braccia in parità di circostanze si svolgono più presto delle posteriori, ossia gambe.

L' altra osservazione molto interessante si avvolge sulle Riproduzioni di Riproduzioni fino a sei successive delle quattro gambe, ed altre sei Riproduzioni della coda ottenute dal Professore Spallanzani (29) negli accennati primi tre mesi. Tre solamente si ottengono queste Riproduzioni di Riproduzioni nella coda dei Girini (30), nei Lombrici terrestri, e nell' apparente testa delle Lumache, ne' grandi Anemoni di Ma-

---

(29) V. Prodromo citato, e la Memoria sulla Riproduzione della testa delle Lumache inserita nel Tom. I. pag. 610, ove leggesi che in una di queste Salamandre tra le ossa della coda, e quelle della gamba riprodotte, giunse a contare 687. ossa rifatte.

(30) Girino è la Rana in istato di Verme, ed allora riproduce la coda, e le piccole gambine, che cominciano a venir fuori, qualora vengano tagliate, cessando affatto la potenza riproduttiva, quando il Girino è fatto rana. Merita su di ciò d' essere letta la citata Memoria del celebre Spallanzani pag. 607.

re; (31) ma per ciò basta: passiamo ora a dar conto delle avvertenze, che sono necessarie per il felice riuscimento dell' operazione.

Fatta che sia l' operazione, al primo abbandonarle nell' acqua, pel molto sangue che perdono, tutta la fanno rosseggiare, onde bisogna in seguito cambiarla due, o tre volte, ed anche più cioè per fino, che l' emorragìa sia cessata, e l' acqua si mantenga limpida.

Non si dovrà dimenticare di cambiarla poi due volte al giorno insino a tanto che la piaga si mantenga in suppurazione, per non lasciarla nel cattivo odore, che gli riesce tanto nocevole; dopo che sarà finita la suppurazione basterà cambiar l'acqua una volta al giorno, e meno ancora; e quando si vuole osservarle, e cambiar loro l'acqua bisogna maneggiarle con riguardo di non soffregare loro le ferite, le quali perciò s' inaspriscono, e spesso danno nuovo sangue, per la qual cosa loro si allunga questo stato pericoloso alla vita, mentre nello stato di Riproduzione si mostrano languide e malaticcie, e sono soggette a morire più, quanto più hanno mutilazioni.

Prima però di por termine al discorso risguardante la facoltà riproduttiva delle Salamandre, qualche cosa conviene osservare anche sulla Riproduzione dell' occhio scoperta da Blumenbachius, ed annunziata nel suo *Specimen Physiologiae comparatae inter Animalia calidi, & frigidi sanguinis* stampato in Gottinga l' anno 1789.

Da varj sperimenti fatti da codesto diligente Osservatore consta, che tagliando l' intero bulbo dell' occhio fino all' inserzione del nervo ottico, non si è mai riprodotto un altro vero, e genuino occhio, ma pullulò soltanto dalla recisa estremità del nervo un fungo solido, e biancheggiante, che riempì a poco a poco la vacante orbita. Tutte le Salamandre assoggettate a questa sperienza le vide morire idropiche dopo alcuni mesi. Non contento pero Blumenbachius di queste sperienze, ne ha istituita un' altra sullo stesso argomento, ma in modo diverso, e da verun altro praticato prima di lui. Tagliò ad una Lucerta lacustre la cornea con molta diligenza, e soltanto per farne sortire la lente cristallina, e tutti gli altri umori contenuti; indi tagliò le cascanti, e vuote tonache dell' occhio, lasciando però intatta una tenue porzione di esse tonache communi del bulbo, il quale sebbene per il corso di undici mesi non fosse giammai pervenuto ad eguagliare il volume dell' altro occhio, pure era perfettissimo, e vi si distinguevano esattamente tutte le parti costituenti un occhio sano.

---

(31) Opuscoli scelti. Vol. XVI. in ottavo dell' anno 1771. Milano. Leggasi la Memoria dell' Abate Diquemare sulla Riproduzione de'grandi Anemoni di Mare, che io ho cimentato in seguito fino ad avere tre Riproduzioni successive dal vecchio troncone.

Riunendo in un sol punto di vista i fatti fin quì descritti, pare, che tutti combinino a confermare la savia opinione di Carlo Bonnet della preesistenza di un' infinità di germi riparatori nel corpo degli Animali dotati della potenza riproduttiva, come ho già in altra occasione accennato (32) parlando anche degli Animali caldi.

La specie, la maniera, ed il luogo delle Riproduzioni vengono secondo l' illustre Filosofo Ginevrino probabilmente determinate dalla specie, dalle proporzioni, e posizioni di que' germi destinati alla riparazione delle parti, dall' arte, o dalla natura staccate, che si manifestano sotto la forma di bottoni conici, i quali contengono in miniatura le membra, che vanno a rifarsi.

Una conferma della preesistenza di questi germi riparatori l' abbiamo nella Riproduzione de' denti nelle Persone adulte, osservata in se medesimo, ed in altri da Dittier già

---

(32) Tom. IV. pag. 517.

Professore d' Anatomìa a Parigi, che nel notomizzare alcune mandibole trovò sotto le lamine esteriori de' denti compiutamente formati, e pronti a sortire, se fosse stato in tempo debito levato l' ostacolo di altri denti sovraimposti a questi (33). Il nostro dotto Chirurgo Paletta conosciuto per molte sue opere Anatomiche e Chirurgiche mi assicura di avere anch'egli trovati più volte de' denti nel diseccare alcune mandibole rinchiusi, e che sarebbero stati pronti a sortire se non avessero avuto l'ostacolo degli altri denti sopra di loro.

I Vegetabili presentano anch' essi una simile analoga preesistenza nei loro bottoni, o gemme, che involgono i rudimenti di un novello ramo, o di un fiore, che suol essere fruttifero, e qualche volta racchiudono una nuova pianta come sono le gemme dei Pioppi, e quelle di tutte le Piante Ciliacee a foglie carnose, e solide, che si moltiplicano per mezzo delle foglie medesime. Una quantità di questi germoglj evolutivi trovansi sotterra vicino alle radici, ovvero fuor di terra lungo i rami, o alle estremità delle foglie, o all' origine dell' ombrella dei fiori tra i loro pedicelli, oppure nei fiori stessi, e finalmente nel frutto: dalle quali osservazioni vedesi, che i corpi organizzati tanto animali, che vegetabili vanno di conserva nella Riproduzione evolutiva, come in molte altre funzioni comuni ad entrambi questi due regni della Natura.

La facoltà di riprodurre riguardo agli esseri misti è costantemente in ragione inversa della loro perfezione, e facoltà di sentire; cioè quanto è maggiore la forza del sentimento di cui è dotato l' Animale, tanto minori sono i termini delle Riproduzioni, che gli competono. Così i Mammali, e gli Uccelli, che sono gli esseri più perfetti e sensibili riproducono le ossa, i muscoli, i nervi, porzioni di cervello, come ho già dimostrato (34), non un' intera mano, od una gamba, nè un occhio, nè alcuna parte della macchina vivente molto composta; tutto al contrario succede ove la perfezione animale declina notabilmente come negli Amfibj, e nei Vermi, ne' quali l' irritabilità muscolare supplisce all' imperfezione de' sensi. Così questi a preferenza dei primi sono dalla Natura compensati col privilegio di tutte riprodurre le estremità organizzate del corpo. Per ultimo gli Animali semplicissimi, che risultano dalla ripetizione di parti similari molto più irritabili, che sensibili si riproducono per intiero, recisi in qualsivoglia parte del corpo, rinascendo tutti dai loro tagli, come abbiamo di sopra veduto avvenire in particolare nei Polipi, e come osservasi in tutti li Zoofiti.

---

(33) Opuscoli scelti di Milano 1781. Tom. I. pag. 280.

(34) Tom. citat.

SOPRA LE AURORE BOREALI LOCALI

MEMORIA

DI PIETRO ANTONIO BONDIOLI

Presentata da Pompilio Pozzetti

il dì 19. *Ottobre* 1801.

Nella mia Memoria sopra l' Aurora Boreale, pubblicata nel 1790, trassi da una serie non interrotta di fatti sperimentali e di osservazioni notorie la spiegazione di questo fenomeno e degli accidenti i più essenziali, che lo accompagnano. Non osai far in essa però che un cenno estremamente fuggitivo sopra l' articolo delle Aurore Boreali Locali, suscettibile di un grande sviluppo, che può dar compimento all' intera teoria di questo Fenomeno. Ora io mi propongo di trattar quest' ultimo soggetto d' indagine, che per la sua novità può interessare l' attenzione de' Fisici.

Non posso prescindere dal ricordare le basi della mia prima teoria, che espongo nella loro più semplice nudità, e che restringo alle seguenti. 1.° La verità dimostrata dell' enorme capacità de' vapori di rapire il fluido elettrico da tutti i corpi, di caricarsene, e di ritenerlo latente, finchè sono in istato di rarità vaporosa. 2.° Le testimonianze di Osservatori, che visitarono il Cerchio Polare d' accordo colle conoscenze, che abbiamo sulla teoria Fisica dell' Atmosfera, per cui c' è noto l' immenso ed incessante concorso di vapori verso il Polo. 3.° L' azione immancabile dell' eccessivo freddo proprio delle notti Polari, che deve produrre l' agghiacciamento improvviso dell' accumulamento vaporoso, formantesi in quelle regioni. 4.° La legge pur dimostrata da tanti fatti sperimentali, per cui l' agghiacciamento fa perdere totalmente ai vapori la loro prima capacità di contenere e d'imprigionare il fluido elettrico. 5.° Il subito sprigionamento di questo fluido, che dee risultarne nella forma sfolgorante, che gli è tutta propria, o che ritrae dalla sua unione alla luce, o al calorico. 6.° La varietà degli aspetti capricciosi di questo fenomeno per le forme differenti delle masse vaporose, pel grado diverso di rapidità con cui si condensano e gelano, e per le condizioni particolari degli strati aerei, ove sono esse sospese. 7.° Finalmente l'apparizione durevole della luce e dei fuochi, che mostrano l'Atmosfera, effetto del condensamento successivo di tutto l'accumulamento vaporoso, e del concorso di nuove masse gelantisi, sono gli elementi, che costituiscono la teoria dell'Aurora Boreale Polare.

Nulladimeno benchè le circostanze atte a produrre questo fenomeno regnino in grado eminente nella regione Polare, ciò non esclude che possano riscontrarsi altrove, ed operare la sua formazione in climi diversi. La legge della capacità elettrica de' vapori, e della perdita di questa capacità è costantemente immancabile. Dovrà dunque riprodursi lo stesso effetto, ovunque si trovi un accumulamento considerabile di vapori in uno stato elettrico conveniente, e sopraggiunga improvviso freddo. In tal guisa possono aver luogo le Aurore Boreali locali, meno frequenti, meno durevoli, e meno grandiose delle Polari, ma indipendenti da esse, e proprie soltanto d'una parte qualunque dell'Atmosfera, ove risplendono. Per riconoscere i gradi di probabilità o di certezza di questa dottrina è necessario di determinare il valore delle circostanze, e degli accidenti inseparabili dal fenomeno stesso, ravvicinandovi tutte le diverse opinioni sulla sua formazione.

Le ricerche che si sono istituite finora per rinvenire la causa dell'Aurora Boreale partono dal dato che la sua unica sede appartenga esclusivamente alla regione Polare. Questa supposizione pare fondata sopra osservazioni decisive. Giova pe-

però qualche volta chiamare al cimento di nuovi fatti anche le dottrine, che si credono le più certe, e si vedrà a questo proposito qual risultato dovremo ammettere. La vivacità, la frequenza, e la durata delle Aurore Boreali ne' climi meno freddi decrescono ordinariamente in ragione dell' allontanamento dal Cerchio Polare di questi medesimi climi, ed occupano la parte Boreale dell' Atmosfera. Ecco i motivi, che indussero a stabilire quest' opinione, ed a farla adottare come una verità dimostrata. Quanto alla diminuzione della forza e della frequenza dell' Aurore Boreali osservate in climi temperati, l' unica conseguenza che avrebbe potuto inferirsene, è che nei detti climi vi concorrono più debolmente e più difficilmente le circostanze necessarie a formarla. Quanto all' apparizione Settentrionale si può rispondere, ch' essa dovrebbe aver luogo direttamente al Nord, se tale fenomeno appartenesse soltanto alla regione Polare, e questo punto di Cielo dovrebbe mostrarsi costantemente come il centro più luminoso e più ardente dello stesso fenomeno, tanto nei climi rimoti quanto nei prossimi al cerchio Polare. Invece Monnier (*a*) descrivendo le Aurore Boreali, che si osservano in Isvezia, assicura ch' esse risplendono indistintamente in tutti i punti dell' Atmosfera. Non debbono neppure negligersi le osservazioni di Maupertuis (*b*) fatte nella Lapponia, ove questo fenomeno non presenta che alcune volte, egli dice, una luce fissa verso il Nord, ma sembra più spesso occupare indifferentemente tutte le regioni del Cielo. Costa poi da molte osservazioni che neppure ne' climi più temperati le Aurore Boreali appariscono costantemente al Nord de' differenti paesi, in cui sono visibili. Talora esse inclinano e si estendono verso l' occidente o verso l' oriente, e talora oltrepassano i limiti di questi punti del Cielo. Indi conformemente alla teoria tratta dai vapori gelantisi deve appunto ri-

---

(*a*) Institutions Astronomiques. (*b*) Voyage au Cercle Polaire.

sultarne che questo fenomeno si mostri alla parte Boreale dell' Atmosfera, particolarmente ne' Climi i più temperati, perchè in essi è questa la parte più fredda, e più esposta all' azione improvvisa de' venti gelidi. Collocati in oltre in un Clima temperato del nostro Emisfero noi non vedremo questo fenomeno alla regione meridionale, perchè dev' esso perdersi o cessar di formarsi ne' Climi caldissimi equatoriali, e non potremo scorgerlo, allorchè risplende nei Climi più freddi dell' Emisfero Australe per la stessa ragione, per cui non può giungere sino a noi la luce medesima che si svolge coll' elettricismo nell' Atmosfera del nostro Polo. La discussione che intraprendo basterà forse a mettere nel loro vero punto di vista tutte queste idee.

La dottrina delle Aurore Boreali formantisi esclusivamente nella regione Polare soggiace a difficoltà molto gravi ed intrinseche. Essa non può ammettersi se non si accorda a questo fenomeno tutto il grado di elevazione, ch' è indispensabile, perchè possa rendersi visibile agli Abitatori di Climi temperatissimi. Si rifletta che noi abbiamo veduto sfolgorare delle vividissime Aurore Boreali ne' nostri climi ed in regioni molto più temperate. Qual' altezza prodigiosa converrebbe dunque attribuire a questo fenomeno, perchè possa soprastare all' orizzonte di paesi lontanissimi? Il numero di tese fissato dai Fisici, che instituirono il calcolo di queste altezze, deve crescere enormemente per poco che cresca la distanza dal Polo dei detti paesi. Quindi ne verrebbe che l' Aurora Boreale supposta come un fenomeno assolutamente Polare non potrebbe rendersi visibile in Climi temperatissimi senza eccedere di gran lunga colla sua elevazione quella dell' Atmosfera del nostro Globo. Ciò poi è dimostrato falso da molti fatti. L' arco luminoso dell' Aurora Boreale si mostra sovente fisso ed immobile per molte ore di seguito nella parte del Cielo ove sfolgora, e si tiene d' ordinario per lungo tempo alla stessa altezza. Se fosse superiore all' Atmosfera, il moto diurno della terra dovrebbe farci apparire visibilmente il suo innalzamento progressivo sopra il nostr' orizzonte, o il suo abbassamento. L' immobilità, che presenta sovente questo fenomeno basta a farci inferire, che risiede in effetto nella nostr' Atmosfera, e che n' è portato in giro con essa. Inoltre apparso una volta ne' Climi i più temperati dovrebbe pure mostrarsi contemporaneamente, e senz' interruzione in tutti i punti intermedj sino al Polo. Non deve ignorarsi al contrario che sovente non si ha saputo vedere nel tempo medesimo molte Aurore Boreali, neppure da due luoghi pochissimo distanti l' uno dall' altro (*c*).

Nulladimeno si conceda per un momento tutta l' elevazione necessaria all' ipotesi, che ne suppone la sede esclusivamente Polare. Si aggiunga a questa l' elemento indispensabile della distanza de' paesi lontanissimi dal Cerchio Polare, ai quali si rende visibile. Allora la distanza risultante sarà inconciliabile assolutamente con altri fatti notorj, che accompagnano l' Aurore Boreali, e che noi osserviamo costantemente. Come in effetto far accordare con quest' ipotesi i segni elettrici notabilissimi, che si manifestano quando le Aurore Boreali dardeggiano la loro luce? Io non parlo dei segni elettrici debolissimi, soltanto sensibili ai più fini elettroscopj, per mezzo de' quali l' arte delle sperienze seppe giungere all' ultima delicatezza. I segni elettrici, che hanno luogo durante le Aurore Boreali assimilano in qualche maniera questo fenomeno a quelli delle meteore temporalesche, si palesano negli elettroscopj ordinarj, fanno deviare l' ago magnetico, e mostrano caricarsi d' elettricismo le punte metalliche affisse ai corpi isolanti. Come poi conciliar questi fatti coll' infinita massa d' aria coibente del fluido elettrico, che in questa supposizione dovrebbe esser frapposta tra il fenomeno della regione Polare, e gli Osservatori, che abitano i climi più temperati. Supposta trascendente la distanza dell' Aurora Boreale la sua influenza elettrica non po-

---

(*c*) Brisson, l. c.

potrebbe in verun modo continuarsi sino agli strati atmosferici, che ci toccano immediatamente, e dovrebbe interrompersi inevitabilmente, e distruggersi. Bisogna dunque rinunziar affatto all' idea della sterminata distanza di tal fenomeno, o negar la sua connessione con questi fatti, che non vi ponno esser disgiunti. Inoltre gli accidenti elettrici, che accompagnano l' Aurore Boreali debbono influire necessariamente a rettificare le nostre idee sulla genesi stessa del fenomeno che vuolsi spiegare. Noi non possiamo attribuirne la causa che al disequilibrio del fluido elettrico, e non conosciamo che i vapori, che possano renderlo visibile nell' Atmosfera accumulandolo, o disperdendolo. Questi fatti e questa legge invariabile ci portano per un altro sentiero al medesimo risultato poc' anzi indicato, relativamente all' altezza dell' Aurora Boreale, richiamandoci alla teoria di questo fenomeno, tratta dalla legge dei vapori gelantisi.

Aggiungasi come un di più che le Aurore Boreali osservate ne' nostri climi s' associano spesso ad accidenti affatto proprj della nostr' Atmosfera e del nostro Clima, con cui manifestano una corrispondenza particolare. Si mostrano esse di preferenza ne' momenti, in cui cresce per noi improvvisamente il grado del freddo. Un' Aurora Boreale, che deve spiegare una pompa straordinaria di luce, e di fuoco, e che può far supporre un' insigne preparazione di materiali atti a produrla, brilla tosto che il freddo notturno ha preso forza, e precede sempre la mezza notte. Questo fenomeno s' accompagna d' ordinario ad un vento freddissimo, che suole spirare durante la sua apparizione, o dopo la sua estinzione, e che prima di giungere sino a noi può aver prodotto il congelamento delle masse vaporose, in quella regione disposta a presentar lo spettacolo di cui si tratta. Non mancherebbero ancora dell' altre osservazioni, atte a provar che l' altezza delle Aurore Boreali è talvolta limitatissima, ma io non parlerò delle testimonianze de' Pescatori de' mari del Nord, i quali assicurano di aver sentito rimbombare più volte nel silenlenzio notturno un romore profondo simile a quello d' un cannonamento lontano, mentre il Cielo avvampava de' più vividi fuochi. Così non parlerò di qualche Fisico, che asserisce di aver potuto sentire durante lo sfolgorare dell' Aurora Boreale una spezie di crepito reiterato e frequente, simile a quello delle scintille elettriche, che scoppiano da' nostri apparecchi. Quest' ultime osservazioni non sono abbastanza ripetute ed autentiche per servire di base ad un ragionamento un po' rigoroso, ma ponno acquistar qualche forza dal loro ravvicinamento ai fatti di cui ho fatto parola. Tutti poi questi fatti, che appoggiano di concerto la teoria, fondata sulla capacità elettrica de' vapori gelantisi, sono affatto incompatibili con qualunque altra ipotesi, che supponga un' altezza ed una distanza sterminata tra l' Aurora Boreale, e le regioni, a cui si rende visibile.

D' altronde l' aspetto medesimo di quella stessa parte d'Atmosfera, ove dee svilupparsi un' Aurora Boreale, osservato anteriormente all' apparizione della sua luce, concorre a confermarci nell' idea dell' altezza limitata di questo fenomeno, provandoci l' influenza dei vapori nella sua formazione. Si osserva in effetto in tale circostanza un accumulamento vaporoso, che oscura la parte di Cielo, ove dee mostrarsi in progresso questo fenomeno, e si veggono varj ordini di nuvole temporalesche, che sembrano ravvicinarsi ed accavallarsi le une sopra le altre. Questo ammassamento vaporoso sotto forme diverse ora biancheggia, ora prende un colore sempre più fosco. Indi la luce s' affaccia improvvisamente e si stende. Allora tutta quella parte di Atmosfera rosseggia e s' ammanta di luce più o meno vivida; appariscono fascie rilucenti, e si spargono raggi vario-colorati; scoppiano getti e spruzzi sfavillantissimi, e s' innalzano colonne di fuoco; vi sovrastano corone giranti od immobili; e sfolgorano e si succedono le une alle altre tutte le forme, in cui suole mostrarsi questo fenomeno. Non v' ha allora di opaco che una base nuvolosa oscurissima, che resta sovente im-

immutabile nella sua oscurità, che sembra d' ordinario conterminare il nostr' Orizzonte, e sopra la quale grandeggia in tutta la sua pompa questo giuoco meraviglioso della natura. Talvolta questa base nuvolosa s' illumina anch' essa successivamente, o s' accende e si confonde col fenomeno stesso sino dal suo cominciare. Talvolta essa è poco osservabile, e sembra che l' Aurora Boreale non s' innalzi gran fatto sopra il nostr' Orizzonte sensibile, il che potrebbe darci un criterio della sua maggior distanza da noi. È allora principalmente che i Popoli rozzi attribuiscono questo fuoco dell' aria all' incendio di foreste lontane. Estinta appena la luce si veggono squarciate, o sono dissipate le prime nuvole.

Tutte le varietà che ponno aver luogo nelle apparenze dell' Aurora Boreale, o nelle forme di espressione, adottate da quelli che le descrivono, non escludono giammai la presenza dell' accumulamento vaporoso sopraindicato. In effetto parecchi Osservatori chiamano questa condizione importante dell'Atmosfera col nome di nuvola, che precede l'Aurora Boreale, che poi avvampa di luce. Assicurano altri che questa medesima nuvola non sembra diversa dalle comuni, e che per quanto l' occhio può giudicarne tiensi all' altezza ordinaria, ch' è loro propria. La descrivono essi come situata alcuni gradi sopra l' orizzonte, più elevata in alcuni punti del suo lembo inferiore, più bassa in alcuni altri, e notano che il suo lembo superiore è sovente la parte più pronta a risplendere. Così parlano altri d' una nuvola nera sopra la quale sorge questo fenomeno luminoso, ed aggiungono essi che in questa specie di base apronsi d' ordinario delle breccie lucenti, e si operano degli squarcj, e delle aperture, da cui fuggono spesso mille razzi brillanti. Hanno altri supposto di spiegarsi meglio dicendo che l' Aurora Boreale è preceduta dall' apparizione d' una nebbia addensatissima, che si dispone sopra dell' orizzonte sotto la forma di un segmento di cerchio, di cui lo stesso orizzonte tiene luogo di corda. Notano essi che la parte visibile della sua circonferenza, cioè la più superiore si trova ben presto contornata da una luce biancastra, da cui risultano uno o più archi luminosi. Descrivono gli altri accidenti proprj di questo fenomeno, e fanno rimarcare principalmente, che i getti fiammanti sembrano sortire più spesso dal segmento oscuro e fumoso. S' è ancora parlato di due ammassi nuvolosi distinti tra essi, da' quali ebbero origine due Aurore Boreali pure distinte, che offrirono le più vaghe apparenze. Esse sembravano due rivali agguerrite, che si cannonavano e si bombardavano a vicenda con una vivacità più o meno crescente, e che si estinsero l' una prima dell' altra dopo aver dato per lungo tempo lo spettacolo affatto nuovo di una battaglia di questo genere.

Io traggo quest' ultimo fatto da un'ossèrvazione del celebre Professor Chiminello, che intesi riferire in una sessione privata dell' Accademia delle Scienze, Lettere, ed Arti di Padova. Chiunque vorrà poi assicurarsi, ed acquistare una conoscenza fondata di tutti i fatti, che ho poc' anzi indicati, potrà farlo agevolmente. Senza assoggettarsi alla penosa fatica di rintracciare le osservazioni sopra le Aurore Boreali, che si trovano sparse in varj Trattati particolari, in molte Collezioni di Società dotte, ed in tanti Giornali Letterarj, basterà soltanto a togliere ogni dubbio su tal soggetto la lettura di tutto ciò, ch' è osservazione di fatti nel Trattato sopra l'Aurora Boreale di Mairan, nel Saggio Fisico di Musschembroek, e negli articoli sopra l' Aurora Boreale del Dizionario ragionato di Fisica di Brisson, e di quello di Monge, di Bertholon ec. E' certo che niuno di questi valenti Fisici ebbe mai l' intenzione di somministrar una serie di prove favorevoli alla mia teoria. Io non rimando percio i miei lettori a fonti sospette.

Volendo in progresso trascorrere tutte le vie battute da felicissimi ingegni per rinvenire un solido appoggio alla supposizione della somma altezza e distanza di questo fenomeno, noi potremo accorgersi facilmente che tutti i lor tentativi non bastarono a far loro raggiunger la meta proposta . Ben presto noi saremo convinti di questo fatto .

Vuolsi che l' Aurora Boreale risieda in regioni altissime, perchè si parte dal dato ch' essa non si possa formare assolutamente che al Polo, e quindi che non debba mostrarsi che da questa regione a rimotissimi Climi . Questa supposizione non si appoggia che al falso ragionamento dell' apparizione Boreale di questo fenomeno, ed alla maggiore intensione e frequenza, colla quale si mostra ne' Climi agghiacciati . Io mi credo dispensato dal confutare ulteriormente quest' opinione . Se poi si avvisa di rintracciarne una prova nell' una o nell' altra delle differenti ipotesi, con cui si è spiegata in varj tempi la genesi dell' Aurora Boreale Polare, noi non vedremo che mere ipotesi non suscettibili di veruna dimostrazione, affatto inopportune a dare un carattere di realità a questa Dottrina .

Così non potremo neppure far buona accoglienza all' idea dell' altezza trascendente di questo fenomeno, che deriva dalle regole immaginate da alcuni, onde calcolarla, benchè l' Aurora Boreale sia stata osservata da un solo luogo . Questi calcoli debbono esser necessariamente fallaci, perchè abbisognano di supposizioni gratuite, che servono loro di dati.

Il calcolo dell' altezza di questo fenomeno dedotto da più osservazioni contemporanee fatte in diversi luoghi distanti tra essi presenta un risultato, che sembra più soddisfacente. In questo caso si dee tuttavia tener conto della parallassi sensibile, e dell' abbassamento apparente, e regolare degli archi, e del segmento luminoso, secondo che gli Osservatori sono collocati lungi dal Polo, o dalle Latitudini decrescenti . Cade poi la convenienza di questi dati subito che può aversi il minimo dubbio sulla unità del fenomeno osservato contemporaneamente ne' differenti paesi . Si avverta inoltre che appunto queste medesime osservazioni di Aurore Boreali, fatte contemporaneamente, presentano tali circostanze e tali differenze osservabili nella loro altezza apparente

parente, nelle fasi e nella durata, per cui invece di supporne una sola visibile in differenti paesi sembra inevitabile di dover ammetterne molte di contemporanee e locali, indipendenti tra esse. Noi dobbiamo questa conoscenza, enunziata sulle prime come un modesto sospetto, al celebre Professore Toaldo, in cui la Fisica ha perduto un Filosofo ridondante di genio, ed un Osservator laboriosissimo e pazientissimo. Spinto dal solo spirito, che tende a separar la verità dall' errore, Egli istituì un esame rigorosissimo sopra un gran numero di queste medesime osservazioni, che lo portò alla conseguenza indicata. Quindi molto tempo prima che si potesse aver conoscenza di una teoria fondata su basi sperimentali, ed applicabile tanto all' Aurore Polari quanto all' Aurore Locali, Egli solea dire con un linguaggio, che sentiva l' impulsione del suo proprio convincimento, che questo fenomeno dovea formarsi localmente, come accade a un di presso della pioggia, della gragnuola, dei fulmini ec., i quali cadono nelle stesse ore sui tetti e sulle strade di paesi innumerabili, senza derivar certamente dalla medesima parte di Atmosfera o di Cielo. Così Egli non ricusò di accogliere volentieri la mia teoria di questo fenomeno, e volle lasciare una pubblica testimonianza del suo avviso favorevole sopra di essa.

La dottrina della pluralità delle Aurore Boreali contemporanee è atta egualmente a distruggere tutti gli altri calcoli concepiti in maniera diversa, e diretti a determinare la stessa altezza di questo fenomeno, osservato in differenti paesi. Ciò ha luogo soprattuto se questi sono ad una distanza considerabile tra di essi. Se poi manca nel calcolo l' elemento di questa distanza, è certo che la base terminata da punti del globo non molto lontani l' uno dall' altro, non basta a far che si possa desumere alcuna conseguenza soddisfacente, e di un' approssimazione sulla quale si possa contare. Malgrado il rispetto profondo dovuto al nome di Bergman la sua misura dell' altezza delle Aurore Boreali, osservate in Upsal ed in Hermosand, deve confinarsi tra i risultati di quest' ultima classe.

Non parlerò particolarmente sopra i calcoli dell' altezza di questo ſenomeno che il celebre Mairan ha dedotto dalla sua ipotesi della materia combustibilissima, staccata dall' Atmosfera Solare, e cadente negli strati altissimi dell' Atmosfera del nostro Globo, ove s' immerge a maggiore o minore profondità, a misura della gravità specifica, di cui è dotata. Questa ipotesi trascendente e fantastica, che suppone elementi inaccessibili alle nostre ricerche, e leggi straniere alla nostra sfera di conoscenze sembra immaginata espressamente per essere poi cantata sulla cetra latina. Essa però non acquista dai nuovi numeri nè solidità di principj nè rigore di dimostrazione.

Non mancano poi quelli tra i Fisici, che senza accingersi a questi calcoli, e senza pretendere di determinar queste misure vennero ad inferire indirettamente l' enorme altezza dell' Aurore Boreali, attenendosi soltanto a qualche fatto isolato, od a qualche novella ipotesi.

Talora s' è osservato che l' Aurore Boreali sovrastano alla sommità di alte montagne, e se ne trasse ben presto partito per farne un argomento spezioso della loro altezza superiore alla region de' vapori. Tuttavia finchè non può ignorarsi, che le sommità di alte montagne sono d' ordinario coperte d' immense nevi, io sarò autorizzato a pensare, che grandissime quantità di vapori ponno spaziare ed accumularsi al di sopra di queste altezze. Io sono ben lungi invece dal credere che questo fenomeno possa formarsi negli strati più bassi della region vaporosa, ma non inchino certamente a pensare, che questa termini all' altezza di quelle nuvole, che si formano, o che discendono a minime distanze dal nostro suolo.

S' è poi immaginato di conciliare la supposizione della somma altezza di questo fenomeno, attribuendone la causa alla combustione del gaz idrogeno, che per la sua leggerezza dee sorvolare alle più alte regioni dell' aria. Si rifletta pertanto che questa combustione non potrebbe essere che languidissima ed uniforme quand' avesse luogo nelle regioni più alte e più diradate, o come pretendono alcuni alla sommità delle stesse Colonne atmosferiche. Per lo contrario essa non può riuscire che troppo tumultuosa e momentanea tutte le volte che si ecciti inferiormente, ove il principio della combustione è abbondante, e questo sommo combustibile si trova in istretto contatto con esso. Noi vediamo quest' ultimo stato di cose in tempo delle burrasche atmosferiche, in cui dopo i fenomeni elettrici, sotto forma di baleni e di folgori, precipitano i torrenti di pioggia, attribuiti alla combustione del gaz idrogeno. Infine qualunque sieno le circostanze, in cui si supponga la combustione di questo fluido, essa è insufficiente a render ragione della vivacità sfolgorante, e delle forme capricciose e svariate, della lunga durata, e degli accidenti elettrici, che caratterizzano il fenomeno dell' Aurora Boreale. Il gaz idrogeno dunque potrebbe essere al più un elemento accessorio, ma non necessario nella genesi di questo fenomeno, ed estraneo alla sua spiegazione. Nella mia prima Memoria sopra l' Aurora Boreale non ho fatto che un cenno fugacissimo di quest' ipotesi. Io sentiva un segreto rincrescimento che il sommo Fisico Alessandro Volta l'avesse adottata, malgrado le sue belle sperienze sulla capacità elettrica de' vapori, di cui ha arricchita la Fisica (*a*).

Le

(*a*) In una sua Lettera a me indirizzata, dopo la pubblicazione della mia prima Memoria, il Professor Volta parla di un suo scritto inedito, e mi annunzia di aver esposto Egli stesso una teoria non diversa da quella, che ho pubblicata. Io dividerei con entusiasmo col Professor Volta quel grado qualunque di merito, che potesse venirmi accordato per tal produzione. Io sono però arrestato nella mia marcia, poichè Egli fa nella stessa Lettera sopraccennata un'obbiezione assolutamente, e totalmente distruttiva della medesima teoria, che parea già disposto a voler adottare come sua propria, e

Le opinioni sopra l' Aurora Boreale del Professor Hell, e del P. Savioli non sono punto opportune a convalidar la dottrina della somma altezza di questo fenomeno, che suppongono per altro Polare. Io devo pertanto farne almeno un brevissimo cenno, perchè mi avvenne di vederle adottare da quelli stessi, che sogliono esagerare le altezze dell'Aurora Boreale. Queste due opinioni, benchè diverse tra esse, non differiscono essenzialmente, quanto alle difficoltà, che rinchiudono. Immaginano i mentovati Fisici, che le rifrazioni de' raggi Solari durante le notti polari nelle particole agghiacciate sparse nell' aria, o nei massi agghiacciati del Polo possano formare le Aurore Boreali. Si rifletta però che non è possibile d' intendere come l'effetto delle notturne rifrazioni possa rendersi visibile sotto tante forme vividissime e sfolgoranti, associandosi ai fenomeni elettrici sopraindicati, e manifestandosi a Climi temperatissimi. Io son d' avviso che per adottar questa ipotesi bisognerebbe aver prima ottenuta la facoltà d' obbliare perfettamente le condizioni e gli effetti cogniti delle rifrazioni ordinarie, e gli accidenti e le fasi, che caratterizzano l' Aurora Boreale. Nel modo stesso non saprei come seguire l' esempio di coraggio dato da alcuni altri, che confusero questo fenomeno con quello dell' Iridi e de' Parelj.

Non sarebbe neppur facile di farsi un' idea dell' altezza dell' Aurora Boreale, se fosse accettabile la maniera di spiega-

---

che si era riservato di pubblicare. Trovasi stampata questa Lettera nel Giornale Fisico-Medico del Dottor Brugnatelli, Fascicolo di Gennajo del 1792, pagina 55. Quest' obbiezione medesima tratta dalla dottrina dell' enorme altezza attribuita all' Aurora Boreale, superiore di gran lunga alla region vaporosa, è esaminata nella presente Memoria. Qualunque sia la nuova opinione del Volta su questo proposito niuno saprà più di me rispettare in questo grand' Uomo lo scopritore dei fatti, ed il fondatore delle leggi Fisiche le più luminose, e le più suscettibili di far avanzare la Scienza della natura.

gazione che ne dà il Professor Libes; è però molto più facile di riconoscerne l' insussistenza. Egli suppone ch' una grande quantità di acido nitroso si formi al Polo dalla combinazione del gaz Azoto col gaz Oxigeno, e fa consistere l' Aurora Boreale nella sfumazione rosseggiante di questo acido. Io accordarei troppo non movendo alcun dubbio sopra questa genesi straordinaria di acido nitroso attribuita alla regione polare. Tuttavia mi basta di far notare, che gli esperimenti i più opportuni a provarlo assicurano indubitatamente che l' evaporazione di quest' acido non si rende visibile nell' oscurità, e non ha veruna attitudine di prendere la forma lucida.

Niun sistema potrebbe servire più acconciamente di quello di Hervieu ad appoggiar l' opinione della somma altezza dell' Aurora Boreale, ed a render ragione de' suoi principali accidenti. Egli suppone una spezie d' antipatia ed una ripulsione continua tra il calorico e il fluido elettrico, per cui si respingono reciprocamente, e quest' ultimo rifugge al Polo, ove forma colla sua ridondanza il fenomeno luminoso in quistione. Nulladimeno non si può dissimulare, che questo principio ipotetico, da cui parte Hervieu è assolutamente falso, ed in opposizione diretta coi fatti i più cogniti. Non esiste alcuna ripulsione o antipatia tra il calorico ed il fluido elettrico. Noi sappiamo al contrario che gli stessi corpi coibenti acquistano la proprietà deferente del fluido elettrico tosto che sieno riscaldati, che i vapori e tutte le materie diradatissime dal calorico hanno una somma capacità di caricarsene, e di ritenerlo latente, e che la stessa fiamma l' assorbe avidamente da tutti i corpi elettrizzati, e lo disperde per mezzo degli effluvj emanati da essa al momento che si condensano.

Finalmente dopo aver corso dietro a tutti i sogni, ed a tutte le verità Fisiche, che presenta quest' articolo di ricerca mi pare di poter conchiudere. 1.° Che non si possa adottare in verun modo alcuna delle ipotesi, che suppongono nell' Aurora Boreale un fenomeno esclusivamente Polare. 2.° Che convenga rifiutare decisamente l' opinione dell' enorme altezza, e della sterminata distanza, in cui dovrebbero essere le Aurore Boreali Polari per rendersi visibili nei Climi più temperati. 3.° Che la distanza delle Aurore Boreali visibili nei detti Climi dev' essere di gran lunga inferiore a quella che s' è immaginata per essere compatibile cogli accidenti, che le accompagnano. 4.° Che l' esistenza delle Aurore Locali n' è un risultato immancabile. 5.° Che la teoria fondata sulla legge de' vapori insignemente elettrici, e gelantisi improvvisamente, serve tanto alla spiegazione delle Aurore Polari quanto a quella delle Locali. 6.° Che la sua dimostrazione non dipende da alcuna ipotesi, ma da sperimenti e da fatti, che sono abbastanza positivi separatamente, e che acquistano la più gran forza pel loro insieme. 7.° Che la serie di questi fatti sembra non solo costituire la teoria, ma ancora far parte del fenomeno stesso. 8.° Che dovremo poi attendere da nuove osservazioni, istituite con più sicurezza di principj i veri dati onde limitar le reali distanze, in cui possono rendersi in effetto visibili tanto le Aurore Boreali Polari quanto quelle puramente Locali. 9.° Che finalmente questi medesimi dati potranno farci conoscere in progresso con maggior precisione tutte le circostanze, in cui si forma questo fenomeno, non che le regioni e le plaghe che occupa realmente, per cui le Aurore Boreali abbandoneranno forse un giorno il loro antico nome per prendere quello più generico di Aurore Elettriche.

APPENDICE

ALLE OSSERVAZIONI ELETTRICO-ATMOSFERICHE, E BAROMETRICHE COMPARATE (*a*)

Di Giuseppe Maria Giovene.

Ricuperata il dì 21. *Ottobre* 1801.

Avea scritte le mie *osservazioni elettrico-Atmosferiche, e Barometriche comparate*, quando per opera di un Amico mi si è data l' opportunità di poter leggere la bella, ed interessante *Dissertation sur les mouvements irreguliers de l'Aiguille aimantée par M. Van Swinden* la quale si trova nel Tomo III. *dell' Analogie de l'electricité & du magnetisme, ou recueil des memoires couronnées par l'Academie de Baviere par M. J. H. Van Swinden = à la Haya =* 1785. In essa ò trovato cose, le quali mirabilmente confermano le idee da me esposte in quello scritto, e che possono aprire strada a nuove interessanti osservazioni, ed a nuove importanti scoperte. Il celebre Autore prova in una maniera da non ammetter replica l' influenza dell' Aurora Boreale sull' ago calamitato. In dieci anni di osservazioni, e precisamente in 3974 giorni l' ago calamitato fu soggetto per 519 volte ad agitazioni, o movimenti irregolari assai riflessibili, delle quali agitazioni 351 furono precedute, accompagnate, e seguite da Aurore Boreali riconosciute, lasciando da parte quelle, le quali dovettero essere invisibili, o perchè accadute a giorno chiaro, o per altra qualunque causa. Conchiude con ragione, non potersi negare, ed essere pressocchè palpabile l' influenza dell' Aurora Boreale sull' ago magnetico. Accenna indi avere già

(*a*) *Un mero accidente impedì che essa* Appendice *fosse colle* Osservazioni *medesime dell' Autore impressa nel Tomo ottavo di queste Memorie.* Nota del Segretario.

già il Sig. de Mairan annunziato le Aurore Boreali essere più frequenti ne' mesi del Perielio, che ne' mesi dell' Afelio nella proporzione di 9 a 4, quantunque delle 519 agitazioni dell' ago avesse veduto il Sig. Van Swinden essersene fatte 307 ne' mesi di Perielio, 212 ne' mesi dell' Afelio, locchè torna alla proporzione di 9 a 6, ed avverte egli saviamente, e modestamente avere il Sig. de Mairan calcolato la sua proporzione sopra un numero pressocchè immenso di osservazioni, e lui soltanto su quello di un decennio; bastando per altro all' uopo il trovarsi costante l' eccesso delle agitazioni Perielie sulle Afelie. Finalmente dopo mille belle osservazioni, e riflessioni giudiziose passa ad esaminare, se le agitazioni, o movimenti regolari, che vogliansi dire, dell' ago magnetico, dipendano dalla Elettricità, e si mette dalla negativa: e per altra parte convinto, com' egli dice, che sia l' Atmosfera solare causa delle Aurore Boreali sospetta potervi essere una particolare attrazione tra la materia di quell' Atmosfera, ed il fluido magnetico. Veramente le osservazioni elettrico-atmosferiche, le quali adduce come fatte da' suoi amici il Sig. Van Swinden, non portano a conchiudere esservi influenza dell' elettrico fluido sull' ago calamitato, come per altra parte è pur vero, che quelle osservazioni non furono fatte con quegli istromenti, con quel metodo, e con quella costanza con cui si dovea. Sarebbe stato desiderabile, che l' Olandese Meteorologista avesse avuto a compagno per le osservazioni elettriche un altro Osservatore a lui simile, e provveduto d' istromenti atti ad indicare la vera elettricità dell' aria, e bastantemente paziente per continuarle per qualche anno giornalmente. Sarebbe stato ancora desiderabile, che alle osservazioni dell' ago magnetico, e delle Aurore Boreali si fossero unite le osservazioni barometriche ancora. Io che abito un paese, dove le Aurore Boreali sono così rare da reputarsi una specie di portento quando si lascian vedere, non sono nello stato di poter avere mie proprie osservazioni, nondimeno credo potermi approfittare di quelle del

Sig. Van Swinden. E primieramente dalla notissima osservazione del Sig. Win, da altri ancor verificata, di essere, cioè, le Aurore Boreali le foriere di vicino vento del Sud, sospetto, che quelle debbano apparire a barometro o discendente, ovvero prossimo, o almen disposto a farsi discendente, quale suol' essere il barometro allorchè quel vento spira, o è prossimo a spirare. Cio premesso ò voluto istituire una terza sorta di comparazione tra le osservazioni elettriche, e barometriche mie, e le osservazioni dell' ago magnetico del Sig. Van Swinden. Ecco intanto una tavola contenente le altezze barometriche, e li gradi della Elettricità atmosferica distintamente per li mesi Perielii, ed Afelii.

Altezze Barometriche				Elettricità atmosferica			
Mesi Perielii		Mesi Afelii		Mesi Perielii		Mesi Afelii	
Genn.	28. 1. $\frac{8}{10}$	Aprile	28. 2.	Genn.	6. $\frac{8}{100}$	Aprile	4. $\frac{76}{100}$
Febbr.	28. 1. $\frac{4}{10}$	Magg.	28. 2. $\frac{7}{10}$	Febbr.	5. $\frac{64}{100}$	Magg.	4. $\frac{37}{100}$
Marzo	28. 1. $\frac{1}{10}$	Giugn.	28. 1.	Marzo	5. $\frac{16}{100}$	Giugn.	5. $\frac{90}{100}$
Ottobr.	28. 2.	Luglio	28. 2. $\frac{4}{10}$	Ottobr.	3. $\frac{99}{100}$	Luglio	4. $\frac{86}{100}$
Nov.	28. 2.	Agosto	28. 2. $\frac{3}{10}$	Nov.	4. $\frac{76}{100}$	Agosto	3. $\frac{49}{100}$
Dec.	28. 1. $\frac{8}{10}$	Sett.	28. 2.	Dec.	8. $\frac{50}{100}$	Sett.	4. $\frac{45}{100}$
Somma	168. 10. $\frac{1}{10}$	Somma	169. 0. $\frac{4}{10}$	Somma	34. $\frac{13}{100}$	Somma	27. $\frac{82}{100}$

Trovo dunque l' eccesso della Elettricità atmosferica ne' mesi perielii sopra quella de' mesi afelii corrispondere presso a poco, e nella quasi proporzione, che le agitazioni dell'ago magnetico ne' stessi rispettivi mesi. In fatti le agitazioni magnetiche ne' mesi perielii secondo li calcoli del Sig. Van-Swinden sono alle agitazioni ne' mesi afelii come 307 a 212, e la Elettricità atmosferica ne' mesi perielii a quella de' mesi afelii è come 307 a 244. Che se si voglia, come in quelle mie osservazioni dissi forse doversi fare, darsi un aumento alla Elettricità dell' Ottobre, ed all' incontro dibattersi qualche cosa dalla Elettricità di Giugno, la proporzione si troverà assolutamente la stessa. E da questa tavola ancora si vede le minori altezze barometriche essere corrispondenti alla maggior Elettricità atmosferica, e col maggior numero delle agitazioni magnetiche. Sembra dunque, che le osservazioni mie comparate colle osservazioni del Sig. Van-Swinden ci portino un passo al di là del punto, sul quale congetturando mi era fermato in quelle mie osservazioni. E per verità in tanto meraviglioso accordo di risultati, ed in tanta convenienza di proporzioni non è possibile non riconoscere una corrispondenza tra il Barometro, le Aurore Boreali, le agitazioni dell' ago magnetico, e l' Elettricità, cosicchè una debba essere la causa produttrice di tutti questi fenomeni.

Ma vi è pure un' altra via da dimostrare su le stesse osservazioni del Sig. Van-Swinden la corrispondenza tra il Barometro, le Aurore Boreali, e tralle agitazioni dell' ago magnetico, che dall' Autore con termine francese di marina chiamansi *affollements*. Ecco la tavola.

Mesi Perielii	Affollements	Aurore Boreali	Mesi Afelii	Affollements	Aurore Boreali
Gen.	17	13	Aprile	14	12
Feb.	13	10	Maggio	5	4
Marzo	25	23	Giugno	4	1
Ottobre	18	15	Luglio	6	6
Nov.	15	11	Agosto	9	6
Dec.	13	10	Sett.	27	20
Totale	101	82	Totale	65	49

In questa tavola è osservabile, che ne' mesi, per così dire, meno perielii, quali sono Marzo, ed Ottobre si trova il maggior numero di *affollements*, e di Aurore Boreali, siccome parimenti ne' mesi meno afelii quali sono il Settembre, e l'Aprile si trova il maggior numero di *affollements*, e di Aurore Boreali. Di 101 *affollement*s de' sei mesi perielii 43 sono del Marzo, e dell' Ottobre, e di 82 Aurore Boreali 38 sono per li due già detti mesi locchè forma quasi la metà del tutto. E ne' mesi afelii di 65 *affollements* sono 41 per l' Aprile, ed il Settembre, siccome di 49 Aurore Boreali sono 32 per li detti mesi, locchè forma più della metà. Ma chi degli osservatori meteorologici non sa essere li mesi intorno agli equinozii li mesi delle maggiori variazioni barometriche, o forse dirò meglio delle perpetue agitazioni barometriche? E così ancora li mesi di Maggio, Giugno, Luglio, ed Agosto sono li mesi della maggior tranquillità del Barometro, sono parimenti li mesi della maggior tranquillità dell' ago magnetico, e li mesi della minore frequenza delle Aurore Boreali. Se io avessi avuto la pazienza di continuare per una decina di anni le osservazioni elettrico-atmosferiche, come si diè la pena il Sig. Van-Swinden di continuare le sue per 3924 giorni, ni, avrei potuto comparare direttamente quest' ultima di lui tavola colli risultati decennali dell' Elettricità. Dee bastare però aver io dimostrato nello scorso numero delle mie osservazioni l'Elettricità atmosferica essere in proporzione, e corrispondenza colle differenze tra la massima, e minima elevazione barometrica, cioè colle variazioni barometriche. Del rimanente mancandomi (e dovranno mancarmi sempre) osservazioni di Aurore Boreali, e mancandomi per ora osservazioni mie proprie sull' ago magnetico, le congetture, che ò dato sulla corrispondenza del Barometro, della Elettricità atmosferica, dell' Aurore Boreali, e delle agitazioni dell' ago magnetico, e su la unità della causa, cioè la marea elettricà, non oltrepasseranno giammai li limiti del sospetto. Tocca ai bravi, e sapienti osservatori del Nord, ove le Aurore Boreali si fan vedere, il distruggerlo, o il confermarlo, e non ò scritto quest' appendice se non ad oggetto d' invitarveli.

DELLA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE DETERMINATE PARTICOLARI DI GRADO SUPERIORE AL QUARTO

MEMORIA

Di Paolo Ruffini.

Ricevuta il dì 21. *Ottobre* 1801.

Dopo avere dimostrata impossibile la soluzione delle Equazioni algebraiche determinate generali di grado superiore al quarto (Ruffini Teor. delle Equaz. Cap. 13.°) non resta che di fissar l' attenzione sulle Equazioni particolari. Nella nostra Teoria, seguendo le tracce dell' immortale Lagrange, abbiamo nel Cap. 15.° veduto che un' Equazione data di grado maggiore del quarto può abbassarsi opportunamente alla sua soluzione, mentre sia determinabile un qualche particolare rapporto fra le sue radici: in seguito dopo aver fatte su questo punto delle considerazioni generali, abbiamo determinati alcuni casi particolari, ne' quali può attualmente ottenersi una simile riduzione Cap. 20.°; ma tutto questo non giunge, anzi è ben lontano dal determinare in tutta la sua estensione quanto concerne la soluzione, e l' abbassamento delle Equazioni algebraiche determinate.

Proposta un' Equazione particolare, e di grado maggiore del quarto, converrebbe saper conoscere

1.° I casi, in cui questa non è capace di abbassamento opportuno alla sua soluzione.

2.° I casi, ne' quali può essa opportunamente abbassarsi.

3.° Finalmente i metodi pratici, per cui possiamo ottenere attualmente un simile abbassamento, e per cui possiamo in seguito dalle radici della Equazione ridotta dedurre le radici della proposta.

Se giungere si potesse ad ottenere lo scioglimento di questo Problema in tutte le accennate tre parti; allora è chiaro, che sarebbesi pienamente soddisfatto a quanto riguarda la soluzione algebraica delle Equazioni, e potrebbesi dire perfezionato questo ramo troppo importante delle Matematiche. Nella presente Memoria, stabiliti a principio i fondamenti necessarii a sciogliere l'accennato Problema, vedremo in seguito fin dove ci sia permesso di spingere rapporto ad esso le nostre ricerche, e di arrivare con le nostre determinazioni.

PARTE PRIMA.

1. Rappresenti la

(A) $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{ec.} + Px^{m-b} + \text{ec.} + V = 0$

una qualunque Equazione algebraica determinata particolare, e i suoi coefficienti A, B, C, ec. siano tante quantità commensurabili. Ora o il primo suo membro ha dei fattori razionali, o no; se gli à, a tale Equazione attribuisco il nome di *Equazione composta*, altrimenti le do quello di *semplice*. La $x^3 - 38x - 12 = 0$ ci dà l'esempio di un'Equazione composta, poichè il suo primo membro è risolubile nei due fattori $x + 6$, $x^2 - 6x - 2$; l'altra $x^3 - 15x + 4 = 0$ ci dà l'esempio di un'Equazione semplice, non contenendo il suo primo membro fattore alcuno commensurabile.

2. Poichè coi noti principj dell'algebra una qualunque Equazione composta può sempre dividersi in tante semplici, quanti sono i fattori razionali del primo suo membro; noi fisseremo l'attenzione solamente sulle Equazioni semplici, e supponendo che la (A) sia tale, stabilito $m > 4$, supporremo, che questa Equazione sia capace di un abbassamento opportuno alla sua soluzione. Il rapporto particolare, che per la seconda di queste ipotesi esister deve fra alcune, o tutte le radici della (A) (Cap. 13.°, 15.° Teor. delle Equaz.) venga, come nel (n.° 321., Teor. delle Equaz.) espresso per

(B)

(B) $f\,(x')\,(x')\,(x''')\,\ldots\,(x^{(\lambda-1)})\,(x^{(\lambda)}) = \mathrm{K}$.

Giacchè poi cercando immediatamente, o mediatamente da questa quantità K il valore di x', sappiamo dal citato Cap. 15.°, che si deve necessariamente cadere in un'Equazione, di cui sono radici alcune, o tutte le x', x'', x''', ec. $x^{(\lambda)}$, sia

(C) $x^{\mu} + tx^{\mu-1} + zx^{\mu-2} + \text{ec.} + u = 0$,

una tale Equazione. Dovendo finalmente i coefficienti t, z, ec. u dipendere da Equazioni, delle quali conoscasi immediatamente, o mediatamente la soluzione, e nelle quali i coefficienti siano funzioni della K, supponghiamo, che il coefficiente u sia radice della

(D) $u^{n} + au^{n-1} + bu^{n-2} + \text{ec.} = 0$,

e che questa Equazione sia appunto dotata delle qualità ora accennate.

3. Il valore K dovrà essere quantità sempre determinabile dipendentemente da Equazione, che noi sappiamo risolvere. Imperciocchè essendo questa K per ciò, che si è detto nel citato Cap. 15.°, quella quantità appunto, per mezzo della quale restano immediatamente, o mediatamente determinate alcune, o tutte le radici della (A); se essa fosse indeterminabile, sarebbero indeterminabili ancora queste radici, il che è contro la supposizione.

4. Se esiste un' Equazione di relazione (B) opportuna alla soluzione della (A), nella quale la K sia quantità irrazionale, sempre esisterà ancora un' altra Equazione di relazione,

(I) $\mathrm{F}\,(x')\,(x'')\,(x''')\,\ldots\,(x^{(\lambda)}) = \mathrm{H}$,

in cui la quantità H sarà commensurabile, e pel cui mezzo la (A) potrà abbassarsi di grado opportunamente alla sua soluzione.

Suppongo $f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,\ldots\,(x^{(\lambda)}) = y$, sostituisco nella (B), e tolti dalla equazione $y = \mathrm{K}$ gli irrazionali, sia

(II) $y^{n} + \mathrm{E}y^{n-1} + \mathrm{G}y^{n-2} + \text{ec.} = \mathrm{H}$

l' Equazione, che da questa operazione risulta. Si collochi ora nella (II) in luogo della y il suo valore, e chiamisi (I) il risultato, che ne nasce. Ciò fatto, essendo pel (num. 3) attualmente determinabile il valor K, sarà attualmente solubile l'equazione (II), ed $y' = K$ ne sarà la radice; ora essendo la (I) identica con la (II), e la (B) identica con la $y' = K$, è chiaro che si dovrà poter ottenere il valor della (B) dalla (I); ma la (B) per la ipotesi è opportuna alla soluzione della (A); dunque la (I), essendo tale, che può sempre da essa ottenersi attualmente questa (B), dovrà dirsi ella pure opportuna alla soluzione medesima; ma nell' accennata (I) il secondo membro H è razionale. Dunque ec.

In conseguenza di quanto abbiamo ora dimostrato, riterremo in avvenire, quando non si avverta il contrario, che nella Equazione di rapporto (B) atta alla soluzione della (A) (n.° 2) la quantità cognita K sia sempre razionale.

5. Dovendo, come vedremo in seguito, il primo membro della (B) conservarsi $= K$ sotto certe permutazioni fra le radici, e dovendosi prender queste in considerazione, noi per maggiore chiarezza cominciaremo dal distinguere le permutazioni, le quali nella (B) si effettuano fra le sole λ radici x', x'', x''', ec. $x^{(\lambda)}$, che vi si contengono, dalle permutazioni, le quali nella (B) medesima effettuansi, introducendovi delle radici nuove, e denomineremo quelle *Permutazioni primitive*, queste *Permutazioni secondarie*; perciò le permutazioni della $f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)})$ nelle $f(x'')(x')(x''') \ldots (x^{(\lambda)})$, $f(x''')(x')(x^{(\lambda)}) \ldots (x')$ saranno del genere delle primitive, e le permutazioni della stessa $f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)})$ nelle $f(x'')(x''')(x') \ldots (x^{(\lambda+1)})$ $f(x^{(\lambda+1)})(x^{(\lambda+2)})(x^{(\lambda+3)}) \ldots (x^{(2\lambda)})$ saranno delle secondarie.

Diremo poi *risultati primitivi* quelli, che si ottengono dalle permutazioni primitive, *secondarii* quei, che nascono dalle permutazioni secondarie.

6. Con un numero qualunque π delle m radici x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$ vogliasi formare una nuova funzione $F(x')(x'')\ldots(x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)})$, la quale conservi uno stesso valore determinabile dalla K, che chiamerò H, e lo conservi costantemente, e solamente sotto quelle permutazioni, per cui nella (B) la $f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)})$ si conserva $= K$.

Potendo essere $\pi = \lambda$, $\pi < \lambda$, $\pi > \lambda$,

1.° Abbiasi $\pi = \lambda$; in simil caso, supposto, che tutti i risultati, i quali, provenendo dal primo membro della (B) per le nostre permutazioni sì primitive, che secondarie, conservano il valore K, siano di numeso n, prendansi le radidici x', x'', ec. $x^{(\pi)}$, e con esse si formi una funzione ad arbitrio, tale però che cambi di valore ad una qualunque permutazione fra loro; e chiamata questa

(III) $$\varphi(x')(x'')\ldots(x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)}) = y,$$

se ne cerchi dalla (B) il valore. Eseguite nella (III) tutte le permutazioni, che corrispondono ai precedenti n risultati, chiaminsi y', y'', y''', ec., le funzioni, che ne provengono, e saranno queste pure di numero n. Formiamo ora un'Equazione.

(II) $$y^n + Ey^{n-1} + Gy^{n-2} + \text{ec.} = H.$$

di cui siano radici le funzioni y', y'', ec. $y^{(n)}$; i coefficienti di questa sappiamo dal Cap. 15.° Teoria delle Equaz. essere funzioni razionali della K, e però da essa determinabili razionalmente. Supposta pertanto determinata una tale Equazione, colloco in essa in luogo della y il suo valore (III), chiamo

(E) $$F(x')(x'')\ldots(x^{(n-1)})(x^{(n)}) = H$$

il risultato, che ne viene; e questo io dico, che sarà una funzione tale appunto, che si conserverà $= H$ per tutte, e sole le permutazioni sì primitive, che secondarie, per cui la (B) conserva il valor K.

Facciamo di fatti nel primo membro della (E) una permumutazione qualunque, quella per esempio di F (x') (x'') . . . . . . $(x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)})$ in F $(x^{(\pi-1)})(x')$ . . . . . $(x^{(\pi)})(x'')$; facciasi la permutazione medesima nella (III), e si sostituisca la funzione φ $(x^{(\pi-1)})(x')$ . . . . $(x^{(\pi)})(x'')$, che si ottiene, nella (II) invece della y. Come dalla sostituzione nella (II) della (III) è nata la F (x') (x'') . . . . . $(x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)})$, è chiaro, che dalla sostituzione della φ $(x^{(\pi-1)})(x')$ . . . $(x^{(\pi)})(x'')$ dovrà nascere la F $(x^{(\pi-1)})(x')$ . . . . $(x^{(\pi)})(x'')$: dunque si otterrà lo stesso risultato, o eseguendo una data permutazione nel primo membro della (E), od eseguendo la permutazione medesima nella (III), e sostituendo la funzion che ne viene, nella (II). Ora o la nuova funzione φ $(x^{(\pi-1)})(x')$ . . . . . . $(x^{(\pi)})(x'')$, corrisponde ai risultati nati dalla (B) per le supposte permutazioni primitive, e secondarie, e però non è che il valore di una delle y', y'', ec. $y^{(n)}$, o non vi corrisponde; se sì, allora essendo essa una radice della (II), farà verificare questa Equazione, e però avremo F $(x^{(\pi-1)})(x')$ . . . $(x^{(\pi)})(x'') = \mathrm{H}$, se nò, non essendone radice, non potrà darci F $(x^{(\pi-1)})(x')$ . . . . $(x^{(\pi)})(x'') = \mathrm{H}$; ma questa funzione non è che il risultato, il quale ricavasi dalla F (x') (x'') . . . . . . $(x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)})$ per la permutazione ultimamente supposta. Dunque essendo essa $= \mathrm{H}$, ogniqualvolta corrisponda ai risultati, che nascono dalla (B) per le supposte permutazioni primitive, e secondarie, e non avendo tal valore, mentre non vi corrisponda, ne segue che in questo primo caso avremo ottenuto quanto è stato richiesto nell' enunciato del Problema.

2.° Che se si abbia $\pi < \lambda$, oppure $\pi > \lambda$: nel primo di questi due casi riduco la (III) alla forma φ (x') (x'') . . . . $(x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)}) + 0\,(x^{(\pi+1)} + \text{ec.} + x^{(\lambda)}) = \mathrm{H}$, nel secondo riduco la (B) alla forma $f\,(x')$ (x'') (x''') . . . .

$(x)^{(\lambda)} + o\,(x^{(\lambda+1)} + \text{ec.} + x^{(\pi)}) = K$, opero come precedentemente, ed otterrò nella maniera medesima la (E) la quale, come nel caso 1.°, vedremo essere dotata delle proprietà cercate nel nostro Problema. Se K è razionale, è chiaro che ancora H è razionale.

7. Supponghiamo $\pi < \lambda$. In tale ipotesi potremo esprimere la (B) per $f\,(x')\;(x'')\;(x''')\;\ldots\;(x^{(\pi)})(x^{(\pi+1)})\ldots(x^{(\lambda)}) = K$, e la (E) per $F\,(x')\,(x'')\ldots(x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)}) + o\,(x^{(\pi+1)} + \text{ec.} + a^{(\lambda)}) = H$. Ora o le permutazioni primitive, per cui la (B) conserva il valor K son tali, che nessuna delle radici le quali occupano i primi π luoghi, può in alcuno dei risultati secondarii passare per loro mezzo ad occupar veruno dei $\lambda - \pi$ luoghi ulteriori, e viceversa, cosicchè per es. i luoghi occupati nel primo risultato dalle x', x'', x''', ec. $x^{(\pi)}$ non possono per le supposte permutazioni primitive venir occupati dalle $x^{(\pi+1)}$ ec., e viceversa $x^{(\lambda)}$; oppure sono tali, che possono le $\lambda - \pi$ radici ulteriori passare nei luoghi delle prime π, come se si abbia per esempio.

$$f(x')\;(x'')\ldots(x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)})(x^{(\pi+1)})\ldots(x^{(\lambda)}) = f(x')\;(x'')\;\ldots\;(x^{(\pi+1)})(x^{(\lambda)})(x^{(\pi-1)})\;\ldots\;(x^{(\pi)}) = K.$$

In amendue questi casi si verificherà sempre, che per le permutazioni medesime fra le radici, per cui la (B) mantiene il valor K, ancora la (E) manterrà il valore H (Problema prec.); ma nel caso secondo succederà, che mentre alcuni risultati rapporto alla (B) procedevano da permutazioni primitive, i corrispondenti riguardo alla (E) dipenderanno da permutazioni secondarie, come apparisce nel supposto esempio, poichè

$$F\,(x')\,(x'')\;\ldots\;(x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)}) + o\,(x^{(\pi+1)} + \text{ec.} + x^{(\lambda)}),$$
$$F\,(x')\,(x'')\;\ldots\;(x^{(\pi+1)})(x^{(\lambda)}) + o\,(x^{(\pi-1)} + \text{ec.} + x^{(\pi)}),$$

ossia $F\,(x')\,(x'')\ldots(x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)})$, $F\,(x')\,(x'')\ldots(x^{(\pi+1)})(x^{(\lambda)})$ sono i risultati della (E) corrispondenti ai due supposti della la (B), e frattanto il secondo dei risultati della (B) procede dal primo per una permutazion primitiva, e il secondo dei risultati della (E), contenendo le radici $x^{(\pi+1)}$, $x^{(\lambda)}$ non esistenti nel primo, nasce da questo per una permutazione secondaria.

Nel primo poi dei casi ora supposti, per poco che si considerino le precedenti forme della (B), e della (E), è facile a vedersi, che le permutazioni le quali son primitive rapporto alla (E) son primitive ancora riguardo alla (B), e quelle che son secondarie relativamente alla prima di queste Equazioni, son secondarie eziandio rapporto alla seconda. Anzi a cagione della porzione o $(x^{(\pi+1)} + \text{ec.} + x^{(\lambda)})$, che sempre svanisce, i risultati in quest' ultimo caso, che si hanno dalla (E) per le supposte permutazioni primitive potranno essere in minor numero dei risultati provenienti per la stessa ragione dalla (B), ma non mai in numero maggiore; e lo stesso si dice dei risultati, che si ottengono per le permutazioni secondarie.

Che se si abbia $\pi = \lambda$; allora vedremo agevolmente, che quelle, le quali sono permutazioni primitive, o secondarie nella (B), sono corrispondentemente primitive, o secondarie nella (E); e il numero dei risultati, che nascono per le permutazioni primitive, sarà lo stesso riguardo ad amendue le (B), (E); e lo stesso sarà il numero dei risultati provenienti per le permutazioni secondarie.

Se finalmente $\pi > \lambda$, si applicherà alle nostre Equazioni di relazione ciò stesso che abbiamo asserito nel caso di $\pi < \lambda$, rovesciando però il discorso, e applicando alla (B) quello, che si è detto della (E), ed alla (E) ciò che abbiam detto della (B).

8. Finora abbiamo supposto, che la (III) sia una funzione tale, che cambi di valore a qualunque permutazione fra le x', x'', ec. $x^{(\pi)}$. Suppongasi presentemente, che essa si prenda in modo, che conservi lo stesso valore sotto alcune

per-

permutazioni. In questa ipotesi la (E) conserverà il valor H non solamente per tutte le permutazioni, per cui la (B) mantiene il valor K, ma potrà conservarlo ancora per quelle permutazioni, per cui non cambia di valore la (III); e per conseguenza in questo caso il numero dei risultati che provenienti dalla (E) sono $= H$, potrà essere maggiore del numero dei risultati, che nascono dalla (B), e sono $= K$.

9. Supponghiamo per esempio, che avendosi nella (A) $m = 8$, l' Equazione di relazione (B) divenga.

$$x^{\prime} x^{\prime\prime} + x^{\prime\prime\prime} x^{\prime v} = K$$

e che per le permutazioni secondarie abbiansi i soli due risultati

$$x^{\prime} x^{\prime\prime} + x^{\prime\prime\prime} x^{\prime v} = K, \quad x^{v} x^{v\prime} + x^{v\prime\prime} x^{v\prime\prime\prime} = K.$$

1.° Volendosi in questa ipotesi la soluzione del precedente problema, cominciam dal supporre $\pi = 2$, e potendo dare alla funzione (III) una forma qualunque, purchè sia tale che cambi di valore ad una permutazione qualsivoglia (n.° 6), supponghiamo $y = x^{\prime} - x^{\prime\prime}$. Eseguendo in questa le dovute permutazioni, poichè abbiamo $y = x^{\prime} - x^{\prime\prime} + 0\,(x^{\prime\prime\prime} + x^{\prime v})$, pel (2.° n.° 6) otterremo pei valori della y i risultati

$$y^{\prime} = x^{\prime} - x^{\prime\prime} + 0(x^{\prime\prime\prime} + x^{\prime v}) = x^{\prime} - x^{\prime\prime}, \; y^{\prime\prime} = x^{\prime\prime} - x^{\prime} + 0(x^{\prime\prime\prime} + x^{\prime v}) = x^{\prime\prime} - x^{\prime},$$

$$y^{\prime\prime\prime} = x^{\prime\prime\prime} - x^{\prime v} + 0(x^{\prime} + x^{\prime\prime}) = x^{\prime\prime\prime} - x^{\prime v}, \; y^{\prime v} = x^{\prime v} - x^{\prime\prime\prime} + 0(x^{\prime} + x^{\prime\prime}) = x^{\prime v} - x^{\prime\prime\prime},$$

$$y^{v} = x^{v} - x^{v\prime} + 0(x^{v\prime\prime} + x^{v\prime\prime\prime}) = x^{v} - x^{v\prime}, \; y^{v\prime} = x^{v\prime} - x^{v} + 0(x^{v\prime\prime} + x^{v\prime\prime\prime}) = x^{v\prime} - x^{v},$$

$$y^{v\prime\prime} = x^{v\prime\prime} - x^{v\prime\prime\prime} + 0(x^{v} + x^{v\prime}) = x^{v\prime\prime} - x^{v\prime\prime\prime}, \; y^{v\prime\prime\prime} = x^{v\prime\prime\prime} - x^{v\prime\prime} + 0(x^{v} + x^{v\prime}) = x^{v\prime\prime\prime} - x$$

Formo ora l' Equazione

$$y^{8} + E y^{7} + G y^{6} + \text{ec.} = H,$$

determino mediante il (Cap. 15. Teor: delle Equaz:) dalla $x^{\prime} x^{\prime\prime} + x^{\prime\prime\prime} x^{\prime v} = K$ il valore dei coefficienti E, G, ec., e nella Equazione in y così determinata colloco la quantità $x^{\prime} - x^{\prime\prime}$, mi risulterà in tal modo l' Equazion di rapporto $(x^{\prime} - x^{\prime\prime})^{8} + E\,(x^{\prime} - x^{\prime\prime})^{7} + G\,(x^{\prime} - x^{\prime\prime})^{6}$ ec. $= H$. Ora in questa per la natura della funzione supposta $x^{\prime} - x^{\prime\prime}$ i coefficienti delle potenze dispari 7, 5, ec. divengono evidentemente zero: dunque tale Equazione diverrà $(x^{\prime} - x^{\prime\prime})^{8} + G\,(x^{\prime} - x^{\prime\prime})^{6} +$ ec. $= H$, ossia corrispondentemenmente alla (E) $F(x' - x'')^2 = H$, e questa, rinovati i discorsi del (n.° precedente), vedremo restare la medesima, e cambiarsi a quelle permutazioni istesse, per cui rimane la medesima, e si cambia la $x' x'' + x''' x^{iv} = K$.

2.° Vogliasi $\pi = 3$, e nella (III) vogliasi $y = \frac{x' - x''}{x'''}$.

Essendo $y = \frac{x' - x''}{x'''} + 0\, x^{iv}$, col fare le necessarie permutazioni, corrispondentemente al primo risultato $x' x'' + x''' x^{iv} = K$ otterremo

$$y' = \frac{x' - x''}{x'''} + 0\, x^{iv} = \frac{x' - x''}{x'''},\; y'' = \frac{x'' - x'}{x'''} + 0\, x^{iv} = \frac{x'' - x'}{x'''};$$

$$y''' = \frac{x' - x''}{x^{iv}} + 0\, x''' = \frac{x' - x''}{x^{iv}},\; y^{iv} = \frac{x'' - x'}{x^{iv}} + 0\, x''' = \frac{x'' - x'}{x^{iv}},$$

$$y^{v} = \frac{x''' - x^{iv}}{x'} + 0\, x'' = \frac{x''' - x^{iv}}{x'},\; y^{vi} = \frac{x^{iv} - x'''}{x'} + 0\, x'' = \frac{x^{iv} - x'''}{x'}$$

$$y^{vii} = \frac{x''' - x^{iv}}{x''} + 0\, x' = \frac{x''' - x^{iv}}{x''},\; y^{viii} = \frac{x^{iv} - x'''}{x''} + 0\, x' = \frac{x^{iv} - x'''}{x'''}.$$

In egual modo si otterranno corrispondentemente al risultato secondo $x^{v} x^{vi} + x^{vii} x^{viii} = K$ altri otto valori della y, e con questi uniti a quelli faccio un' Equazione.

$$y^{16} + E y^{15} + G y^{14} + \text{ec.} = H$$

i coefficienti della quale determinerò come precedentemente dalla $x' x'' + x''' x^{iv} = K$. Ciò fatto pongo in luogo della y il valore $\frac{x' - x''}{x'''}$, e ricaveremo così un' Equazione

$$F\left(\frac{x' - x''}{x'''}\right) = H$$

corrispondente alla (E) e dotata delle condizioni richieste dal Problema del (n.° 6).

3.° Sia $\pi = 4$, ed $y = ax' + bx'' + cx''' + dx^{iv}$. Coll' eseguire le solite permutazioni, riguardo al primo risultato $x' x'' + x''' x^{iv} = K$, ci verrà

$y' =$

$y^{\prime} = ax^{\prime} + bx^{\prime\prime} + cx^{\prime\prime\prime} + dx^{\prime v}$, $y^{\prime\prime} = ax^{\prime\prime} + bx^{\prime} + cx^{\prime\prime\prime} + dy^{\prime v}$, $y^{\prime\prime\prime} = ax^{\prime} + bx^{\prime\prime} + cx^{\prime v} + dx^{\prime\prime\prime}$, $y^{\prime v} = ax^{\prime\prime} + bx^{\prime} + cx^{\prime v} + dx^{\prime\prime\prime}$, $y^{v} = ax^{\prime\prime\prime} + bx^{\prime v} + cx^{\prime} + dx^{\prime\prime}$, $y^{v\prime} = ax^{\prime v} + bx^{\prime\prime\prime} + cx^{\prime} + dx^{\prime\prime}$, $y^{v\prime\prime} = ax^{\prime\prime\prime} + bx^{\prime v} + cx^{\prime\prime} + dx^{\prime}$, $y^{v\prime\prime\prime} = ax^{\prime v} + bx^{\prime\prime\prime} + cx^{\prime\prime} + dx^{\prime}$. Altrettanti valori della y otterremo riguardo al risultato secondo $x^{v} x^{v\prime} + x^{v\prime\prime} x^{v\prime\prime\prime} = \mathrm{K}$: dunque, proseguito su questi il calcolo come precedentemente, ci risulterà in fine un' Equazione di relazione

$$\mathrm{F}\,(ax^{\prime} + bx^{\prime\prime} + cx^{\prime\prime\prime} + dx^{\prime v}) = \mathrm{H},$$

che soddisfa alle condizioni del Problema.

4.° Supponghiamo $\varpi = 5$, ed $y = \dfrac{ax^{\prime} + bx^{\prime\prime} + cx^{\prime\prime\prime} + dx^{\prime v}}{x^{v}}$. Ridotta in questo caso la $x^{\prime} x^{\prime\prime} + x^{\prime\prime\prime} x^{\prime v} = \mathrm{K}$ alla $x^{\prime} x^{\prime\prime} + x^{\prime\prime\prime} x^{\prime v} + 0\, x^{v} = \mathrm{K}$, eseguisco nella y le permutazioni tutte, per cui la quantità $x^{\prime} x^{\prime\prime} + x^{\prime\prime\prime} x^{\prime v} + 0\, x^{v}$ mantiene il proprio valore. Ciò facendo rapporto alle prime quattro radici $x^{\prime}, x^{\prime\prime}, x^{\prime\prime\prime}, x^{\prime v}$, otterremo evidentemente gli otto valori della y espressi nel caso 3.° divisi tutti per x^{v}; ora la x^{v} nella $x^{\prime} x^{\prime\prime} + x^{\prime\prime\prime} x^{\prime v} = \mathrm{K}$ può permutarsi in tutte le radici $x^{v\prime}, x^{v\prime\prime}, x^{v\prime\prime\prime}$, senza che si cambi il valor K; dunque effettuando questa permutazione della x^{v} nelle $x^{v\prime}$, $x^{v\prime\prime}$, $x^{v\prime\prime\prime}$ in ciascuno degli accennati otto valori della y, si otterranno $4 \cdot 8 = 32$ risultati, e questi saranno i valori tutti della y, che corrispondono al primo risultato $x^{\prime} x^{\prime\prime} + x^{\prime\prime\prime} x^{\prime v} = \mathrm{K}$: corrispondentemente al secondo $x^{v} x^{v\prime} + x^{v\prime\prime} x^{v\prime\prime\prime} = x^{v} x^{v\prime} + x^{v\prime\prime} x^{v\prime\prime\prime} + 0\, x^{\prime} = \mathrm{K}$ si otterranno altri 32 valori della y e da tutti questi 64 insieme uniti dopo il solito calcolo ricaveremo per l' Equazione di rapporto domandata la

$$\mathrm{F}\left(\frac{ax^{\prime} + bx^{\prime\prime} + cx^{\prime\prime\prime} + dx^{\prime v}}{x^{v}}\right) = \mathrm{H}.$$

5.° Se si vuole $\varpi = 8$, ed $y = ax^{\prime} + bx^{\prime\prime} + \text{ec.} + px^{v\prime\prime\prime}$, ridotta la $x^{\prime} x^{\prime\prime} + x^{\prime\prime\prime} x^{\prime v} = \mathrm{K}$ alla $x^{\prime} x^{\prime\prime} + x^{\prime\prime\prime} x^{\prime v} + 0\,(x^{v} x^{v\prime} + x^{v\prime\prime} x^{v\prime\prime\prime}) = \mathrm{K}$, eseguisco sulla y le permutazioni tutte per cui la $x^{\prime} x^{\prime\prime} + x^{\prime\prime\prime} x^{\prime v} + 0\,(x^{v} x^{v\prime} + x^{v\prime\prime} x^{v\prime\prime\prime})$

mantiene il valor K, proseguo il solito calcolo, e la funzione infine ottenuta

$$F\,(ax' + bx'' + \text{ec.} + px^{v'''}) = H$$

ci scioglierà il nostro Problema.

6.° Finalmente se in uno qualunque dei casi ora considerati, la funzione y si suppone, giusta il (n.° 8) tale, che cambi di valore per qualche sua permutazione particolare; se per esempio nel caso 2.° supponesi $y = \frac{x'\,x'''}{x''}$ = funzione, la quale non cambiasi alla mutazione di x' in x'''; allora la Equazione di relazione infin ricavata, nel nostro esempio, la $F\left(\frac{x'\,x'''}{x''}\right) = H$ manterrà il proprio valore non solo sotto le permutazioni, sotto cui non cambia il proprio la $x'\,x'' + x'''\,x^{\prime v}$, ma lo manterrà eziandio sotto delle altre.

Considerando questi casi, vedesi che a norma delle riflessioni fatte nel (n.° 7) nel caso 3.° i risultati secondarii provenienti dalla $F\,(ax' + bx'' + cx''' + dx^{\prime v}) = H$ tanti sono, quanti sono i secondarii, che nascono dalla $x'\,x'' + x'''\,x^{\prime v} = K$, che simili risultati nei casi 1;° 2;° 4;° 6;° sono in numero maggiore; essendo quattro nel caso 1.°, ed otto nei casi 2;° 4;° e 6;°, e che finalmente non ve n'à che un solo nel caso 5.°.

Nel caso 4.° la $F\left(\frac{ax' + bx'' + cx''' + dx^{\prime v}}{x^{v}}\right)$ conserva il valor H per quelle permutazioni medesime, per cui la $x'\,x'' + x'''\,x^{\prime v} = x'\,x'' + x'''\,x^{\prime v} + 0\,x^{v}$ mantiensi $= K$; ora in quest' ultima funzione le permutazioni delle $x', x'', x''', x^{\prime v}$ fra loro sono disgiunte dalle permutazioni della x^{v} nelle $x^{v'}, x^{v''}\ x^{v'''}$, ed inoltre questa x^{v} è moltiplicata per lo zero: dunque, in essa i risultati che nascono dal cambiamento dell' accennata x^{v} nelle $x^{v'}, x^{v''}, x^{v'''}$ possono considerarsi come non esistenti: lo stesso non può già dirsi dei risultati, che per le permutazioni medesime nascono dalla $F\left(\frac{ax'+bx''+cx'''+dx^{\prime v}}{x^{v}}\right)$; le permutazioni fra le $x', x'', x''', x^{\prime v}$ sono bensì quì pure separate dalle permutazioni della x^{v} nelle $x^{v\prime}, x^{v\prime\prime}, x^{v\prime\prime\prime}$, ma non essendo la x^{v} moltiplicata per lo zero, i risultati corrispondenti a queste ultime permutazioni non si potranno considerare come non esistenti, e per conseguenza potrem dire giusta il (n.° 7), che il numero dei risultati provenienti dalla $F\left(\frac{ax' + \text{ec.} + dx^{\prime v}}{x^{v}}\right) = H$ per le permutazioni sì primitive che secondarie è sempre maggiore del numero di quelli, che nascono dalla $x'x''+x'''x^{\prime v}=K$.

10. Sonovi dei casi, nei quali quantunque si verifichi l'Equazione (B), pure non può essa, come tale, servire all'opportuno abbassamento della (A); e questi casi devono succedere, ogniqualvolta cercando dalla (B) il valore della x trovasi la (C), oppure la (D) di grado necessariamente non $< m$, ovvero trovasi dipendente da altre Equazioni, il grado delle quali è necessariamente non $< m$. Tali casi pertanto si avranno

1.° Allorquando la (B) pel valore particolare delle radici, o per la forma della funzione diviene giusta il (n.° 3. Teor. delle Equa.) $f(x', x'', x''' \ldots . x^{(m)}) = K$.

2.° Mentre, posto $\lambda=2$, ovvero $=3$, ovvero $=$, ec., la (B) è tale, che risulta corrispondentemente $f(x')(x'') = f(x'')(x''') = f(x''')(x^{\prime v}) = \text{ec.} = f(x^{(m-1)})(x^{(m)}) = f(^{(m)})(x') = K$, oppure $f(x')(x'')(x''') = f(x'')(x''')(x^{\prime v}) = f(x''')(x^{\prime v})(x^{v}) = \text{ec.} = f(x^{(m-2)})(x^{(m-1)})(x^{(m)}) = f(x^{(m-1)})(x^{(m)})(x') = f(x^{(m)})(x')(x'') = K$, oppure $f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v}) = f(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v}) = f(x''')(x^{\prime v})(x^{v})(x^{v\prime}) = \text{ec.} = f(x^{(m-3)})(x^{(m-2)})(x^{(m-1)})(x^{(m)}) = f(x^{(m-2)})(x^{(m-1)})(x^{(m)})(x') = f(x^{(m-1)})(x^{(m)})(x')(x'') = f(x^{(m)})(x')(x'')(x''') = K$, ec.

3.°

3.° In generale mentre, avendo λ un valore qualunque, dal primo membro della (B) si ottiene con le permutazioni secondarie, quando $\lambda < m$, e con le primitive, quando $\lambda = m$, un numero per lo meno m di risultati, i quali tutti siano = K, e ne' quali entrino o contemporaneamente, o successivamente in egual modo tutte le m radici x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$.

Difatti nel 1.° di questi casi per l' uguaglianza di rapporto, che hanno fra loro tutte le x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$, non essendovi ragione, per cui una di loro possa venir determinata piuttosto che l' altra, ne viene, che come si è veduto nella Teoria delle Equazioni, o la (C) diverrà identica con la (A), e ciò mentre dalla $f(x', x'', x''', \text{ec.}\, x^{(m)}) = \mathrm{K}$ tutte si cercano in una volta le radici, che vi si contengono; o se alcune solamente si cercano di queste radici, allora non già la (C), ma bensì la (D) acquisterà un grado non $< m$, poichè cercandone per esempio un numero μ, pel (n.° 232. Teor. delle Equaz.) il suo esponente n sarà $= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\mu+1)}{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots 1}$.

Nel caso 2.° prese per maggiore semplicità a considerare le funzioni, che formano di sopra la terza fila, in cui $\lambda = 4$, o si vuole nella (C) $\mu = 4$, o $\mu < 4$, oppure $\mu > 4$. Sia $\mu = 4$, in questa supposizione nella maniera medesima, con cui la $u' = x'\,x''\,x'''\,x^{\prime v}$ dipende da $\mathrm{K} = f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})$, vedesi, che dipendono ancora dalla stessa K, a cui si uguagliano le funzioni tutte della terza fila, le $u'' = x''\,x'''\,x^{\prime v}\,x^{v}$, $u''' = x'''\,x^{\prime v}\,x^{v}\,x^{v\prime}$, ec. Dunque essendo di numero m le funzioni accennate, di grado m risulterà necessariamente l' Equazione (D). Che se abbiamo $\mu < 4$, supposto per esempio $\mu = 2$, onde abbiasi $u = x'\,x''$: chiamati u' i valori di u, che possono determinarsi dalla $f(x')(x'')(x''')(x^{\prime v})$, chiamati u'' quelli, che dipendono dalla $f(x'')(x''')(x^{\prime v})(x^{v})$, e così di seguito, se vogliamo che per esempio $x'\,x''$, $x'''\,x^{\prime v}$

siano i valori tutti di u', e però $x'' \; x'''$, $x^{iv} \; x^{v}$ i valori di u'', ec., vedesi che cercando dalla $f(x')(x'')(x''')(x^{iv}) = K$, la quantità u, caderemo in un' Equazione $u'^2 + pu' + q = 0$, in cui uno qualunque dei coefficienti, per esempio il coefficiente p essendo $= -(x' \, x'' + x''' \, x^{iv})$ per la ragione istessa, che abbiamo accennata nella ipotesi di $\mu = 4$, non potrà in conseguenza della (B) essere determinabile, che dipendentemente da un' Equazione di grado m.

Se finalmente si vuole $\mu > 4$; fatto a cagion di esempio $\mu = 5$, e però $u = x' \, x'' \, x''' \, x^{iv} \, x^{v}$, i valori di u determinabili dal primo risultato $f(x')(x'')(x''')(x^{iv})$ saranno i seguenti $x' \, x'' \, x''' \, x^{iv} \, x^{v}$, $x' \, x''' \, x'' \, x^{iv} \, x^{vi}$, $x' \, x'' \, x''' \, x^{iv} \, x^{vi}$, ec. $x' \, x'' \, x''' \, x^{iv} \, x^{(m)}$. Dunque cercando dalla $f(x')(x'')(x''')(x^{iv}) = K$ i valori della u, che vi corrispondono, essendo questi evidentemente di numero $m - 4$, caderemo in un' Equazione $u^{m-4} + p\,u^{m-3} + \text{ec.} = 0$, nella quale uno qualunque dei coefficienti per esempio p dipenderà come precedentemente da un' Equazione di grado m.

Finalmente nel caso generale per le qualità supposte nella $f(x')(x'')(x''') \, . \; . \; . \; . \; (x)^{(\lambda)}$ non essendovi ragione, per cui siano determinabili dipendentemente dal valore K comune a tutt' i risultati supposti, piuttosto i valori della u, che corrispondono al primo, che non gli altri valori, i quali sono corrispondenti agli altri risultati, ne segue, come di sopra, che, o la stessa Equazione (D), o la Equazione, da cui immediatamente, o mediatamente procede uno qualunque dei coefficienti della (D), sarà essenzialmente di un grado non $< m$.

11. Supponghiamo che cercando immediatamente dalla (B) il valore della x, ottengasi per essa delle Equazioni di grado non $< m$. In tale ipotesi si determini la (E) (numeri 6, 8), e si osservi, se questa (E) va ella pure soggetta, qualunque siasi il numero π, alla condizione medesima, che abbiam supposta nella (B), o nò. Se nò, si verificherà bensì,

sì, che la (B) non può, come tale, servire alla cercata riduzione della (A); ma però potremo da essa determinare una nuova Equazione di relazione, la quale potrà darci l' abbassamento richiesto. Che se poi sotto qualunque valore del numero π, la (E) non meno della (B) resta sempre compresa sotto gli accennati casi del (n.° precedente), allora diremo che la (B) nè nello stato in cui si ritrova, nè ridotta in qualsivoglia maniera potrà mai servire ad abbassare opportunamente l' Equazione proposta.

12. Acciocchè la (B) sia opportuna alla soluzione della (A), o dovrà dunque esser tale immediatamente, dandoci il valore della x per Equazioni di grado $< m$, o dovrà esserlo mediatamente, potendosi da essa determinare un' altra Equazione (E) capace di somministrarci il valore della medesima x nell' accennata maniera. Noi per la necessaria riduzione della (A) dovendo tener conto solamente dei rapporti, che ne sono o immediatamente, o mediatamente opportuni, tralasceremo gli altri.

13. Riflettendo sulla natura delle permutazioni primitive, veggo che per queste può la (B) conservare il valor K in conseguenza della forma della funzione, come nell' esempio del (n.° 9), in cui la $x' x'' + x''' x^{\prime v}$ mantiene il valor K pei cambiamenti di x' in x'', di x''' in $x^{\prime v}$, e per l' altro simultaneo di amendue le x', x'' nelle x''', $x^{\prime v}$; oppure essa (B) mantiensi $=$ K pel valore particolare delle radici, come nella ipotesi che, posto $x' + ax''^2 + bx''^3 = K$, vogliasi ancora $x' + ax'''^2 + bx''^3 = K$. Nel primo di questi due casi quelle permutazioni istesse, che lasciano $=$ K il primo risultato $f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)})$, pei (numeri 97, 98. Teor. delle Equaz.) lasceranno $=$ K ancora tutti i risultati secondarii, ma nel caso secondo può questo verificarsi e nò (numero 98. Teor. delle Equaz.): nell' esempio di $x' x'' + x''' x^{\prime v} = K$, ancora il risultato secondario $x^{v} x^{v'} + x^{v''} x^{v'''} = K$ dovrà necessariamente conservare il proprio valore per quelle permutazioni medesime, per cui lo

mantiene l' altro; nell' esempio secondo, supposto che $x' + ax''^2 + bx'''^2 = K$, $x^{\prime v} + ax^{v2} + bx^{v\prime 3} = K$ siano i due risultati secondarii, può succedere, che come si ha per la ipotesi $x' + ax'''^2 + bx''^3 = K$, abbiasi ancora $x^{\prime v} + ax^{v\prime 2} + bx^{v3} = K$, e può succedere, che quest' ultima uguaglianza non si verifichi, quantunque abbian luogo le altre di $x' + ax'''^2 + bx''^3 = 0$, $x^{\prime v} + ax^{v2} + bx^{v\prime 3} = K$. Che se le permutazioni primitive altre riguardano la forma della $f(x')(x'')(x''') \ldots \ldots (x^{(\lambda)})$, ed altre il valore particolare delle radici; allora diremo, che dipendentemente dalle prime di queste permutazioni i risultati secondarii tutti manterranno il valor K, e dipendentemente dalle seconde potranno mantenerlo, e nò.

Rapporto poi alle permutazioni secondarie vedremo facilmente potersi dire, che queste non riguardano mai la forma della funzione. Se la $x'\ x'' + x'''\ x^{\prime v}$ conserva il valor K, cambiandosi nella $x^{v}\ x^{v\prime} + x^{v\prime\prime}\ x^{v\prime\prime\prime}$, ciò non dipende, nè perchè il prodotto $x' \times x''$ riesce il medesimo, tanto dicendosi $x'\ x''$, che dicendosi $x''\ x'$, nè perchè la somma $x'\ x'' + x'''\ x^{\prime v}$ resta la medesima, mentre si scrive $x'''\ x^{\prime v} + x'\ x''$.

14. Tanto le permutazioni primitive, come le secondarie, per cui la (B) conserva il valore K, possono essere in un numero uguale, e maggiore di uno. La solita funzione $x' x'' + x''' x^{\prime v}$ del (n.° 9) mantiene il valor K per una permutazione composta, ossia per due semplici primitive, per quella cioè di x' in x'', e per l' altra di $x' x''$ in $x''' x^{\prime v}$, e mantiene il valore medesimo per una sola secondaria, cioè per quella di tutte le radici $x', x'', x''', x^{\prime v}$ nelle $x^{v}, x^{v\prime}, x^{v\prime\prime}, x^{v\prime\prime\prime}$. La funzione $F\left(\frac{x' - x''}{x'''}\right)$ del (caso 2.° n. 9) conserva il valor H per una sola permutazione primitiva, cioè per quella di x' in x'', e lo conserva per tre permutazioni secondarie, per quella cioè di x''' in $x^{\prime v}$, onde da y' nasce il risultato y''', per quella di x' in x''', di x'' in $x^{\prime v}$ e di x''' in x', onde da y' ottienesi y'', e per la terza delle x', x'', x''' corrispondentemente nelle

x^{v}, $x^{v'}$, $x^{v''}$, per cui y' ci produce il risultato $y^{\prime x}$. Quando poi una permutazion primitiva riguarda la forma della funzione, essa in allora ci darà necessariamente tanti risultati della (B) uguali a K, quante volte può replicarsi fra le radici, che entrano nella medesima, ma nelle permutazioni primitive riguardanti il valore particolare delle radici, e nelle permutazioni secondarie non può asserirsi lo stesso. Se nella precedente $x' + ax''^{2} + bx'''^{3} = K$ (n.° 13) si vuole, che le radici sian tali, che si abbia $x'' + ax'''^{2} + bx'^{3} = K$, replicando su questo secondo risultato la permutazione medesima semplice, come si vede, del 1.° genere (n.° 257. Teor. delle Equaz.), il risultato nuovo $x''' + ax'^{2} + bx''^{3}$, che ne viene, potrà essere, e non essere $= K$. Così, supposto $m = 6$, $\lambda = 3$, se si vuole, che in conseguenza delle permutazioni secondarie dalla $f(x')(x'')(x''') = K$ abbiasi $f(x')(x'')(x^{\prime v}) = K$, $f(x')(x'')(x^{v}) = K$, $f(x')(x'')(x^{v'}) = K$, potendo questi risultati esser nati dalla $f(x')(x'')(x''') = f(x')(x'')(x''') + 0\, x^{\prime v} x^{v} x^{v'}$ per una permutazione semplice fra le x''', $x^{\prime v}$, x^{v}, $x^{v'}$, cosicchè si abbia $f(x')(x'')(x^{\prime v}) + 0\, x^{v} x^{v'} x''' = f(x')(x'')(x^{\prime v})$, $f(x')(x'')(x^{v}) + 0\, x^{v'} x''' x^{\prime v} = f(x')(x'')(x^{v})$, $f(x')(x'')(x^{v'}) + 0\, x''' x^{\prime v} x^{v} = f(x')(x'')(x^{v'})$, può succedere che quest' ultimo risultato $f(x')(x'')(x^{v'})$, quantunque nato da una permutazione medesima, sia, e non sia esso pure $= K$.

15. Supponghiamo, che una data funzione $f(x')(x'')(x''') \ldots = t$ non si cambi di valore per una qualunque permutazione riguardante la forma della funzione, e che dipendentemente da questa vogliasi il valore di un' altra funzione qualsivoglia $\varphi(x')(x'')(x''') \ldots = y$. Effettuata in quest' ultima, e replicata quanto si può la permutazione, per cui abbiamo supposto che la prima delle funzioni date conservi il proprio valore, e chiamato n il numero dei risultati che ne vengono, pel (n.° 147. Teor. delle Equaz.) sappiamo, che la y dipenderà da un' Equazione $y^{n} + gy^{n-1} + \text{ec.} + h = 0$, in cui ciascuno dei coefficienti, per esempio il coefficiente h

avrà tanti valori diversi, quanti sono i diversi valori della t; e cadauno dei valori di h sarà determinabile razionalmente, e immediatamente dal valore corrispondente della t.

16. Supponghiamo ora, che sotto una data permutazione qualunque siasi semplice, o composta, la t conservi il proprio valore in conseguenza del valore particolare delle radici x', x'', x''', ec., e chiamati t', t'' t''' ec. $t^{(\alpha)}$ i risultati tutti, che quindi si hanno fra loro uguali, vogliasi riconoscere, come dipendentemente da essi possiamo ottenere i valori y', y'', y''', ec. $y^{(\alpha)}$ corrispondenti della y. A tal fine osservo, che pel (n.° 151. Teor. delle Equaz.) una sola Equazione $y^{\alpha} + gy^{\alpha-1} + \text{ec.} + h = 0$ tutti può riunire gli accennati valori della y, e non resta che da esaminarsi la determinazione dei coefficienti g. ec. h. Per maggiore semplicità suppongasi, che la precedente $x' + ax''^2 + bx'''^3$ sia la funzione data $= t$ che vogliasi $y = \dfrac{x' - x''}{x'''}$, e che la permutazione supposta sia semplice, e sia fra tutte e tre le radici x', x'', x'''. In simile ipotesi o tutti e tre i valori $x' + ax''^2 + bx'''^3 = t'$, $x'' + ax'''^2 + bx'^3 = t''$, $x''' + ax'^2 + bx''^3 = t'''$, provenienti dalla permutazione ripetuta quanto si può, sono uguali fra loro, o no; se lo sono, allora nella corrispondente Equazione $y^3 + gy^2 + \text{ec.} + h = 0$ ciascuno dei coefficienti g, ec. h essendo $= f(y', y'', y''')$ avrà un solo valore dipendente razionalmente dal valore $t' = t'' = t''$, e potrà da esso determinarsi, come è stato indicato nei (n. 147, 151 Teor. delle Equaz.). Che se non tutti e tre i valori t', t'', t''' sono fra loro uguali, se abbiamo soltanto $t' = t''$; in tal caso ai due risultati t', t'' corrisponderà bensì l'Equazione $y^2 + gy + h = 0$, in cui $y' = \dfrac{x' - x''}{x'''}$, $y'' = \dfrac{x'' - x'''}{x'}$, ma i coefficienti g, h non saranno determinabili dalla t', come si è accennato nel primo caso. Imperciocchè avendosi

$y' = \dfrac{x' - x''}{x'''}$, $y'' = \dfrac{x'' - x'''}{x'}$, $y''' = \dfrac{x''' - x'}{x''}$, e però

$$h' = y'\,y'' = \frac{x'x'' - x'x''' + x''x''' - x''^2}{x'\,x'''},\ h'' = y'y''' =$$

$$\frac{x'x''' - x''x''' + x'x'' - x'^2}{x''\,x'''},\ h'' = y''y''' = \frac{x'x''' - x'x'' + x'x''' - x'''^2}{x'\,x''},$$

il coefficiente h' non avrà già due valori uguali corrispondenti ai due $t' = t''$, ma avendo tutti e tre i valori h', h'', h''', tra lor differenti, la stessa difficoltà, che ho incontrata nel cercare il valore y' dipendentemente da t', l'incontrerò egualmente cercandone il valore h'. Ciò non ostante potremo anche in questo caso ottenere dipendentemente da t' il chiesto valore di h', ma converrà operar come segue: facciasi con le t', t'' una funzione della forma $f(t', t'')$ per esempio la somma $t' + t'' = x' + x'' + a(x''^2 + x'''^2) + b(x'''^3 + x'^3)$, chiamisi questa T, e dipendentemente da essa si cerchi il valore di h. Come alle quantità t', t'', t''' corrispondono le y', y'', y''', così alle $\mathrm{T}' = t' + t''$, $\mathrm{T}'' = t', + t'''$, $\mathrm{T}''' = t'' + t'''$ corrisponderanno le altre $h' = y'\,y''$, $h'' = y'\,y''$, $h''' = y''\,y'''$, e ciascuna di queste seconde potrà ricercarsi col solito metodo (n.° 144. Teor. delle Equaz.) dalla corrispondente delle prime. È vero che a cagione di $t' = t''$ risulta $\mathrm{T}'' = \mathrm{T}'''$, e però che la determinazione delle h'', h''' dalle T'', T'' incontrerà lo stesso inconveniente, che incontrava la determinazione della y', e della h', mentre queste quantità cercavansi dalla $t' = t''$; ma nel caso presente a noi non importa di determinare, che il valore $h' = y'\,y''$, e questo può sempre aversi da T', non avendo T' alcun valore uguale.

Consideriamo il caso in generale. Chiamato n il numero di tutti i risultati, che si hanno dalla t, ripetendo la supposta permutazione, quanto è mai possibile, o abbiamo il precedente numero $\alpha = n$, o abbiamo $\alpha < n$. Se $\alpha = n$, allora ciascun coefficiente g, ec. h, per esempio l' ultimo h, potrà aversi dalla t' come vien insegnato nei (numeri

147, 151. Teor. delle Equaz.), ma se $\alpha < n$, è necessaria una variazione. Supposto difatti attualmente $\alpha < n$, e supposto per maggior chiarezza, che la permutazione sia semplice del 1.° genere, e che si abbia $t' = f(x')(x'')(x''') \ldots \ldots (x^{(n-1)})(x^{(n)})$, $t'' = f(x'')(x''')(x^{iv}) \ldots \ldots (x^{(n)})(x')$, $t''' = f(x''')(x^{iv})(x^{v}) \ldots\ldots (x')(x'')$, ec., onde replicandosi essa quanto si può, t' ci somministri t'', t'' ci dia t''', t''' ci dia t^{iv}, ec. $t^{(\alpha-1)}$ produca $t^{(\alpha)}$, $t^{(\alpha)}$ si cambi in $t^{(\alpha+1)}$, e così di seguito fino a $t^{(n)}$; e in egual modo y' si cambi corrispondentemente in y'', y'' in y''', y''' in y^{iv}, ec., $y^{(\alpha-1)}$ in $y^{(\alpha)}$, $y^{(\alpha)}$ in $y^{(\alpha+1)}$, ec. fino ad $y^{(n)}$; eseguiscasi attualmente in t', ed in $h' = \pm y' y'' y''' \ldots y^{(\alpha-1)} y^{(\alpha)}$ la permutazione supposta, e fermiamoci a considerarne i primi risultati. A cagione di t'' per la ipotesi $= t'$ potrem dire, che t' conserva per questa prima operazione il proprio valore, ma non potremo già dire lo stesso di h': mutandosi perciò y' in y'', y'' in y''', y''' in y^{iv}, ec. $y^{(\alpha-1)}$ in $y^{(\alpha)}$, ed $y^{(\alpha)}$ in $y^{(\alpha+1)}$, il valore di h diverrà $y'' y''' y^{iv} \ldots\ldots y^{(\alpha)} y^{(\alpha+1)}$ valore, il quale è ben diverso dal primo $y' y'' y''' \ldots y^{(\alpha-1)} y^{(\alpha)} = h'$. Proseguendo tanto in t, che in h la nostra permutazione, mentre da t ottenghiamo $t''' = t'$, la h diventerà $y''' y^{iv} y^{v} \ldots\ldots y^{(\alpha+1)} y^{(\alpha+2)}$ valore, come vedesi, differente dall' altro $y' y'' y''' \ldots y^{(\alpha-1)} y^{(\alpha)} = h$; lo stesso si ritrova in seguito. Ora, acciocchè a norma dei (numeri 147, 151 Teor. delle Equaz.) potesse da t' ottenersi razionalmente il valore h', bisognerebbe che questa funzione h' non cambiasse di valore a quelle permutazioni medesime fra le x', x'', x''', ec., per cui non cambiasi la t, ma ciò non succede, dunque il metodo dei citati (numeri 147, 151, Teor. delle Equaz.) non potrà nella ipotesi di $\alpha < n$ servirci per determinare h' immediatamente da t'.

Facciamo con le t', t'', t''', ec. $t^{(\alpha)}$ una funzione della forma f (t', t'', t''', ec. $t^{(\alpha)}$), per esempio la somma $t' + t'' + t''' +$ ec. $+ t^{(\alpha)}$, chiamisi questa T', e cerchiamo da essa il valore h'. Poichè, essendo per la ipotesi le quantità $t^{(\alpha+1)}$, $t^{(\alpha+2)}$, ec. $t^{(n)}$ di valor differente dal valore delle $t' = t'' = t''' =$ ec. $= t^{(\alpha)}$, il risultato $T' = t' + t'' + t''' +$ ec. $+ t^{(\alpha)}$, mentre non abbiansi nuove supposizioni, è diverso dagli altri tutti $T'' = t' + t'' + t''' +$ ec. $+ t^{(\alpha+1)}$, $T''' = t' + t'' + t''' +$ ec. $+ t^{(\alpha+2)}$ ec., cosicchè dalla T non può con le permutazioni prodursi altro risultato a lui uguale; poichè le y'', y''', ec. $y^{(\alpha)}$, $y^{(\alpha+1)}$, ec. $y^{(n)}$ sono nate dalla y', come le t'', t''', ec. $t^{(\alpha)}$, $t^{(\alpha+1)}$, ec. $t^{(n)}$ dalla t'; e poichè finalmente $h' = \pm y' y'' y''' \ldots\ldots y^{(\alpha)}$ è una funzione delle y', y'', y''', ec. $y^{(\alpha)}$ affatto simile alla funzione T' delle t', t'', t''', ec. $t^{(\alpha)}$; è chiaro, che dipendentemente dalla T' la quantità h' avrà in conseguenza delle sole precedenti supposizioni un solo valore, e quindi che potrà determinarsi da essa T' col solito metodo. Dunque nell' ipotesi fatta, affine di avere il valore delle y', y'', y''', ec. $y^{(\alpha)}$ radici della Equazione $y^{\alpha} + g y^{\alpha-1} +$ ec. $+ h = 0$, dovremo cercare il valore dei coefficienti g, ec., h non già dal valore t', ma bensì dall' altro T' in generale $= f(t', t'', t''',$ ec. $t^{(\alpha)})$.

L' esposto metodo poi vedesi facilmente, che avrà sempre luogo, qualunque siasi la natura, e qualunque il numero delle permutazioni per cui produconsi le quantità tra loro uguali t', t'', t''', ec. $t^{(\alpha)}$. Imperciocchè se tali permutazioni si volessero di un numero > 1, o si volessero composte (n.° 256. Teor. delle Equaz.); allora ripetendosi contemporaneamente o esse per intiero, o qualcuna delle loro componenti (n.° 258. Teor. delle Equaz.) sopra dei risultati t', t'', t''', ec. $t^{(\alpha)}$, e sopra degli altri y', y'', y''', ec. $y^{(\alpha)}$, tanto i primi, quanto i secondi fra questi non farebbero che mutarsi corrispondentemente ſra loro, o cambiarsi nelle $t^{(\alpha+1)}$, $t^{(\alpha+2)}$, ec. $t^{(n)}$, $y^{(\alpha+1)}$, $y^{(\alpha+2)}$, ec. $y^{(n)}$; e per conseguenza le funzioni T', h', mentre non abbia luogo qualche nuova supposizione, sotto la medesima permutazione o si conserverebbero amendue dello stesso valore, o si cambierebbero contemporaneamente.

17. Nel (n.° prec.) ho detto, che i valori T'', T''', ec. della T sono tutti diversi dal valore T', mentre non esista qualche nuova supposizione diversa dalle precedenti. Ponghiamo ora che abbia luogo questa nuova supposizione, e che in conseguenza di certi particolari valori delle x', x'', x''', ec., o della forma della funzione alcuni dei risultati T'', T''', ec. siano = T'; questa circostanza sembra intorbidare il metodo precedente; ma vedremo non esser ciò vero, poichè se dessa accade nella funzione $T = t' + t'' + t''' + \text{ec.} + t^{(\alpha)}$, vedremo potersene sempre determinare un' altra $f(t', t'', t''', \ldots t^{(\alpha)})$, nella quale il risultato corrispondente a T' sarà disuguale da tutti i risultati corrispondenti a T'', T''', ec., e la quale per conseguenza potrà giusta il (n.° prec.) servire in vece della $t' + t'' + t''' + \text{ec.} + t^{(\alpha)}$ alla determinazion razionale dei coefficienti g, ec. h.

Supponghiamo pertanto, che eseguite nella $t = f(x')(x'')(x''')\ldots$ tutte le possibili permutazioni, di numero p siano i risultati t', t'', t''', ec. $t^{(p)}$, che ne vengono; supponghiamo, che, facendo le permutazioni tutte nella $T = t' + t'' + t''' + \text{ec.} + t^{(\alpha)}$, chiamisi q il numero dei risultati T', T'', T''', ec. $T^{(q)}$, che se ne ànno, onde sia $q = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-(\alpha-1))}{1.\ 2.\ 3.\ldots\alpha}$; e supposto finalmente per maggiore semplicità di scrivere $t' + t'' + t''' + \text{ec.} + t^{(\alpha)} = T1$, $t'^2 + t''^2 + t'''^2 + \text{ec.} + t^{(\alpha)2} = T2$, $t'^3 + t''^3 + t'''^3 + \text{ec.} + t^{(\alpha)3} = T3$, ec., $t'^{\varepsilon} + t''^{\varepsilon} + t'''^{\varepsilon} + \text{ec.} + t^{(\alpha)\varepsilon} = T(\varepsilon)$, sia

T'

$$\mathrm{T}'(\varepsilon) = t'^{\varepsilon} + t''^{\varepsilon} + t'''^{\varepsilon} + \text{ec.} + t^{(\alpha-3)\varepsilon} + t^{(\alpha-2)\varepsilon} + t^{(\alpha-1)\varepsilon} + t^{(\alpha)\varepsilon},$$

$$\mathrm{T}''(\varepsilon) = t'^{\varepsilon} + t''^{\varepsilon} + t'''^{\varepsilon} + \text{ec.} + t^{(\alpha-3)\varepsilon} + t^{(\alpha+1)\varepsilon} + t^{(\alpha+2)\varepsilon} + t^{(\alpha+3)\varepsilon},$$

$$\mathrm{T}'''(\varepsilon) = t'^{\varepsilon} + t''^{\varepsilon} + t'''^{\varepsilon} + \text{ec.} + t^{(\alpha-3)\varepsilon} + t^{(\alpha-2)\varepsilon} + t^{(\beta)\varepsilon} + t^{(\beta+1)\varepsilon},$$

$$\mathrm{T}^{\mathrm{iv}}(\varepsilon) = t'^{\varepsilon} + t''^{\varepsilon} + t'''^{\varepsilon} + \text{ec.} + t^{(\gamma)\varepsilon} + t^{(\gamma+1)\varepsilon} + t^{(\gamma+2)\varepsilon} + t^{(\gamma+3)\varepsilon},$$

ec.

$\mathrm{T}^{(q)}(\varepsilon) = t^{(q-\alpha+1)\varepsilon} + t^{(q-\alpha+2)\varepsilon} + t^{(q-\alpha+3)\varepsilon} + \text{ec.} + t^{(q-3)\varepsilon} + t^{(q-2)\varepsilon} + t^{(q-1)\varepsilon} + t^{(q)\varepsilon}$, rappresentandosi dalla ε i successivi numeri 1, 2, 3, 4, ec. Ciò fatto, suppongasi, che posto $\varepsilon = 1$, la T1 sia tale, che divengano fra loro uguali i due risultati T′1, T″1, avendosi perciò $t' + t'' + t''' + \text{ec.} + t^{(\alpha-3)} + t^{(\alpha-2)} + t^{(\alpha-1)} + t^{(\alpha)} = t' + t'' + t''' + \text{ec.} + t^{(\alpha-3)} + t^{(\alpha+1)} + t^{(\alpha+2)} + t^{(\alpha+3)}$, risulterà $t^{(\alpha-2)} + t^{(\alpha-1)} + t^{(\alpha)} = t^{(\alpha+1)} + t^{(\alpha+2)} + t^{(\alpha+3)}$, e quindi a cagione di $t^{(\alpha-2)} = t^{(\alpha-1)} = t^{(\alpha)}$, avremo $3t^{(\alpha)} = t^{(\alpha+1)} + t^{(\alpha+2)} + t^{(\alpha+3)}$, Equazione, nella quale ciascuna delle quantità $t^{(\alpha+1)}$, $t^{(\alpha+2)}$, $t^{(\alpha+3)}$ per la ipotesi è disuguale dalla $t^{(\alpha)}$. Ora o si vuole, che supposto successivamente $\varepsilon = 2, 3, 4$, ec., un' uguaglianza a questa simile abbia luogo ancora in altre delle T2, T3, T4, ec., o nò; se si vuole, io dico, che ciò non potrà succedere tutt' al più, che in quattro delle medesime; imperciocchè se si volesse, che accadesse in cinque, per esempio nelle prime cinque, venendone T′1 = T″1, T′2 = T″2, T′3 = T″3, T′4 = T″4, T′5 = T″5, otterrebbesi $3t^{(\alpha)} = t^{(\alpha+1)} + t^{(\alpha+2)} + t^{(\alpha+3)}$, $3t^{(\alpha)2} = t^{(\alpha+1)2} + t^{(\alpha+2)2} + t^{(\alpha+3)2}$, $3t^{(\alpha)3} = t^{(\alpha+1)3} + t^{(\alpha+2)3} + t^{(\alpha+3)3}$, $3t^{(\alpha)4} = t^{(\alpha+1)4} + t^{(\alpha+2)4} + t^{(\alpha+3)4}$, $3t^{(\alpha)5} = t^{(\alpha+1)5} + t^{(\alpha+2)5} + t^{(\alpha+3)5}$, e però con quattro incognite $t^{(\alpha)}$, ec. $t^{(\alpha+3)}$ si dovrebbe soddisfare a cinque Equazioni, niuna delle quali e a cagione della sua forma, e a cagione di non es-

essere $t^{(\alpha)}$ uguale ad alcuna delle $t^{(\alpha+1)}$, $t^{(\alpha+2)}$, ec. può risultare identica all' altra, il che è impossibile. Ciò dunque essendo, escludiamo dalle nostre considerazioni quelle funzioni, nelle quali à luogo l' esposta uguaglianza, e supposto tali essere le prime quattro T1, T2, T3, T4, nelle altre, che rimangono, T5, T6, ec. essa non potrà più verificarsi.

Supponghiamo, che nella T5 succeda un' altra uguaglianza diversa dalla precedente, e al risultato $T'5$ sia per esempio uguale l' altro $T'''5$, onde risulti $t'^5 + t''^5 + t'''^5 +$ ec. $+ t^{(-3)5} + t^{(\alpha-2)5} + t^{(\alpha-1)5} + t^{(\alpha)5} = t'^5 + t''^5 + t'''^5 +$ ec. $+ t^{(\alpha-3)5} + t^{(\alpha-2)5} + t^{(\beta)5} + t^{(\beta+1)5}$, ossia $2t^{(\alpha)5} = t^{(\beta)5}$ $t^{(\beta+1)5}$, in cui cadauna delle $t^{(\beta)}$, $t^{(\beta+1)}$ è disuguale dalla $t^{(\alpha)}$. In questo caso esistendo nella Equazion risultata le tre quantità $t^{(\alpha)}$, $t^{(\beta)}$, $t^{(\beta+1)}$, potranno bensì esistere tra le funzioni T5, T6, T7, ec. tre di loro, nelle quali succeda l'eguaglianza medesima, ma non ne potranno esistere di più, e la ragione ne è la stessa, che quella del caso precedente. Supposto pertanto, che tale uguaglianza si verifichi nelle funzioni T5, T6, T7, onde risulti $T'5 = T'''5$, $T'6 = T'''6$, $T'7 = T'''7$, in tutte le altre T8, T9, ec., che rimangono, non potrà aver più luogo nè la prima delle uguaglianze supposte, nè la seconda, cioè nè la $T' = T''$, nè la $T' = T'''$.

Vogliasi ora, che nella T8 i due risultati $T'8$, $T'^{v}8$ siano uguali fra loro: avendosi perciò $4t^{(\alpha)8} = t^{(\gamma)8} + t^{(\gamma+1)8}, + t^{(\gamma+2)8} + t^{(\gamma+3)8}$, viene ad ottenersi un' Equazione, nella quale esistono le cinque quantità $t^{(\alpha)}$, $t^{(\gamma)}$, ec. $t^{(\gamma+3)}$, e cadauna delle $t^{(\gamma)}$, ec. $t^{(\gamma+3)}$ è differente dalla $t^{(\alpha)}$: dunque tra le funzioni T8, T9, ec. ne potranno esistere cinque, le quali ammettano simile egnaglianza; ma per quanto abbiam detto poc' anzi non potendone esistere di più, supponghiamo, che tali siano le cinque funzioni T8, T9, ec. T12: nelle ulteriori T13, T14, T15, ec. non potrà succedere nè la prima, nè la seconda, nè la terza delle uguaglianze accennate.

Proseguendo nella stessa maniera, vedesi facilmente, che se succedono nella T13, e nelle funzioni, che seguono, delle uguaglianze nuove fra i risultati T^{v}, $T^{\text{v}\prime}$, ec. ed il primo T', potremo sempre determinare delle funzioni ulteriori, nelle quali non abbiano luogo nè questa, nè alcuna delle uguaglianze precedenti.

Ora per quante di simili uguaglianze si suppongano, il loro numero è sempre finito; imperciocchè queste non possono mai superare il numero delle combinazioni, che provengono, paragonando i risultati T'', T''', ec. $T^{(q)}$ col primo T', ed il numero di tali combinazioni è finito, perchè essendo finito il numero m delle x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$, e però il numero p delle t', t'', t''', ec. $t^{(p)}$, è finito ancora il numero q delle T', T'', T''', ec. $T^{(q)}$; ma le funzioni T1, T2, T3, T4, ec. si possono evidentemente estendere all' infinito. Dunque, proseguendo il precedente raziocinio quanto è necessario, potrò sempre giungere ad una funzione, che chiamerò $T(\varepsilon)$, nella quale tutte restino escluse le uguaglianze, che si posson supporre, e nella quale per conseguenza niuno dei risultati $T''(\varepsilon)$, $T'''(\varepsilon)$, ec. $T^{(q)}(\varepsilon)$ sia $= T'(\varepsilon)$. Dunque ec.

18. Formata la funzione $T(\varepsilon)$ giusta il (n.° prec.), e supposta tale, che nè in essa, nè in alcuna delle ulteriori $T(\varepsilon+1)$, $T(\varepsilon+2)$ ec. il risultato T' uguagli alcuno degli altri T'', T''', T^{v}, ec., il che, per quanto si è detto nel (n.° prec.), può sempre farsi; osserviamo poter succedere un nuovo accidente, il quale pei nostri raziocinii, e i nostri calcoli sarà ben di evitare: potrebbe accadere, che la $T(\varepsilon)$ conservasse il proprio valore per qualche nuova permutazione, sotto cui non lo conservava la t. Se per esempio, avendosi $\varepsilon = 1$, ed $\alpha = 2$, sia $t' = x'^2 + x''^2$, $t'' =$

$x'''^2 + x^{iv\,2}$, risultando $T'\,1 = t' + t'' = x'^2 + x''^2 + x'''^2 + x^{iv\,2}$, questa funzione conserverà il proprio valore pel cambiamento di x' in x''', ed in x^{iv}, e per quello di x'' in x''', ed in x^{iv}, permutazioni, sotto cui non lo conservavano le t', t''. In egual modo ritenuto $\alpha = 2$, se sia $\varepsilon = 3$, se ω rappresenta una delle radici cubiche immaginarie della unità, e se sia $t' = x' + \omega x'' + \omega^2 x'''$, $t'' = x^{iv} + \omega x^{v} + \omega^2 x^{vi}$; nella $T'3 = t'^3 + t''^3$ risultando $t'^3 = (x' + \omega x'' + \omega^2 x''')^3$, $t''^3 = (x^{iv} + \omega x^{v} + \omega^2 x^{vi})^3$, le t'^3, t''^3, e quindi la $T'3$ conserveranno il proprio valore per la permutazione semplice, la prima delle tre radici x', x'', x''', e la seconda delle altre x^{iv}, x^{v}, x^{vi} fra di loro, il che non succedeva nelle t', t''.

Per formare con le t', t'', t''', ec. $t^{(\alpha)}$ la $T'(\varepsilon) = t'^{\varepsilon} + t''^{\varepsilon} + t'''^{\varepsilon} +$ ec. $+ t^{(\alpha)\varepsilon}$, non dobbiamo che elevare alla potenza ε *sima* ciascuna delle t', t'', t''' ec. $t^{(\alpha}$, e in seguito farne la somma; in questa somma poi, mentre fannosi delle permutazioni fra le x', x'', x''', ec. non può la $T'(\varepsilon)$ conservare il proprio valore se non perchè sotto di esse

1.° O ciascuna delle quantità t'^{ε}, t''^{ε}, t'''^{ε}, ec. $t^{(\alpha)\varepsilon}$ rimane la medesima senza cangiarsi in altre, come si vede nel secondo esempio.

2.° O perchè le t'^{ε}, t''^{ε}, t'''^{ε}, ec. $t^{(\alpha)\varepsilon}$ si cambiano in altre uguali, o disuguali da esse, la cui somma risulta $= T'(\varepsilon)$, come apparisce nell' esempio primo.

Ora nella nostra $T'(\varepsilon)$, può bensì accadere l' accennato accidente per la prima delle esposte ragioni, come nell' esempio secondo; ma non potrà accadere per la seconda ragione, come nell' esempio primo. Imperciocchè, se accadesse per questa seconda ragione, sotto una data permutazione le t'^{ε}, t''^{ε}, t'''^{ε}, ec. $t^{(\alpha)\varepsilon}$ si dovrebbero o in tutto o in parte cambiare in altre da lor disuguali, e la somma di tutti i ri-

risultati, che ne verrebbero, dovrebbe essere $= \mathrm{T}'(\varepsilon)$; supposto per esempio che le $t'^{\varepsilon}, t''^{\varepsilon}, t'''^{\varepsilon}$, ec. si cambiassero rispettivamente nelle $t'''^{\varepsilon}, t^{\prime v \varepsilon}, t^{v \varepsilon}$, ec., e le $t^{(\alpha-2)\varepsilon}$, $t^{(\alpha-1)\varepsilon}$, $t^{(\alpha)\varepsilon}$ nelle $t^{(\alpha+1)\varepsilon}$, $t^{(\alpha+2)\varepsilon}$, $t^{(\alpha+3)\varepsilon}$, dovrebbe venirne $t'''^{\varepsilon} + t^{\prime v \varepsilon} + t^{v \varepsilon} +$ ec. $+ t^{(\alpha+1)\varepsilon} + t^{(\alpha+2)\varepsilon} + t^{(\alpha+3)\varepsilon} = \mathrm{T}'(\varepsilon)$, e per conseguenza uno dei risultati $\mathrm{T}''(\varepsilon)$, $\mathrm{T}'''(\varepsilon)$, $\mathrm{T}^{v}(3)$, ec. dovrebbe essere $= \mathrm{T}'(\varepsilon)$, il che è contro la supposizione.

19. Prendiamo dunque a considerare piuttosto l' altro caso, e cerchiamo di determinare, quando ha luogo il nostro accidente per la prima delle ragioni accennate. Supposto perciò $t'^{\varepsilon} = \mathrm{H}$, e chiamato $t^{(\alpha+1)}$, ciò che diventa t' per quella permutazione fra le x', x'', x''', ec., che fa cambiare essa t', e lascia la t'^{ε} del valore medesimo, dovrà essere questa quantità $t^{(\alpha+1)}$ disuguale da t', e dovrà essere $t^{(\alpha+1)\varepsilon} = \mathrm{H}$; dunque, risultando tanto t', quanto $t^{(\alpha+1)}$ radici della Equazione $t^{\varepsilon} = \mathrm{H}$, per la natura di questa dovrà essere $t^{(\alpha+1)} = \omega t'$, chiamata ω quella tra le radici ε*sime* dell' unità, che corrisponde ai valori t', $t^{(\alpha+1)}$; e per conseguenza, se accade l' indicato caso, la t' dovrà esser tale, che moltiplicata nello stato, in cui si trova, per una determinata radice ε*sima* dell' unità, somministrerà l' altro risultato $t^{(\alpha+1)}$. Nell' esempio precedente, moltiplicato il valore $t' = x' + \omega x'' + \omega^2 x'''$ per ω, e per ω^2, otterremo $t^{(\alpha+1)} = x''' + \omega x' + \omega^2 x'' = \omega t'$, $t^{(\alpha+2)} = x'' + \omega x''' + \omega^2 x = \omega^2 t'$.

Rappresenti la lettera ζ uno qualunque dei numeri primi, che a norma del (n.° prec.) oltrepassano il valore ε, e questi numeri primi supposto essere per esempio i seguenti 11, 13, 17, 19, 23, ec., rappresenti corrispondentemente ω' una delle radici undecime dell' unità, ω'' ne esprima una delle radici decime terze, ω''' una delle decime settime,

ω'^{v} una delle decime none, ec. Ciò posto, supponghiamo la t' tale, che cambiandosi di valore sotto certe permutazioni, e producendosi in corrispondenza i risultati $t^{(\alpha+1)}$, $t^{(\alpha+2)}$, $t^{(\alpha+3)}$, $t^{(\alpha+4)}$, ec. tutti da t' disuguali, le sue potenze t'^{11}, t'^{13}, t'^{17}, ec. sotto le permutazioni medesime conservino rispettivamente il loro valore per modo, che si abbia $t'^{11} = t^{(\alpha+1)11}$, $t'^{11} = t^{(\alpha+2)11}$, $t'^{13} = t^{(\alpha+3)13}$, $t'^{17} = t^{(\alpha+4)17}$, ec.; in questa ipotesi, estraendo le radici, dovrà risultare $t^{(\alpha+1)} = \omega' t'$, $t^{(\alpha+2)} = \omega'^{r} t'$, $t^{(\alpha+3)} = \omega'' t'$, $t^{(\alpha+4)} = \omega''' t'$, ec. Ora in queste Equazioni niuna delle ω', ω'^{r}, ω'', ω''', ec. può essere $= 1$, perchè se fosse per esempio $\omega'' = 1$, ne verrebbe $t^{(\alpha+3)} = t'$, il che è contro la supposizione: per conseguenza niuna delle $t^{(\alpha+1)}$, $t^{(\alpha+2)}$, ec. potrà essere uguale ad un'altra delle medesime, perchè se ciò fosse, se per esempio si avesse $t^{(\alpha+1)} = t^{[\alpha+2]}$, oppure $t[\alpha+1] = t^{(\alpha+2]}$, risulterebbe rispettivamente $\omega' t' = \omega'^{r} t'$, $\omega' t' = \omega''' t'$, e però $\omega' = \omega'^{r}$, $\omega' = \omega'''$, il che è impossibile, giacchè per la natura delle radici dell'unità è impossibile, che una di queste radici di un dato grado un'altra ne uguagli dello stesso, o di grado diverso, mentre esse non siano uguali all'unità, e mentre i loro gradi vengano espressi da' numeri primi, come di fatti si è supposto nel nostro caso. Ma se le quantità $t^{(\alpha+1)}$, $t^{(\alpha+2)}$, ec. sono tutte disuguali fra loro, il numero delle precedenti Equazioni $t'^{11} = t^{(\alpha+1)11}$, $t'^{11} = t^{(\alpha+2)11}$, $t'^{13} = t^{(\alpha+3)13}$, ec. deve essere finito, perchè è finito il numero p di tutti i risultati provenienti dalla t per le permutazioni fra le x', x'', x''', ec. Dunque potendosi la serie dei numeri primi 11, 13, 17, 19, 23, ec. estendere all'infinito, ne segue, che potrò sempre determinare una potenza ζ*esima* della t' la quale superi tutte quelle, in cui succedono l'esposte uguaglianze. Lo stesso si di-

dice della t'', della t''', ec. Dunque essendo sempre determinabile una funzione $T(\zeta) = t'^{\zeta} + t''^{\zeta} + t'''^{\zeta} + \text{ec.} + t^{(\alpha)\zeta}$ tale che ciascuna delle t'^{ζ}, t''^{ζ}, t'''^{ζ}, ec. non conservi il proprio valore se non che sotto quelle permutazioni medesime, sotto delle quali lo conservano le t', t'', t''', ec., se supporremo che essa $T(\zeta)$ sia attualmente determinata in tal modo; verrà così preso di mezzo affatto l' accidente accennato nel (n.° 18).

20. Dunque potendosi sempre determinare una funzione $T = f(t', t'', t''', \text{ec. } t^{(\alpha)})$ tale che abbia il risultato T' disuguale da tutti gli altri T'', T''', ec. (n.° 17), e tale che non mantenga il proprio valore per altre permutazioni diverse da quelle, sotto cui mantiene il proprio la t (n. 18, 19); noi supporremo, che la T, la quale deve servire e per isciogliere il Problema del (n.° 16), e per le considerazioni da farsi in seguito, sia realmente determinata con le condizioni ora indicate.

In conseguenza di quanto abbiamo detto nei (n. 16, e segg.) converrà correggere, o almeno esprimere meglio, quanto si espone nei (n. 151, 152. Teor. delle Equaz.)

21. Ritenute le supposizioni del (n.° 16), e formata giusta il (n.° prec.) la funzione $T' = f(t', t'', t''', \text{ec. } t^{(\alpha)})$; in questa io dico, che le permutazioni, per cui essa mantiene il proprio valore, possono considerarsi tutte come riguardanti la forma della funzione. Eseguiscasi nella T' una qualunque permutazione riguardante il valore particolare delle radici, e vengano in essa comprese per esempio le x', x'' x'''; per simile permutazione la t, supposto che contenga alcune, o tutte le x', x'', x''', non potrà già rimanere identicamente la stessa, poichè la permutazione non riguarda la sua forma, ma dovrà cambiarsi in una delle altre t'', t''', ec. $t^{(p)}$; e lo stesso si dice di tutte quelle tra le t'', t''', ec. $t^{(\alpha)}$, in

cui esistono le accennate x', x'', x'''. Ora per ſare tale permutazione nella $T' = f(t', t'', t''', \text{ec. } t^{(\alpha)})$ dovendosi essa eseguire contemporaneamente in tutte quelle tra le t', t'', t''', ec. $t^{(\alpha)}$, che contenendo le x', x'', x''', la possono ammettere; osservo, che per simile operazione queste t', t'', t''', ec. $t^{(\alpha)}$ o si cambiano promiscuamente fra loro, senza produrre nuovi risultati, come nel caso che la t' produca la t'', la t'' produca la t''', la t''', la $t^{'v}$, e la $t^{'v}$ somministri di nuovo la t' restando come si trovano le altre t^{v}, $t^{v'}$, ec. $t^{(\alpha)}$, perchè prive delle x', x'', x'''; oppure nel mentre che alcune delle t', t'', t''', ec. $t^{(\alpha)}$ si cambiano fra loro, da una, o da più delle altre che rimangono, produconsi dei risultati da' loro diversi, come nella ipotesi, che cambiatasi la t' nella t'', la t'' nella t''', la t''' produca il nuovo risultato $t^{(\alpha+1)}$, la t'' produca l' altro $t^{(\alpha+2)}$, e le altre t^{v}, $t^{v'}$, ec. $t^{(\alpha)}$ o si cambino fra di loro, o non contenendo le x', x'', x''', si mantengano nel loro stato. Nella seconda di queste due supposizioni la $f(t', t'', t''', \text{ec. } t^{(\alpha)})$ divenendo $f(t'', t''', t^{(\alpha+1)}, t^{(\alpha+2)}, t^{v}, \text{ec. } t^{(\alpha)})$ produrrà un altro valore della T; ma quest' altro valore pel (n.° prec.) non può essere $= T'$; Dunque in questa seconda supposizione la permutazione supposta non producendo un risultato uguale al primo, uscirà dalla nostra considerazione. Nella ipotesi prima poi la $f(t', t'', t''', \text{ec. } t^{(\alpha)})$ è tale, che rimane la medesima, ancorchè le quantità t', t'', t''', ec. $t^{(\alpha)}$, le quali per la supposta permutazione cambiansi reciprocamente fra loro, avessero un valore qualunque (2. n.° 3. Teor. delle Equaz.); ma questo è chiaro che non può succedere, se non nel caso, che la permutazione riguardi la forma della ſunzione, Dunque ec.

Sia per esempio $t = x' + ax''^{2} + bx'''^{3} + c(x^{\prime v\,2} + x^{v\,2}) + dx^{v\prime\,4} = \mathrm{K}$, e sia questa funzione tale che facendo la permutazione semplice fra le x', x'', x''', risulti

$$x' + ax''^{2} + bx'''^{3} + c(x^{\prime v\,2} + x^{v\,2}) + dx^{v\prime\,4} = \mathrm{K},$$
$$x'' + ax'''^{2} + bx'^{3} + c(x^{\prime v\,2} + x^{v\,2}) + dx^{v\prime\,4} = \mathrm{K},$$

e permutando fra loro le $x^{\prime v}$, $x^{v\prime}$, dal primo di questi due risultati, si abbia

$$x' + ax''^{2} + bx'''^{3} + c(x^{v\prime\,2} + x^{v\,2}) + dx^{\prime v\,4} = \mathrm{K},$$

dal secondo

$$x'' + ax'''^{2} + bx'^{3} + c(x^{v\prime\,2} + x^{v\,2}) + dx^{\prime v\,4} = \mathrm{K}.$$

In conseguenza di ciò, espressi con le t', t'', t''', $t^{\prime v}$ simili risultati, avremo

$$\mathrm{T}' = t' + t'' + t''' + t^{\prime v} = 2(x' + x'') + 2a(x''^{2} + x'''^{2}) + 2b(x'^{3} + x'''^{3}) + 4cx^{v\,2} + 2c(x^{\prime v\,2} + x^{v\prime\,2}) + 2d(x^{\prime v\,4} + x^{v\prime\,4}) = 4\mathrm{K},$$

e questa funzione vedesi, che mentre non mantiene il valore 4 K alla permutazione semplice delle x', x'', x''' fra di loro, lo conserva poi alla permutazione fra le $x^{\prime v}$, $x^{v\prime}$, e lo conserva dipendentemente dalla forma della funzione.

22. Pertanto la T′ determinata giusta i (n.^{i} prec.^{i}) goderà delle proprietà

1.° Di non conservare il proprio valore per alcun' altra permutazione tra le x', x'', x''', ec., che sia diversa dalle permutazioni, per cui mantiene il proprio la t'.

2.° Che le permutazioni, sotto delle quali la T′ non si cambia, ponno essere in numero minore di quelle, per cui non si cambia la t': così nell' esempio precedente la funzione supposta conserva il proprio valore K per tre permutazioni, la prima fra le x', x'', x''', la seconda fra le $x^{\prime v}$, x^{v}, la terza fra le $x^{\prime v}$, $x^{v\prime}$; la funzione T′ ottenuta non si conserva = 4 K che per la permutazione sola fra le $x^{\prime v}$, $x^{v\prime}$; permutazione, come vedesi per cui si mantiene dello stesso valore ancora la supposta funzione.

3.° Che le permutazioni tutte, per cui la T′ non cambia valore, possono considerarsi, e sono riguardanti la forma della funzione; il che non succede nella t.

4.° Che il numero dei risultati fra loro uguali nella T′ può essere minore, ma non sarà mai maggiore del numero dei risultati fra loro uguali della t. Nel precedente esempio i risultati fra loro uguali della T′ sono due, quei della t sono otto.

5.° Che per conseguenza volendosi il valore di una funzione $y=\varphi\ (x')\ (x'')\ (x''')\ \ldots$ dipendentemente dalla t, oppure dalla T′, riescirà molto più semplice il cercarlo da quest' ultima funzione, che non dalla prima; e se cercandosi questa y dalla T′ si trovasse indeterminabile, perchè la T′ ci conducesse ad un' Equazione di grado necessariamente non $< m$; molto più si troverà indeterminabile la y, mentre se ne cerchi il valore dalla t.

PARTE SECONDA

23. Torniamo alla (B); e ritenute le supposizioni, che la (A) sia Equazione semplice, e che la K sia quantità razionale (n. 2, 4), nei risultati, che nascendo dalla (B) per le permutazioni secondarie replicate quanto si può conservano il valor K, io dico

1.° Che tutte si dovranno contenere successivamente le radici x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$.

2.° Che tutte queste radici vi dovranno essere ripetute un egual numero di volte.

1.° Supponghiamo per maggiore chiarezza, che i supposti risultati secondarii della (B) siano i seguenti

(IV) $f\,(x')\ (x'')\ (x''')\ \ldots\ (x^{(\lambda)}) = f\,(x''')\ (x^{iv})\ (x^{v})\ \ldots\ (x^{(\lambda+2)}) = f\ (x^{(\lambda+3)})\ (x^{(\lambda+4)})\ (x^{(\lambda+5)})\ \ldots\ (x^{(2\lambda+2)}) =$ ec. $=$ K, e supponghiamo, se è possibile, che da essi restino escluse le radici $x^{(m)}$, $x^{(m-1)}$, ec. $x^{(m-\mu)}$. Ciò posto, faccio il prodotto

x',

x', x'', x''' . . . $x^{(\lambda)}$, lo chiamo u, e ne cerco dalla (B) il valore: restando questo sempre lo stesso a tutte le permutazioni fra le x', x'', x''', ec. $x^{(\lambda)}$, resterà il medesimo a tutte le permutazioni primitive della (B), e però la u avrà un solo valore corrispondente al primo dei risultati (IV.), uno corrispondente al secondo, uno al terzo, e così di seguito. Dunque se tali risultati son di numero n, la u dipenderà da un' Equazione

(V) $u^n + g u^{n-1} + \text{ec.} = 0$,

nella quale i coefficienti g, ec. essendo funzioni razionali della K (n. 13, 16) sono quantità commensurabili, e le radici non sono che i prodotti $u' = x'\, x''\, x''' \ldots x^{(\lambda)}$, $u'' = x'''\, x^{\text{IV}}\, x^{\text{V}} \ldots x^{(\lambda+2)}$, $u''' = (x^{(\lambda+3)})\,(x^{(\lambda+4)})\,(x^{(\lambda+5)}) \ldots (x^{(2\lambda+2)})$, ec. Pongasi ora l' Equazione $x^\lambda + t\,x^{\lambda-1} + z\,x^{\lambda-2} + \text{ec.} \pm u = 0$. Poichè i coefficienti t, z, ec. sono funzioni simili della u, chiaminsi t', z', ec. i valori di questi, che corrispondono ad u', chiaminsi t'', z'', ec. i corrispondenti ad u'', ec., si sostituiscano essi nel primo membro della Equazione supposta, si moltiplichino insieme gli n risultati

(VI) $x^\lambda + t' x^{\lambda-1} + z' x^{\lambda-2} + \text{ec.} \pm u'$, $x^\lambda + t'' x^{\lambda-1} + z'' x^{\lambda-2} + \text{ec.} \pm u''$, ec., che quindi provengono, se ne uguagli allo zero il prodotto, e supposto essere

(VII) $x^{\lambda n} + P x^{\lambda n-1} + Q x^{\lambda n-2} + \text{ec.} = 0$

l' Equazion, che ne nasce, i coefficienti P, Q, ec. di questa essendo funzioni razionali dei coefficienti della (V), saranno essi pur razionali.

Il primo dei risultati (VI) tutte contenendo evidentemente le radici, che esistono in u', sarà $= (x - x')(x - x'')(x - x''') \ldots (x - x^{(\lambda)})$, il secondo tutte contenendo le radici esistenti in u'', sarà $= (x - x''')(x - x^{\text{IV}})(x - x^{\text{V}}) \ldots (x - x^{(\lambda+2)})$; ec., ma le radici esistenti in tutti i valori u', u'', u''', ec. sono precisamente le radici esistenti nei risultati (IV); dunque, volendosi da questi (IV), e però dai valori u', u'', u''', ec. escluse le radici $x^{(m)}$, $x^{(m-1)}$, ec. $x^{(m-\mu)}$, simili radici rimarranno escluse eziandio dai risultati (VI), e per conseguenza l' Equazione (VII) conterrà tutte le radici della data (A) a riserva di queste ultime $\mu + 1$. Ora cerchiamo il massimo comun divisore tra i primi membri delle due Equazioni (A), (VII): dovendo tale comun divisore, per quanto abbiam ora detto, tutte e solamente contenere le radici x', x'', x''', ec. $x^{(m-\mu-1)}$, una, o più volte ripetute avrà un fattore, o sarà esso medesimo della forma $x^{m-\mu-1} + R\, x^{m-\mu-2} +$ ec.; ma essendo amendue le Equazioni (A), (VII) razionali, anche questo fattore è razionale. Dunque, se fosse possibile, che nei risultati (IV) non si contenessero tutte le x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$; la (A) avrebbe un fattore commensurabile, e per conseguenza non sarebbe più un' Equazione semplice, il che è contro la supposizione.

2.° Vogliasi, che nei risultati (IV) le x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$ si contengano un numero disuguale di volte, e suppongasi perciò, che le x', x'', x''', ec. $x^{(\mu)}$ vi restino comprese un numero di volte a, le altre $x^{(\mu+1)}$, $x^{(\mu+2)}$, ec. $x^{(m)}$ un numero diverso. Dovendo le radici esistenti nei risultati (IV) esistere tutte, per quanto abbiamo ora detto, e replicate lo stesso numero di volte nelle quantità u', u'', u''', ec., e quindi nei risultati (VI), e nella Equazione (VII), ne segue, che questa (VII) per le proprietà delle radici uguali dovrà avere un fattore $= (x-x')\,(x-x'')\,(x-x''')\ldots(x-x^{(\mu)})$ razionale, ma esso è fattore eziandio della (A). Dunque ancora nella presente ipotesi la (A) avrebbe un fattore commensurabile contro la supposizione. Dunque ec.

24. Quindi si deduce, 1.° che il numero λ delle radici esistenti in ciascuno dei risultati secondarii moltiplicati pel numero n dei risultati medesimi, cioè il prodotto λn è sempre

pre uguale, o multiplo dell' esponente m; onde rappresentando con a un numero intero positivo, in generale avremo $\lambda n = am$.

2.° Il precedente Teorema si verifica ancora sulla Equazione di relazione (E) dedotta dalla (B) giusta i (n.i 6, 8). Dunque, espresso con la lettera q il numero dei risultati secondarii, che provenienti dalla (E) sono $=$ H, e rappresentato con la b un numero intero e positivo, avremo quì pure $\pi q = bm$.

3.° Dalle due Equazioni $\lambda n = am$, $\pi q = bm$, otterremo $b\lambda n = a\pi q$.

4.° Come nei risultati (IV), così nei prodotti u', u'', u''', e nei risultati (VI), è nella Equazione (VII) tutte esisteranno le radici x', x'', x'', ec. $x^{(m)}$, e ripetute cadauna un egual numero di volte.

25. Tutte eseguendo nella (B) le permutazioni sì primitive, che secondarie, per cui essa conserva il valor K, io dico, che nei risultati quindi ottenuti entro ciascuno dei luoghi indicati dalle parentesi si conterranno successivamente tutte le radici x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$.

Se ciò si nega, supponghiamo, che in cadauno per esempio dei primi tre luoghi cioè dei luoghi, che nella (B) vengono occupati dalle x', x'', x''', non possa mai entrare la $x^{(\mu)}$. In tale ipotesi sia nella (E) determinata giusta il (n.° 6) $\pi = 3$, e divenga F $(x')(x'')(x''') =$ H. Pel (n.° 6) questa funzione mantiene il valore H solamente sotto quelle permutazioni, per cui la (B) mantiene il valor K; ma, in niuno dei risultati della (B) uguali a K si vuole, che la $x^{(\mu)}$ possa entrare nei primi tre luoghi; dunque la stessa $x^{(\mu)}$ non potrà entrare ad occupare alcuno dei luoghi medesimi neppure nei risultati, che provengono dalla F $(x')(x'')(x''')$, e sono uguali ad H, ma gli accennati tre luoghi altro non so-

sono, se non quei tutti, che costituiscono la $F(x')(x'')(x''')$. Dunque, in niuno di essi potendo mai entrare la $x^{(\mu)}$, ne segue, che questa radice resterà esclusa affatto da tutti gli esposti risultati della $F(x')(x'')(x''')$; ma ciò è contro il (2.° n.° prec.) Dunque ec.

26. Facciamo nella (B) $f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)}) = t$, onde sia $t = K$, chiaminsi, come nel (n.° 16); t', t'', t''', ec. $t^{(\alpha)}$ tutti i risultati, che provengono dalla t uguali a K in conseguenza delle permutazioni riguardanti il valore particolare delle radici, e si formi con queste una funzione
$T' = f(t', t'', t'''$, ec. $t^{(\alpha)})$ dotata delle condizioni indicate nel (n.° 20). Ciò fatto

1.° Avendosi $T' = t'^{\zeta} + t''^{\zeta} + t'''^{\zeta} +$ ec. $+ t^{(\alpha)\zeta}$ (n. 19), sarà $T' = \alpha K^{\zeta}$, ossia, fatto $\alpha K^{\zeta} = h$, avremo $T' = h$, essendo h quantità razionale.

2.° Questa funzione T' sarà dotata di tutte le proprietà indicate nel (n.° 22).

3.° Poichè le permutazioni secondarie non riguardano mai la forma della funzione (n.° 13), ne viene, che la T' pel (3.° n.° 22) non resterà $= h$ per alcuna di simili permutazioni, e quindi non avrà essa che un solo risultato secondario.

4.° Qualunque siasi il numero dei risultati secondarii di valore costante in una data Equazione di relazione; mentre abbian luogo le ipotesi del (n.° 23), dovendosi sul loro aggregato tutte, e sempre contenere le x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$, pel (prec. 3.°) dovrà essere $T' = f(x')(x'')(x''')$ ec. $(x^{(m)})$.

5.° Verificandosi ancora nella $T' = h$ la proprietà del (n.° prec.); ne segue, che sotto le varie permutazioni, per cui questa Equazion si conserva, in ciascuno dei luoghi accennati dalle parentesi potranno entrare successivamente tutte le x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$.

6.° Da quanto abbiam detto si deduce I. che la T' non può giammai esser tale che cambi di valore a qualunque permutazione; II. che nella permutazione intera per cui la T' si conserva $= h$ devono venir comprese tutte le x', x'', x''', ec. $x^{(n)}$; III. che questa permutazione non può mai essere solamente o semplice del 2.° genere, o composta del genere 1.° (n. 257, 259, Teor. delle Equaz.); poichè in tutti questi casi non tutti i luoghi della funzione accennati dalle parentesi potrebbero venire occupati da tutte le radici della (A).

Prendiamo ad esempio la funzione $x' x'' + x''' x^{iv}$ supposta nel (n.° 9), e facciamo $x' x'' + x''' x^{iv} = t'$, $x^{v} x^{vi} + x^{vii} x^{viii} = t''$: in questo caso vedesi che ζ deve essere > 1; poichè se facessimo $\zeta = 1$ ne verrebbe $T' = t' + t' = x' x'' + x''' x^{iv} + x^{v} x^{vi} + x^{vii} x^{viii} = 2\,K$, funzione, la quale manterrebbe il valore $2\,K$ per delle permutazioni diverse da quelle, per cui la $x' x'' + x''' x^{iv}$ si mantiene $= K$. Diasi adunque a ζ il valor 2, e risulterà $T' = t'^2 + t''^2 = (x' x'' + x''' x^{iv})^2 + (x^{v} x^{vi} + x^{vii} x^{viii})^2 = 2\,K^2$, funzione, come vedesi, la quale non mantiene il proprio valore $2\,K^2$ per delle nuove permutazioni. In questa poi tutte si conterranno le 8 radici x', x'', ec. x^{viii}, non avrà luogo alcun risultato secondario, eseguendo la permutazione per intero vedremo, che ciascun luogo per esempio il primo verrà successivamente occupato da tutte le radici x', x'', x''', ec. x^{viii}, e finalmente la permutazione intera riguarda tutte le 8 radici, e non è nè semplice del genere 2.°, nè composta del 1.°, ma composta del 2.°

27. Supponghiamo, che la T' conservi il proprio valore per una permutazione composta del 3.° genere (n.° 259. Teor. delle Equaz.) che due siano le permutazioni componenti

sem-

semplici amendue del genere 1.°, che fatto $m = \alpha + \beta + \gamma$, e (VIII) $T' = f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\alpha)})(x^{(\alpha+1)})(x^{(\alpha+2)}) \ldots (x^{(\alpha+\beta-1)})(x^{(\alpha+\beta)})(x^{(\alpha+\beta+1)}) \ldots (x^{(\alpha+\beta+\gamma-1)})(x^{(\alpha+\beta+\gamma)})$, la prima permutazion componente riguardi le prime $\alpha + \beta$ radici, la seconda le ultime $\beta + \gamma$, onde le β radici $x^{(\alpha+1)}$, $x^{(\alpha+2)}$, ec. $x^{(\alpha+\beta)}$ siano pel (n.° 259. Teor. delle Equaz.) comuni ad amendue le permutazioni, e che finalmente l' ultima di queste eseguiscasi pel (n.° 269. Teor. delle Equaz.), portando la radice $x^{(\alpha+1)}$ nell' ultimo luogo, e avanzando tutte le altre alla sinistra nello stato, in cui si trovano, cosicchè si abbia $T' = f(x')(x'')(x'') \ldots (x^{(\alpha)})(x^{(\alpha+2)}) \ldots (x^{(\alpha+\beta-1)})(x^{(\alpha+\beta)})(x^{(\alpha+\beta+1)}) \ldots (x^{(\alpha+\beta+\gamma)})(x^{\alpha+1)})$.

Ciò supposto, io dico, che col mezzo delle due permutazioni accennate potremo sempre far passare ed esistere contemporaneamente negli ultimi γ luoghi appartenenti alla seconda permutazione un numero γ delle radici x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$, qualunque esse siansi.

Chiaminsi $x^{(\delta+1)}$, $x^{(\delta+2)}$, $x^{(\delta+3)}$, ec. $x^{(\delta+\gamma)}$ le γ radici, che si vogliono portare negli ultimi γ luoghi. Prendasi la prima $x^{(\delta+1)}$, ed esista essa tra le $\alpha + \beta$ radici della permutazione prima: poichè per essere tale permutazione semplice del 1.° genere, possiamo, replicando la medesima successivamente, condurre la $x^{(\delta+1)}$ in quello qualunque dei primi $\alpha + \beta$ luoghi, che a noi più piace (n.° 262. Teor. delle Equa:); conduciamola nel luogo $\alpha + 1$*esimo*, ove cioè nel risultato (VIII) esiste la $x^{(\alpha+1)}$, e ciò fatto si eseguisca la permutazione seconda; per essa ne verrà un risultato, che dirò $T'1$ il quale sarà $= T'$, e conterà evidentemente la $x^{(\delta+1)}$ nell' ultimo luogo. Esista nel risultato $T'1$ la $x^{(\ +2)}$ tra le prime $\alpha + \beta$ radici; replico in esso, come di sopra, la prima permutazione, finchè questa $x^{(\delta+2)}$ giunga al luogo

$\alpha + 1$*esimo*, e allora replico la permutazione seconda; ne nascerà un risultato $T'2 = T'1 = T'$, il quale è chiaro, che conterrà la $x^{(\delta+2)}$ nel luogo ultimo, e la $x^{(\delta+1)}$ nell'antepenultimo. Farò l' operazione medesima riguardo alla $x^{(\delta+3)}$, se questa pure esiste in $T'2$ tra le prime $\alpha + \beta$ radici, e ci verrà egualmente un risultato $T'3$ avente nell' ultimo luogo la $x^{(\delta+3)}$, nel penultimo la $x^{(\delta+2)}$, e nell' antepenultimo la $x^{(\delta+1)}$. Seguitando ad operare nella stessa guisa, se nei primi $\alpha + \beta$ luoghi dei successivi risultati $T'3$, $T'4$, ec. $T'(\gamma - \varepsilon - 1)$ vanno esistendo le radici $x^{(\delta+4)}$, $x^{(\delta+5)}$, ec. $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon)}$ vedesi, che otterremo in fine un risultato $T'(\gamma - \varepsilon)$, il quale conterrà negli ultimi $\gamma - \varepsilon$ luoghi le radici $x^{(\delta+1)}$, $x^{(\delta+2)}$, ec. $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon)}$.

Supponghiamo ora, che in $T'(\gamma - \varepsilon)$ esista la $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+1)}$ tra le ultime γ radici della permutazione seconda; in questa ipotesi replico tale seconda permutazione, finchè la $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+1)}$ venga ad occupare il luogo indicato dal numero $\alpha + \beta$; allora mediante la permutazione prima porto la radice medesima fuori di questo in uno qualsivoglia dei luoghi 1.°, 2.°, ec. α*esimo*, e chiamo $T'(\gamma - \varepsilon + 1)$ il risultato, che ne deriva. Poichè nel portare la $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+1)}$ nel luogo $\alpha + \beta$*esimo*, la permutazione seconda à portate negli ultimi luoghi delle radici diverse dalle $x^{(\delta+1)}$, $x^{(\delta+2)}$, ec. $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon)}$, ripeto nella funzione $T'(\gamma - \varepsilon + 1)$ la permutazione medesima, finchè tutte queste radici escano dai luoghi ultimi, e vi tornino le $x^{(\delta+1)}$, $x^{(\delta+2)}$, ec. $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon)}$, il che, è manifesto, che potrà sempre farsi. Ciò ottenuto, e chiamato $T''(\gamma - \varepsilon + 1)$ il risultato, avremo in questo la $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+1)}$ tra le prime $\alpha + \beta$ radici; dunque potrò toglierla, e condurla nell' ultimo luogo, come ho fatto di sopra delle altre $x^{(\delta+1)}$, $x^{(\delta+2)}$, ec. $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon)}$; il risultato, che ne viene, chiamato $T'''(\gamma - \varepsilon + 1)$

o contiene la $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+2)}$ tra le radici della prima, o tra quelle della seconda permutazione; se esiste tra le ultime γ di quest' ultima, operando rapporto ad essa, come ho fatto riguardo alla $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+1)}$, la porto tra le prime α radici della permutazione prima, e trovato in seguito un risultato, nel quale siano tornate agli ultimi luoghi tutte le $x^{(\delta+1)}$, $x^{(\delta+2)}$, ec. $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+1)}$, operando su questo nella solita maniera, faccio passare la $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+2)}$ nel luogo ultimo della funzione. Ora lo stesso si può praticare riguardo a tutte le altre radici $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+3)}$, $x^{(\delta+\gamma-\varepsilon+4)}$, ec. $x^{(\delta+\gamma)}$; dunque avremo in fine un risultato $T(\gamma)$, il quale sarà $= T'$, e il quale negli ultimi γ luoghi tutte conterrà le radici $x^{(\delta+1)}$, $x^{(\delta+2)}$, ec. $x^{(\delta+\gamma)}$. Dunque ec.

Per maggiore facilità ho supposto, che la seconda permutazione si eseguisca portando la radice $x^{(\alpha+1)}$ nel luogo ultimo, e portando le altre tutte come si trovano verso la sinistra; il Teorema però ha luogo ancora che la permutazione seconda si eseguisca diversamente, e la dimostrazione ne è la medesima.

Sia per esempio $m = 9$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$,
$T' = f(x')\,(x''),\ (x''')\,(x'^{v})\,(x^{v}),\ (x^{v})\,(x^{v''})\,(x^{v'''})\,(x'^{x})$;
per la prima permutazion componente sia
$T' = f(x^{v})\,(x'),\ (x'')\,(x''')\,(x'^{v}),\ (x^{v})\,(x^{v''})\,(x^{v'''})\,(x'^{x})$
e per la seconda
$T' = f(x')\,(x''),\ (x'^{v})\,(x^{v})\,(x^{v'}),\ (x^{v''})\,(x^{v'''})\,(x'^{x})\,(x''')$,
e vogliansi negli ultimi quattro luoghi della seconda permutazione portare le quattro radici x', $x^{v'}$, $x^{v'''}$, x''. Esistendo la x' tra le radici della prima permutazione, ed avendosi nel nostro esempio $\alpha + 1 = 2 + 1 = 3$ porto nella terza classe, ossia luogo, questa radice, ed al risultato, che ne viene, $f(x'^{v})\,(x^{v}),\ (x')\,(x'')\,(x'''),\ (x^{v})\,(x^{v'})\,(x^{v'''})\,(x'^{x})$, applico la permutazione seconda, otterremo così
$T'\,1 = f(x'^{v})\,(x^{v}),\ (x'')\,(x''')\,(x^{v}),\ (x^{v'})\,(x^{v'''})\,(x'^{x})\,(x')$.

In T' 1 la $x^{v'}$ esiste tra le radici della permutazion prima, la porto adunque col mezzo di questa nel terzo luogo, faccio sul risultato $f(x'')(x'''),(x^{v})(x^{'v})(x^{v}),(x^{v''})(x^{v'''})(x^{'x})(x')$ la seconda permutazione, e ci verrà

T' 2 $= f(x'')\ (x''')\,,\ (x^{'v})\ (x^{v})\ (x^{v''})\,,\ (x^{v'''})\ (x^{'x})\ (x')\ (x^{v'})$.

La $x^{v'''}$ in T' 2 è posta tra le ultime quattro radici, ma non opportunamente; mediante adunque la permutazione seconda trasporto la $x^{v'''}$ nella quinta classe: nel risultato, che ne deriva,

$f(x'')\ (x''')\,,\ (x^{v})\ (x^{v''})\ (x^{v'''})\,,\ (x^{'x})\ (x')\ (x^{v'})\ (x^{'v})$

faccio passare tale radice in uno dei primi due luoghi, quindi nel risultato

T' 3 $= f(x^{v''})\ (x^{v'''})\,,\ (x'')\ (x''')\ (x^{v}),\ (x^{'x})\ (x')\ (x^{v'})\ (x^{'v})$

tolgo dall' ultimo luogo la $x^{'v}$, onde avere

T'' 3 $= f(x^{v'})\ (x^{v'''}),\ (x^{'v})\ (x'')\ (x'''),\ (x^{v})\ (x^{'x})\ (x')\ (x^{v'})$,

e condotta in T'' 3 la $x^{v'''}$ nella terza classe, rinovo la permutazione seconda: avremo in tal modo

T''' 3 $= f(x''')\ (x^{v''}),\ (x^{'v})\ (x'')\ (x^{v})\,,\ (x^{'x})\ (x')\ (x^{v'})\ (x^{v'''})$.

Finalmente la x'' essendo tra le cinque radici della prima permutazione, eseguisco sopra T'''3 le prime operazioni, e pel risultato richiesto otterremo

T' 4 $= f(x^{v''})\ (x^{'v}),\ (x^{v})\ (x'')\ (x^{'x}),\ (x')\ (x^{v'})\ (x^{v'''})\ (x'')$,

ove infatti si vede, che negli ultimi quattro luoghi sono state portate, ed esistono contemporaneamente le quattro radici x', $x^{v'}$, $x^{v'''}$, x'',

28. Sia $m = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$, e sia

$$\text{(IX)}\quad T' = f(x')\ (x'')\ (x''')\ \ldots\ (x^{(\alpha)}),\ (x^{(\alpha+1)})\ \ldots\ (x^{(\alpha+\beta)}),\ (x^{(\alpha+\beta+1)})\ \ldots\ (x^{(\alpha+\beta+\gamma)}),\ (x^{(\alpha+\beta+\gamma+1)})\ \ldots\ldots\ (x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}),\ (x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)})\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)})$$

Se la T' mantiene il proprio valore per una permutazione composta del 3.° genere, dove tre siano le componenti, semplici tutte e tre del 1.° genere, la prima tra le prime $\alpha+\beta$ radici, la seconda tra le $\beta+\gamma+\delta$ radici $x^{(\alpha+1)}$, $x^{(\alpha+2)}$, ec. $x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$, e la terza fra le $\delta+\varepsilon$ radici $x^{(\alpha+\beta+\gamma+1)}$,

$x^{(\alpha+\beta+\gamma+2)}$ ec. $x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)}$; applicando a questo caso il precedente discorso, vedremo, che col mezzo delle supposte permutazioni potrò ſar venire negli ultimi $\gamma+\delta$ luoghi della permutazione seconda un numero $\gamma+\delta$ delle m radici x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$, qualunque esse siansi, che potrò farne passare un numero $\gamma+\delta+\varepsilon$ negli ultimi $\gamma+\delta+\varepsilon$ luoghi delle due permutazioni seconda, e terza, ed un numero ε negli ultimi ε luoghi dell' ultima permutazione. Difatti che possiamo far venire negli ultimi $\gamma+\delta$ luoghi della permutazione seconda un numero $\gamma+\delta$ delle prime radici x', x'', ec. $x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$, questo il sappiamo dal Teorema precedente: che poi si possano far entrare nei $\gamma+\delta$ luoghi medesimi $\gamma+\delta$ delle radici ulteriori $x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)}$, $x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2)}$, ec. $x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)}$ ciò apparisce dal riflettere, che queste radici possonsi condurre mediante le ultime due permutazioni dalle classi dell' ultima nelle classi della penultima, e in seguito col mezzo delle permutazioni prima e seconda dalle classi di questa alle classi della prima. Anzi questa riflessione medesima quella si è, che unita al precedente Teorema ci fa conoscere la verità di quanto abbiamo ora asserito in tutta la sua estensione.

Lo stesso si dice se le permutazioni componenti siano quattro, cinque, ec.

29. Vogliasi dipendentemente dalla $T' = h$ il valore della radice x'.

1.° Potendo la T' conservare il valore h per delle permutazioni diverse, tutte però primitive appartenenti a tutte le m radici x', x'', x''', ec. $(x^{(m)})$, e riguardanti la forma della funzione (2.°, 3.°, 4.°, 5.° n.° 26); cominciamo dal supporre, che la permutazione, per cui si mantiene un tal valore h, sia semplice del 1.° genere, cosicchè si abbia pel (n.° 269. Teor. delle Equaz.)

$$T' = f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,\ldots\ldots\,(x^{(m-1)})\,(x^{(m)}) =$$

$f(x'')(x''')(x^{\prime v})\ldots(x^{(m)})(x') = f(x''')(x^{\prime v})(x^{v})\ldots(x')(x'') = \text{ec.} = h$.

Per la natura delle permutazioni semplici del 1.° genere il luogo nella T′ occupato dalla x' viene nei successivi risultati occupato da cadauna delle x'', x''', ec. $x^{(m)}$ una sola volta (n.° 262. Teor. delle Equaz., 5.° n.° 26). Ora abbiamo $x' = x' + 0\,(x''\,x'''\ldots x^{(m-1)}\,x^{(m)})$, e i valori di questa funzione corrispondenti ai risultati della T′ sono i seguenti $x' + 0\,(x''\,x'''\ldots x^{(m-1)}\,x^{(m)}) = x'$, $x'' + 0\,(x'''x^{\prime v}\ldots x^{(m)}\,x') = x''$, $x''' + 0\,(x^{\prime v}\,x^{v}\ldots x'\,x'') = x'''$, ec. Dunque non potendo questi tutti per la supposta uguaglianza fra i risultati della T′, che dipendere in egual modo dalla $T' = h$; ne segue, che essi medesimi, e però le m radici x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$ dovranno dipendentemente dall' accennata $T' = h$ restar collegate tutte insieme in una sola Equazione di grado m; e questa si vede, altro non essere che la data (A). Dunque questa prima supposizione non potrà da se sola servire alla richiesta determinazione della x'.

Pel (1.° n.° 10) lo stesso pienamente si dice, e si ottiene se abbiasi $T' = f(x', x'', x''', \ldots x^{(m)}) = h$.

2.° I. Poichè la permutazione, per cui la T′ conserva il valor h non può essere nè semplice del 2.° genere, nè composta del 1.° (6.° n.° 26); supponghiamola composta del genere 2.°, e fatto per maggiore chiarezza $m = 12$ sia per esempio $T' = [f(x')(x'')(x''')]^2 + [f(x^{\prime v})(x^{v})(x^{v\prime})]^2 + [f(x^{v\prime\prime})(x^{v\prime\prime\prime})(x^{\prime x})]^2 + [f(x^{x})(x^{x\prime})(x^{x\prime\prime})]^2 = h$, supponendo che ciascuna delle funzioni componenti conservi il proprio valore per una medesima permutazione semplice del 1.° genere fra le tre radici, che vi si contengono.

Fra le radici della $[f(x')(x'')(x''')]^2$ esiste la x', e questa funzione per la ipotesi mantiene il proprio valore per una permutazione semplice del genere 1.°: dunque cercando dalla $T' = h$ il valore di essa x', vedremo, come nel (1.° prec.), che si dovrà in conseguenza della funzione

[f

$[f(x')(x'')(x''')]^2$ necessariamente cadere in un' Equazione di grado 3.°, che supporrò essere la $x^3 + t x^0 + z x + u = 0$; Equazione nella quale l' ultimo coefficiente u essendo $= - x' x'' x''' = - (x' x'' x''' + 0 x^{\prime v} x^{v} x^{v'} + 0 x^{v''} x^{v'''} x^{\prime x} + 0 x^{x} x^{x'} x^{x''})$, non cambierà di valore per la permutazione che riguarda cadauna delle funzioni componenti considerata da se. Ora eseguendo nella T', e nella u la permutazione, per cui una delle funzioni componenti si cambia nell'altra, mentre che la T' conserva sempre il proprio valore, la u acquista i quattro valori fra loro diversi $u' = - x' x'' x'''$, $u'' = - x^{\prime v} x^{v} x^{v'}$, $u''' = - x^{v''} x^{v'''} x^{\prime x}$, $u^{\prime v} = - x^{x} x^{x'} x^{x''}$. Dunque la u dipenderà da un' Equazione $u^4 + a u^3 + b u^2 + c u + d = 0$, in cui ciascun coefficiente essendo $= f(u', u'', u''', u^{\prime v})$, avrà un solo valore dipendentemente dalla supposta $T' = h$, e però sarà da lei indeterminabile per un' Equazione di primo grado.

II. Vogliasi che la T' si mantenga $= h$ per una permutazione composta del 2.° genere, e in essa la prima permutazion componente sia semplice del genere 2.°, o composta del 1.°, come nella ipotesi, che essendo $m = 8$, la $T' = h$ divenga riguardo alla permutazion semplice del 2.° genere.

$$\left(\frac{x' x''^2}{x^{\prime v}} + \frac{x^{\prime v} x'''^2}{x'}\right)\left(\frac{x^{v} x^{v\,2}}{x^{v'''}} + \frac{x^{v'''} x^{v''2}}{x^{v}}\right) = h:$$

In questo caso conservando la $\frac{x' x''^2}{x^{\prime v}} + \frac{x^{\prime v} x'''^2}{x'}$ il proprio valore solamente per la permutazione simultanea della x' nella $x^{\prime v}$, e della x'' nella x''', ne segue, che il luogo occupato dalla x' non può venire occupato nè dalla x'', nè dalla x'''; ma ciò è contro del (6.° n.° 26); e quello, che abbiamo ora detto della permutazione semplice del 2.° genere, dicesi egualmente della composta del 1.° Dunque la supposizione fatta non potrà aver luogo nella nostra T'.

III. Sia la prima permutazion componente essa pure composta del genere 2.°, e sia per esempio

$\mathrm{T}' = (x'x'' + x'''x^{'v} + x^{v}x^{v'})^3 + (x^{v''}x^{v'''} + x^{'x}x^{x} + x^{x'}x^{x''})^3 = h$. Da quanto abbiamo detto vedesi facilmente, che la x' verrà a dipendere da un' Equazione $x^2 + px + q = 0$, in cui il coefficiente q potendo avere i valori $x'x''$, $x'''x^{'v}$, $x^{v}x^{v'}$, sarà radice di un' altra $q^3 + tq^2 + zq + u = 0$, il coefficiente u della quale dipenderà da una terza $u^2 + au + b = 0$ determinabile razionalmente dalla $\mathrm{T}' = h$, e avente per radici le $u' = x'x''x'''x^{'v}x^{v}x^{v'}$, $u'' = x^{v''}x^{v'''}x^{'x}x^{x}x^{x'}x^{x''}$.

IV. Supponghiamo in generale pel (3.° n.° 3. Teor. delle Equaz.)

(F) $\mathrm{T}' = f[f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\mu)})], [f(x^{(\mu+1)})(x^{(\mu+2)})(x^{(\mu+3)}) \ldots (x^{(2\mu)})],$ $[f(x^{(2\mu+1)})(x^{(2\mu+2)})(x^{(2\mu+3)} \ldots (x^{(3\mu)})], \ldots\ldots] = h$, e sia

$f\,(x')\,(x')\,(x'') \ldots (x^{(\mu)}) = f\,[\,(f\,(x')\,(x'') \ldots (x^{(\alpha)})\,],$ $[f(x^{(\alpha+1)})(x^{(\alpha+2)}) \ldots (x^{(2\alpha)})], [f(x^{(2\alpha+1)})(x^{(2\alpha+2)}) \ldots (x^{(3\alpha)})] \ldots],$

$f\,(x')\,(x'') \ldots (x^{(\alpha)}) = f\,[\,(f(x') \ldots (x^{(\beta)})\,],$ $[f\,(x^{(\beta+1)}) \ldots (x^{(2\beta)})], [f(x^{(2\beta+1)}) \ldots (x^{(3\beta)})\,] \ldots]$.

In conseguenza di quest' ultima riga, cercando dalla $\mathrm{T}' = h$ il valore x', formerò l' Equazione $x^{\beta} + g\,x^{\beta-1} +$ ec. $+ l = 0$. Essendo $l = \pm x' \ldots\ldots x^{(\beta)}$, questo coefficiente avrà tanti valori, quante sono le $f\,(x') \ldots (x^{(\beta)})$, $f(x^{(\beta+1)}) \ldots (x^{(2\beta)})$, ec.; supposto adunque essere queste funzioni di numero π, la quantità l avrà π valori, e sarà quindi radice di un' Equazione $l^{\pi} + p\,l^{\pi-1} +$ ec. $+ q = 0$: il coefficiente $q = \pm l'\,l'' \ldots\ldots l^{(\pi)}$ avrà evidentemente tanti valori, quante sono le $f(x')\,(x'') \ldots\ldots (x^{(\alpha)})$, ec. della seconda riga. Dunque se ν ci esprime il numero di somiglianti funzioni, la q dipenderà da un' Equazione $q^{\nu} + tq^{\nu-1} +$ ec. $+ u = 0$, il coefficiente u della quale sarà radice di un' altra avente un tanto grado, che chiamerò n, quante sono le funzioni componenti nella prima riga, cioè dell' Equazione $u^n + au^{n-1} + bu^{n-2} +$ ec. $= 0$; quest' ultima poi sarà determinabile razionalmente dalla $\mathrm{T}' = h$.

Ottenuta così l' Equazione in u razionale, la risolvo; dal valore u' determino i valori corrispondenti dei coefficienti t, ec., che appartengono all' Equazione penultima, cioè alla $q^\nu + tq^{\nu-1}$ + ec. + $u = 0$, sostituisco questi già determinati in essa Equazione, la sciolgo, e dal valore q' trovo il valore di tutti i coefficienti dell'Equazione antepenultima, cioè della Equazione in l, sostituisco questi pure, sciolgo tale Equazione, e dal valore l' determinati i coefficienti g', ec., la soluzione finalmente della $x^\beta + g'x^{\beta-1}$ + ec. + $l' = 0$ ci darà il domandato valore della x'.

Se il numero delle precedenti righe è diverso dal tre, con metodo uguale potremo sempre giungere ad avere il valore della x'.

V. Che se la $f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\mu)})$ conserva il proprio valore per una permutazione qualunque diversa dalla composta del 2.° genere, allora supporrò l' Equazione $x^u + tx^{\mu-1}$ + ec. + $u = 0$, ed il coefficiente u dipenderà da un' Equazione razionale $u^n + au^{n-1} + bu^{n-2}$ + ec. $= 0$. La stessa supposizione, e lo stesso metodo vedesi, che hanno luogo eziandio nel caso che la $f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\mu)})$ conservi il proprio valore per una permutazione composta del 2.° genere; ma il metodo precedente ci dà il valore della x' con Equazioni del minor grado possibile.

VI. Avvertasi che, mentre la T' conserva il proprio valore per una permutazione composta del genere 2.°, quelle radici, le quali entrano in una delle funzioni componenti, non possono entrare nelle altre. Se la x', la quale nella (F) entra nella prima funzion componente $f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\mu)})$, entrasse ancora nella seconda, cosicchè questa seconda fosse $f(x')(x^{(\mu+2)})(x^{(\mu+3)}) \ldots (x^{(2\mu)})$; allora contenendosi la x' in alcune, o in tutte le permutazioni, che riguardano la prima, e contenendosi in quelle, che riguardano la seconda di tali funzioni; ne verrebbe che una delle radici, le quali appartengono ad una permutazione componente, entrerebbe ancora tra le radici di altre, e quindi la T′ manterrebbe il proprio valore per una permutazione composta non più del 2.°, ma del 3.° genere (n.° 259. Teor. delle Equaz.) contro la supposizione. In conseguenza di ciò la (F) ci esprimerà in generale la forma della T′, allorchè questa funzione rimane $= h$ sotto una permutazione composta del genere 2.°

3.° I. La nostra permutazione, per cui la T′ conserva il valore h, sia composta del genere 3.°, siano in primo luogo due sole le permutazioni componenti, semplici entrambe del 1.° genere, e la prima di queste abbia luogo tra le prime $\alpha + \beta$ radici, la seconda tra le susseguenti $\beta + \gamma$ in modo che supposto $m = \alpha + \beta + \gamma$ nel risultato (VIII), la prima permutazione riguardi, come nel (n.° 27), le radici x', x'', x''', ec. $x^{(\alpha)}$, $x^{(\alpha+1)}$, $x^{(\alpha+2)}$, ec. $x^{(\alpha+\beta)}$, la seconda le $x^{(\alpha+1)}$, $x^{(\alpha+2)}$, ec. $x^{(\alpha+\beta)}$, $x^{(\alpha+\beta+1)}$, $x^{(\alpha+\beta+2)}$, ec. $x^{(\alpha+\beta+\gamma)}$. Nella ricerca della x' dalla $T' = h$ vedesi, che, come nel (1.°, e 2.° prec.), la prima delle accennate permutazioni ci condurrà ad un' Equazione

$$\text{(X)} \quad x^{\alpha+\beta} + n x^{\alpha+\beta-1} + \text{ec.} + q = 0,$$

di cui saranno radici le x', x'', x''', ec. $x^{(\alpha)}$, $x^{(\alpha+1)}$, ec. $x^{(\alpha+\beta)}$, e di cui bisogna determinare i coefficienti. Preso perciò l' ultimo $q = \pm x' x'' x''' \ldots x^{(\alpha+\beta)}$, io dico che cercandone il valore dipendentemente dalla supposta $T' = h$ caderemo necessariamente in un' Equazione di tanto grado, quante sono le combinazioni ad $\alpha + \beta$ ad $\alpha + \beta$ di tutte le m quantità x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$, cioè, supposto $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(\alpha+\beta-1))}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (\alpha+\beta)} = \rho$, in un' Equazione

$$\text{(XI)} \quad q^{\rho} + e q^{\rho-1} + \text{ec.} + g = 0,$$

le radici della quale saranno tutti i ρ prodotti $\pm x' x'' x''' \ldots x^{(\alpha+\beta)}$, $\pm x' x'' x''' \ldots x^{(\alpha+\beta+1)}$, $\pm x' x'' x''' \ldots x^{(\alpha+\beta+2)}$, ec. $\pm x^{(\iota+1)} x^{(\iota+2)} x^{(\iota+3)} \ldots x^{(\iota+\alpha+\beta)}$.

Prendiamo di fatti uno qualsivoglia di questi prodotti, per esempio l' ultimo, che può dirsi generale, e osserviamo quali in esso mancano delle m radici x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$; veggo, che vi mancano le x', x'', x''', ec. $x^{(\epsilon)}$, $x^{(\epsilon+\alpha+\beta+1)}$, $x^{(\epsilon+\alpha+\beta+2)}$, ec. $x^{(m)}$, e veggo che a cagione di essere $q = \pm x' x'' x''' \ldots x^{(\alpha+\beta)}$, e di essere $m = \alpha + \beta + \gamma$, le radici mancanti son di numero γ. Ciò dunque essendo, trovo giusta il (n.° 27) dalla T' un risultato T' (ω), il quale contenga le x', x'', ec. $x^{(\epsilon)}$, $x^{(\epsilon+\alpha+\beta+1)}$, $x^{(\epsilon+\alpha+\beta+2)}$, ec. $x^{(m)}$ negli ultimi γ luoghi; esso conterrà nei primi $\alpha + \beta$ le radici $x^{(\epsilon+1)}$, $x^{(\epsilon+2)}$, $x^{(\epsilon+3)}$, ec. $x^{(\epsilon+\alpha+\beta)}$, e pel citato (n.° 27) sarà identico con T'. Dunque il prodotto $\pm x^{(\epsilon+1)} x^{(\epsilon+2)} x^{(\epsilon+3)} \ldots x^{(\epsilon+\alpha+\beta)}$, quello essendo tra i valori della q che dipende da T' (ω), dipenderà ancora in egual modo da T', e quindi sarà una radice della $q^{\rho} + e q^{\rho-1} + \text{ec.} + g = 0$. Ora ciocchè si è detto di tal prodotto, dicesi egualmente di tutti gli altri, che si possono fare con tutte le x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$ prese ad $\alpha + \beta$ ad $\alpha + \beta$. Dunque ec.

Pertanto sapendosi, che l' esponente ρ della Equazione in q non può giammai essere $< m$, concluderemo, che la $T' = h$ nella supposizione ora fatta non potrà servirci mai da se sola alla determinazione della x', qualunque valore si attribuisca ai numeri α, β, γ,

II. Siano tre le componenti della nostra permutazione composta del genere 3.°, semplici tutte e tre del 1.° genere, ed espressa la T' siccome in (IX), la prima di queste appartenga alle prime $\alpha + \beta$ radici, la seconda alle $\beta + \gamma + \delta$ radici di mezzo, e la terza alle ultime $\delta + \epsilon$ nel modo istesso, che abbiam supposto nel (n.° 28). Pel (I. 3.°) la x' in conseguenza della prima permutazione componente dipenderà quì pure da un' Equazione (X), il coefficiente q della quale a cagione della permutazione seconda sarà radice di un' un' altra (XI), in cui l' esponente ρ uguagliando il numero delle combinazioni ad $\alpha + \beta$ ad $\alpha + \beta$ delle radici tutte appartenenti alle prime due permutazioni sarà

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta+\gamma+\delta-1)(\alpha+\beta+\gamma+\delta-2)\ldots(\gamma+\delta+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots(\alpha+\beta)},$$

e l' ultimo coefficiente g essendo $= \pm\, q'\ q''\ q''' \ldots q^{(\rho)}$ sarà

$$= \pm\,(x'\ x''\ x'''\ \ldots\ldots\ x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta 1)^{\sigma}}),$$ supposto

$$\sigma = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta-1)(\alpha+\beta+\gamma+\delta-2)\ldots\ldots(\gamma+\delta+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots(\alpha+\beta-1)}.$$

Ora cercando dalla $T' = h$ il valore del coefficiente g, con raziocinio uguale a quello che abbiam fatto nel (prec. I) per la determinazione del coefficiente q, si trova che in conseguenza della permutazione terza deve esso g dipendere da un' Equazione

$$(\text{XII})\quad g^{\tau} + b\,g^{\tau-1} + \text{ec.} + d = 0$$

avente l'esponente $\tau = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(\alpha+\beta+\gamma+\delta-1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$;

Dunque non potendo mai risultare $\tau < m$, neppure la supposizione presente potrà da se sola essere atta alla determinazione della x'.

La stessa conseguenza con raziocinii uguali ricavasi, se le permutazioni componenti del 1.° genere siano quattro, cinque, ec.

III. Qualunque siansi le componenti della permutazione ora supposta, poichè esse sono sempre o semplici del 1.° genere per se medesime, o formate da tante semplici del genere istesso (n. 258, 259. Teor. delle Equaz.), potremo sempre supporre, che le componenti di tale permutazione siano infine semplici tutte del genere 1.° Ora il genere della permutazione supposta essendo il 3.°, le radici di una delle componenti debbono potersi frammischiare con quelle di un' altra, e pel (5.° n.° 26) in ciascuna delle classi della funzione T' debbono poter entrare successivamente tutte le radici x', x'', x'''. ec. $x^{(m)}$, senza che si cambi il suo valore h. Dunque, supposto $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon +$ ec. $= m$, potremo sempre considerare, che l' espressione (IX) ci rappresenti la nostra T', e che tanto la prima delle permutazioni spettante alle radici x', x'', x''', ec. $x^{(\alpha+\beta)}$, quanto la seconda appartenente alle $x^{(+1)}$, $x^{(\alpha+2)}$, ec. $x^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$, e così le altre successive siano tutte semplici del 1.° genere; ma in conseguenza di simile considerazione questo caso riducesi al (prec. II). Dunque concluderemo, che, se la T' conserva il proprio valore per una permutazione composta del genere 3.°, qualunque siansi le sue componenti, non potremo giammai dipendentemente dalla sola T' $= h$ determinare il valore domandato della x'.

Dunque il nostro Problema non ammette soluzione, se non nel caso 2.°; non potremo cioè ritrovare il valore della radice x' in conseguenza della sola T' $= h$, se non quando la T' conserva il proprio valore per una permutazione composta del 2.° genere.

30. Giacchè non possiamo ottenere nei casi (1.°, e 3.° n.° prec.) il valore della x' dalla T' $= h$, cercandolo immediatamente, veggiamo, se si possa ottenere mediante una nuova funzione tra le x', x'', x''', ec. che supporrò essere $\varphi(x')(x'')(x''')$ . . . . . Chiamata y questa nuova funzione, converrà dunque cercare in primo luogo il valore della y dalla T' $= h$, e in seguito da questa dedurre il valore della x'. Ora o si vuole altro non essere tale funzione, se non se il primo membro della (B), oppure della (E), o si vuole da esse diversa. Nel primo di questi due casi, tanto se esprimesi il primo membro della (B), quanto quello della (E), la determinazione della y dalla T' $= h$ dipenderà dalla soluzione di un' Equazione di 1.° grado; ma pei (n.° 12, 5.° n.° 22) nè la (B) nè la (E) così determinate possono essere più opportune della T' $= h$ alla determinazione della x'.

x'. Dunque questa prima supposizione non ci recherà alcun vantaggio per isciogliere il Problema del (n.° prec.)

Sia la y funzione diversa dai primi membri delle (B), (E). In tale ipotesi può questa mantenere il proprio valore per una, o più di quelle permutazioni componenti (I. II. III. caso 3.°), sotto cui mantiene il proprio la T', e può cangiarlo ad una qualsivoglia di simili permutazioni. Ora supposto che a norma del (II., e III. caso 3.°) la (IX) ci esprima la T', se la y conserva il suo valore solamente per la prima permutazion componente tra le prime $\alpha + \beta$ radici, la sua determinazione dalla $T' = h$ è chiaro, non poter risultare più semplice della determinazione dalla stessa $T' = h$ del precedente coefficiente q (caso 3.°) : se essa y non mutasi di valore per amendue le permutazioni componenti, che nella T' riguardano le prime $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ radici; allora tale funzione non potrà venire determinata per Equazioni di grado inferiore a quello, per cui si determina il precedente coefficiente g (II. caso 3.°), e così in progresso. Dunque risultando di un grado sempre troppo alto le Equazioni ultime, per cui nel (caso 3.°) si determinano le quantità q, g, ec., vedesi, che ancora la supposta y verrà a dipendere da Equazioni di troppo alto grado, e quindi che sarà dipendentemente dalla $T' = h$ indeterminabile.

Che se la y vogliasi tale, che conservi il proprio valore per tutte le permutazioni, per cui la T' si mantiene $= h$; allora la y sarà determinabile dalla $T' = h$ col mezzo di un' Equazione di 1.° grado: ma altro questo non essendo, che uno dei casi rappresentati dalla (E), o dalla (B), ne segue, che quanto abbiam detto poc' anzi della ricerca della x' dipendentemente dalle (E), (B), dicesi egualmente della ricerca medesima dalla y ora supposta.

Se la y è indeterminabile, allorchè conserva il proprio valore per una, o alcune delle permutazioni considerate di sopra, molto più lo sarà, se per simili permutazioni cangiasi sempre di valore; quest' ultima condizione aumentando il nu-

numero dei risultati della y fra loro diversi, che corrispondono ai varii risultati della T' fra loro uguali, non potrà che renderne meno facile la determinazione.

Potrebbe la y rappresentare quella funzione, che abbiam considerata nel (n.° 4) $=$ K irrazionale, e da cui abbiam dedotta l' Equazione (I) avente il secondo membro H razionale. Se si cercasse questa y dalla (I), pel cit.° (n.° 4) s' incorrerebbe a dovere sciogliere l' Equazione (II); ma essa (I) altro non è che la (B), in cui K è quantità razionale (n.° 4); e d' altronde cercando dalla $T' = h$ una data funzione qualunque, pel (5.° n.° 22) non si deve mai cadere a sciogliere Equazione di grado maggiore di quello, che ci risulterebbe, cercando la funzione medesima dalla (B), ossia dalla (I). Dunque allorchè cerchiamo la nostra y dalla $T' = h$, non ci potrà per essa risultare Equazione di grado più alto del grado della (II); ma per quanto abbiam detto poc' anzi, allorchè la T' si mantiene $= h$ per una permutazione composta del 3.° genere, la determinazione dalla $T' = h$ di una qualsivoglia funzione y viene sempre a dipendere dalla soluzione di un' Equazione di grado non $< m$: dunque nella supposizione fatta l' esponente della (II) sarà essenzialmente non $< m$, e quindi essendo indeterminabile la $y' = f(x')(x'')(x''') \ldots (x^{(\lambda)}) = K$, in cui K è quantità irrazionale (n.° 4), pel (n.° 3) sarà ancora dipendentemente dalla y ora supposta inabbassabile la (A).

Quanto abbiamo detto presentemente, supponendo la T' conservarsi $= h$ per una permutazione composta del 3.° genere, dicesi in egual modo, allorchè la T' si mantiene $= h$ per una permutazione semplice del 1.° genere. Dunque ogni qualvolta la x' è indeterminabile dalla $T' = h$, mentre se ne cerca il valore immediatamente, ne sarà indeterminabile ancora, mentre se ne cerca il valore dipendentemente da un' altra funzione.

31. Pertanto concluderemo, che il Problema del (n. 29)

non è solubile dipendentemente dalla sola $T' = h$, e però dalla (B), se non nel (caso 2.° n.° 29), cioè mentre la T' conservasi $= h$ per una permutazione composta del 2.° genere; e simile soluzione si avrà risolvendo col metodo colà indicato le Equazioni successivamente ottenute, in ciascuna delle quali l' esponente per la natura delle permutazioni composte del genere 2.°, e pel (VI. caso 2.° n.° 29) vedesi facilmente dover essere $< m$, e > 1. L' ultima poi di tali Equazioni, cioè la $u^n + au^{n-1} +$ ec. $= 0$ sappiamo essere razionale, avere l'esponente n uguale al numero delle funzioni componenti la nostra T', e l' incognita $u = \pm x' x'' x''' \ldots x^{(\mu)}$.

Si potrebbe bensì ancora in questo (caso 2.° n.° 29) cercare il valore della x' mediante una nuova funzione y, come abbiamo accennato nel (n.° 30) rapporto al (caso 3.°); ma è facile a vedersi, che neppur quivi l' Equazione in y potrebbe risultare di grado inferiore al grado di quelle che abbiamo determinate nel (caso 2.° n.° 29), e però che quest' artifizio quantunque potesse riuscire opportuno, pure non ci apporterebbe alcun vantaggio nella soluzione del nostro Problema.

32. Prendendo nuovamente a considerare il (caso 3.° n.° 29), non potrebbe egli darsi, che le Equazioni in q (I. caso 3.°) in g (II. caso 3.°), in y (n.° 30) risultate di grado non $< m$ fossero riducibili ad altre di grado $< m$, la soluzion delle quali potesse poi somministrarci il valore corrispondentemente delle q, g, y? Se questo succede, io dico, che dovrà esistere un' altra Equazione di relazione tra le x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$, la quale conservandosi tale per una permutazione composta del 2.° genere, potrà somministrarci la soluzione del nostro Problema indipendentemente dalla $T = h$, col metodo istesso del (caso 2.° n.° 29).

Supponghiamo difatti, che tra le Equazioni sovraccennate la (XI) del (I. caso 3.° n.° 29) sia riducibile ad altra opportuna alla sua soluzione di un grado che chiamerò c, grado per conseguenza, il quale dovrà essere $< m$, e > 1. Da quanto abbiam veduto finora sappiamo, che una tal riduzione non potrà accadere che dipendentemente da un rapporto particolare fra le q', q'', q''' ec. $q^{(\rho)}$, il quale, eseguiti i raziocinii, e i calcoli precedenti, potrà ridursi ad un' Equazione $T'' = l$ corrispondente alla $T' = h$, e dotata di tutte le proprietà indicate nel (n.° 26). Ora per la ipotesi la (XI) è abbassabile ad altra Equazione di grado $< m$, e > 1, da cui possiamo in seguito ritrarre il valore della q, e ciò dipendentemente dalla $T'' = l$: dunque la T'' pel (n.° prec.) non potrà conservare il valore l che per una permutazione composta del 2.° genere, e dovrà perciò essere

$$T''=f[(q')(q'')(q''')\ldots(q^{(a)})],[f(q^{(a+1)})(q^{(a+2)})(q^{(a+3)})\ldots(q^{(2a)})],$$
$$[f(q^{(2a+1)})(q^{(2a+2)})(q^{(2a+3)})\ldots(q^{(3a)})],\ \ldots\ldots$$
$$[f(q^{(\rho-(a-1))})(q^{(\rho-(a-2))})(q^{(\rho-(a-3))})\ldots(q^{(\rho)})] = l.$$

Cerchiamo con le q', q'', q''', ec. $q^{(\rho)}$ dalla $T'' = l$ una nuova Equazione di rapporto, operando giusta il (n.° 6), e sia questa la $F\,(q')(q'')(q''')\ldots(q^{(a)}) = L$. Tale Equazione, contenendo le a quantità q', q'', q''', ec. $q^{(a)}$, avrà evidentemente tanti risultati secondarii $= L$, quante sono le funzioni componenti della T'', cioè un numero c, e chiamati Q', Q'', Q''' ec. $Q^{(c)}$ simili risultati, avremo

$Q'=F(q')(q'')(q''')\ldots(q^{(a)})$, $Q''=F(q^{(a+1)})(q^{(a+2)})(q^{(a+3)})\ldots(q^{(2a)})$, ec. Ora pel (I. caso 3.° n.° 29) $q' = \pm x'\,x''\,x'''\ldots x^{(\alpha+\beta)}$, $q'' = \pm x'\,x''\,x'''\ldots x^{(\alpha+\beta+1)}$, $q''' = \pm x'\,x''\,x'''\ldots x^{(\alpha+\beta+2)}$, ec. Dunque sostituendo nella Q' questi valori, otterremo

$$Q' = F\,(q')\,(q'')\,(q''')\ \ldots\ (q^{(a)}) = F\,(\pm x'\,x''\,x'''\ \ldots\ x^{(\alpha+\beta)})$$
$$(\pm x'\,x''\,x'''\ldots x^{(\alpha+\beta+1)})\,(\pm x'\,x''\,x'''\ldots x^{(\alpha+\beta+2)})\ \ldots =$$

$\Phi\,(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(n)}) = X$, chiamato $\Phi\,(x')\,(x'')\,(x''')\ \ldots$

$x^{(n)}$

$(x^{(\eta)})$, ed X ciocchè diventa Q per la sostituzione fatta, ed η il numero delle radici della (A), che entrano nella X.

Per eseguire una permutazione qualunque nella X è manifesto, che basta eseguirla in ciascuna delle funzioni sue componenti $\pm\ x' x'' x''' \ldots\ldots x^{(\alpha+\beta)}$, $\pm\ x' x'' x''' \ldots\ldots x^{(\alpha+\beta+1)}$, $x' x'' x''' \ldots x^{(\alpha+\beta+2)}$, ec.; ma le diverse permutazioni effettuate in questi prodotti non fanno che somministrarci i diversi valori della q. Dunque i varii risultati, che nascono dalla X per le varie permutazioni fra le x', x'', x''', ec. saranno uguali ai risultati che si hanno dalla Q per le permutazioni corrispondenti fra le q', q'', q''', ec., e però, fatte nella X le permutazioni, che corrispondono ai valori precedenti Q', Q'', Q''', ec. $Q^{(c)}$, e chiamatine X', X'', X''', ec. $X^{(c)}$ i risultati, avremo $X' = Q'$, $X'' = Q''$, $X''' = Q'''$, ec. $X^{(c)} = Q^{(c)}$, ed avremo $X' = X'' = X''' = \text{ec.} = X^{(c)} = L$. Ora osservando il valore dell' esponente ρ (I. caso 3.° n.° 29), vedesi, che la (XI) è quella Equazione medesima, che si ottiene dalla (A), mentre se ne cerca la trasformata in q col metodo generale delle trasformazioni, indipendentemente da qualsivoglia rapporto particolare fra le x', x'', x''', ec. onde le q', q'', q''', ec. $q^{(c)}$ sono i valori tutti della q tra loro differenti. Dunque avendosi solamente un numero c di valori della Q uguali ad L, avremo ancora sotto tutte le possibili permutazioni fra le x', x'', x''', ec. un numero c solamente di risultati della X uguali ad L.

Ciò posto, riduciamo giusta il (n.° 20) le $X' = X'' = \text{ec.} = L$ ad una funzione $T''' = F(X', X'', X''', \text{ec. } X^{(c)}) = H$, e da questa cerchiamo il valore della x': operando siccome nel (V. caso 2.° n.° 29) formo l' Equazione $x^{\eta} + t\, x^{\eta-1} + \text{ec.} + u = 0$, e dalla $T''' = H$ cerco il valore del coefficiente u; per quanto abbiam detto, otterremo per esso un' Equazione razionale $u^{c} + a u^{c-1} + \text{ec.} = 0$, in cui $c < m$, e > 1; ma ciò non può accadere, che mentre la T''' sia una funzione, la quale mantenga il valore H per una permutazione composta del 2.° genere (n. 29, 30, 31); e questa $T''' = H$, tale essendo, nel modo ora indicato può darci il valore della x'. Dunque ec.

Gli stessi raziocinii ci dimostrano la verità del nostro Teorema rapporto ancora alla (XII), ed a tutte le Equazioni, che infine ci risultano nella ricerca degli altri coefficienti.

Consideriamo presentemente l' Equazione, che nella determinazione della $y = \varphi (x') (x'') (x''') \ldots$ dalla $T' = h$ diventa pel (n.° 30) di un grado non $< m$, e supponghiamo, che nella nostra permutazione composta del 3.° genere (caso 3.° n.° 29) siano due soltanto le permutazioni componenti, onde la T' abbia la forma espressa in (VIII), e che la y cambiando di valore a qualunque permutazione venga in conseguenza della prima componente nella (VIII) a dipendere da un' Equazione $y^{\alpha+\beta} + G y^{\alpha+\beta-1} + \text{ec.} + Y = 0$, il coefficiente Y della quale sia radice di un' altra $Y^{\pi} + Y^{\pi-1} + \text{ec.} + u = 0$. Essendo due solamente le permutazioni, per cui la T' conservasi $= h$, l' Equazione in Y ascenderà al grado supposto π in conseguenza della permutazione seconda, sarà razionale, e pel (n.° 30) dovrà avere l' esponente π non $< m$. Sia pertanto questa Equazione in Y giusta l' enunciato del Teorema riducibile ad un' altra $V^{\lambda} + a V^{\lambda-1} + \text{ec.} = 0$, in cui abbiasi $\lambda < m$, e > 1, e dalla cui soluzione possansi ricavare, i valori Y', Y'', Y''', ec., e veggiamo quali conseguenze da ciò si ritraggano.

Cerchisi dalla funzione Y il valore della $q = \pm x' x'' x''' \ldots x^{(\alpha+\beta)}$ (I. caso 3.° n.° 29). Sotto la prima permutazione componente tanto la q, quanto la Y conservano il proprio valore; per la seconda poi cangiansi tanto l' una, quanto l' altra, e il numero ρ dei differenti risultati della q non può essere maggiore del numero π dei risultati tra loro diversi della Y (n.° 30) . Dunque ad ogni valore diverso della Y uno soltanto corrispondendone della q, pel (n.° 144. Teor. delle Equaz.) potrò ottenere q' da Y', q'' da Y'', ec. sempre razionalmente . Ora i valori Y', Y'', ec. vengono dedotti dalla soluzione della $V^{\lambda} + aV^{\lambda-1}$ + ec. = o ; dunque dalla soluzione dell' Equazione medesima venendo dedotti eziandio i valori q', q'', ec., ne segue, che questa $V^{\lambda} + aV^{\lambda-1}$ + ec. = o potrà ancora considerarsi, come un' Equazione, a cui la (XI) si può abbassare opportunamente alla propria soluzione : ma se la (XI) è capace di simile abbassamento, abbiam veduto verificarsi il nostro Teorema . Dunque il Teorema medesimo si verificherà ancora, mentre sia opportunamente riducibile a grado inferiore l' Equazione, da cui dipende la supposta funzione y.

Qualunque siasi la y, e qualunque il numero delle permutazioni componenti, per cui la T' si mantiene = h, con egual raziocinio troveremo essere sempre vera la nostra Proposizione .

33. Quanto abbiamo asserito nel (n.° 31) si verifica adunque in tutta la generalità, e però dovrem dire, che nella ipotesi di (A) Equazione semplice, e di $m > 4$, la x' non è mai determinabile, se non nel caso, in cui abbia luogo un' Equazion di rapporto particolare fra le x', x'', x'''; ec. $x^{(m)}$, la quale si conservi tale per una permutazione composta del 2.° genere . Ora il Problema di ridurre l' Equazione (A) ad altra di grado inferiore, dalla cui soluzione, possa in seguito ottenersi la soluzione della stessa (A) è manifestamente identico al Problema del (n.° 29), preso in generale . Dunque non potremo mai abbassare una data Equazion semplice di grado > 4 opportunamente alla propria soluzione, se non nel caso che esista l' Equazion di rapporto ora indicata ; ed esistendo riguardo alla (A) tale Equazione, la $u^{n} + au^{n-1}$ + ec. = o in cui $u = \pm x' x' x''' \ldots x^{(u)}$ (n.° 31), ossia la (D), sarà l' Equazione ridotta, Equazio-

ne, dalla soluzion della quale otterremo in seguito la soluzione della (A) col metodo del (caso 2.° n ° 29).

34. Una qualunque Equazione semplice (A) di grado > 4, il cui esponente sia numero primo, non è capace di abbassamento opportuno alla sua soluzione.

Se la (A) supposta fosse capace dell' accennato abbassamento, pel (n.° prec.) dovrebbe verificarsi l' Equazion di rapporto (F), e la (D) ne rappresenterebbe l' Equazione ridotta. Ora dovendo nella (F) tutte esistere le m radici della (A) (4.° n.° 26); essendo l' esponente n della (D) uguale al numero delle funzioni componenti essa (F) (n.° 31); in ciascuna di queste entrando un numero μ di radici (n.° 260. Teor. delle Equaz.); e finalmente non potendo alcuna di queste μ radici aver luogo contemporaneamente in due delle funzioni componenti (VI. caso 2.° n.° 29), ne segue che dovrà essere $\mu n = m$, e però $n = \frac{m}{\mu}$; ma a cagione di m numero semplice, e di $\mu > 1$, e $< m$ (n.° 31), $\frac{m}{\mu}$ è necessariamente un numero rotto. Dunque, dovendo essere n necessariamente numero intero, l' Equazione $n = \frac{m}{\mu}$ sarà impossibile, e per conseguenza ec.

35. Determinare se una data Equazione (A) è riducibile ad altra di grado inferiore atta alla propria soluzione.

Ridotta questa ad Equazione semplice (n.° 1), osservo in primo luogo, se il suo esponente m è numero primo, o nò: se lo è, decido immediatamente essere la (A) incapace della riduzion domandata (n.° prec.). Che se m è numero composto, cerco i suoi divisori esatti, e supposto rappresentarsi uno qualunque di loro col numero μ, faccio il prodotto $x' \, x'' \, x''' \, \ldots \, x^{(\mu)} = u$, trovo dalla (A) la trasformata in u, e supposto $\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-(\mu-1))}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ \mu} = p$, onde tal trasformata venga espressa dalla

(G)

(G) $$u^{\rho} + Mu^{\rho-1} + Nu^{\rho-2} + \text{ec.} = 0,$$

cerco, se essa ha un fattor razionale di grado $\frac{m}{\mu} = n$, o no; se non lo à, e se, praticato riguardo agli altri fattori tutti di m ciò stesso, che abbiam fatto rapporto a μ, troviamo non esistere mai in alcuna delle trasformate rispettive divisor razionale di grado corrispondente ad n; allora diremo nuovamente, che la data (A) non è abbassabile opportunamente alla propria soluzione. Che se questo fattore esiste, allora diremo, che l' Equazione data è attualmente riducibile a grado inferiore, e che la (D) ne è l' Equazione ridotta (n. 31, 33).

Che poi questa (D) sia atta alla soluzione della Equazione data, cioè che dalle sue radici possansi determinare le radici della (A) col mezzo di Equazioni di grado $< m$, vedesi facilmente dal (IV. caso 2.° n.° 29). Imperciocchè, supposta l' Equazione

(C) $$x^{\mu} + tx^{\mu-1} + zx^{\mu-2} + \text{ec.} + u = 0,$$

se cerco, siccome nel (n.° 23), da ciascuno dei valori u', u'', ec. $u^{(n)}$ il valore di cadaun coefficiente t, z, ec., e chiamo

(H) $$\begin{array}{l} x^{\mu} + t'x^{\mu-1} + z'x^{\mu-2} + \text{ec.} + u' = 0, \\ x^{\mu} + t''x^{\mu-1} + z''x^{\mu-2} + \text{ec.} + u'' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{\mu} + t^{(n)}x^{\mu-1} + z^{(n)}x^{\mu-2} + \text{ec.} + u^{(n)} = 0 \end{array}$$

le Equazioni, che ci risultano, la soluzione della prima fra esse ci darà le radici x', x'', x''', ec. $x^{(\mu)}$, la soluzione della seconda ci darà le radici $x^{(\mu+1)}$, $x^{(\mu+2)}$, $x^{(\mu+3)}$, ec. $x^{(2\mu)}$; e così di seguito.

36. Il metodo istesso, che abbiamo indicato doversi seguire per isciogliere il Problema del (n.° prec.) ci servirà ancora per ottenere attualmente l' opportuno abbassamento

della (A), alloraquando essa ne è capace. Ogniqualvolta la y del (n.° 31) facciasi uguale ad una funzione delle x', x'', x''', ec. $x^{(\mu)}$, la quale conservi il proprio valore per tutte quelle permutazioni primitive, sotto cui nella (F) conserva il valor proprio la $f\,(x')\,(x'')\,(x''')\,\ldots\,(x^{(\mu)})$; vedesi che sempre per la y, dipendentemente dalla $T'=h$, ci risulterà un' Equazion razionale di grado n, e quindi che infinite potranno essere le Equazioni ridotte, noi però fra queste sceglieremo la (D), come quella, che in generale riesce più semplice delle altre, e da cui con facilità maggiore potremo determinare i coefficienti della (C). Il metodo generale poi delle trasformazioni (capo 4.° Teor. delle Equaz.) potrà darci la (G), da cui in seguito ottienesi la (D), e il metodo con cui si risolve il Problema del (n.° 142. Teor. delle Equaz.) ci somministrerà dipendentemente dalle radici u', u'', ec. $u^{(n)}$ i coefficienti tutti in (H). Non sarà però inconveniente lo stabilirne degli altri, affinchè poi nelle varie circostanze possiamo far uso di quelli, i quali possonci rendere i calcoli più brevi, e men laboriosi.

PAR-

PARTE TERZA.

37. Ritenuta la maniera di scrivere supposta nel (Capo 2.° Teor. delle Equaz.) per semplicità ulteriore supponghiamo $\Sigma\,\overline{x\,x}^{r} = \Sigma\,\overline{x2}^{r}$, $\Sigma\,\overline{xxx}^{r} = \Sigma\,\overline{x3}^{r}$, $\Sigma\,\overline{xxxx}^{r} = \Sigma\,\overline{x4}^{r}$, ec. $\Sigma x^{r}\overline{x\,x}^{r} = \Sigma x^{r}\overline{x2}^{r}$, $\Sigma x^{r}\overline{xxx}^{r} = \Sigma x^{r}\overline{x3}^{r}$, $\Sigma x^{r}\overline{xxxx}^{r} = \Sigma x^{r}\overline{x4}^{r}$, ec., pel (n.° 47. Teor. delle Equaz.) dovrà essere

$$\Sigma\,\overline{x2}^{r} = \frac{\Sigma x^{r}\,\Sigma x^{r} - \Sigma x^{2r}}{2},$$

$$\Sigma\,\overline{x3}^{r} = \frac{\Sigma x^{r}\,\Sigma\overline{x2}^{r} - \Sigma x^{2r}x^{r}}{3},$$

$$\Sigma\,\overline{x4}^{r} = \frac{\Sigma x^{r}\,\Sigma\overline{x3}^{r} - \Sigma x^{2r}\overline{x2}^{r}}{4},$$

$$\Sigma\,\overline{x5}^{r} = \frac{\Sigma x^{r}\,\Sigma\overline{x4}^{r} - \Sigma x^{2r}\overline{x3}^{r}}{5},$$

$$\Sigma\,\overline{x6}^{r} = \frac{\Sigma x^{r}\,\Sigma\overline{x5}^{r} - \Sigma x^{2r}\overline{x4}^{r}}{6},$$

ec.

$$\Sigma\,\overline{x(\mu)}^{r} = \frac{\Sigma x^{r}\,\Sigma\overline{x(\mu-1)}^{r} - \Sigma x^{2r}\overline{x(\mu-2)}^{r}}{\mu},$$

Dunque sostituendo successivamente, otterremo

$$\Sigma\,\overline{x2}^{r} = \frac{(\Sigma x^{r})^{2} - \Sigma x^{2r}}{2},$$

$$\Sigma\,\overline{x3}^{r} = \frac{(\Sigma x^{r})^{3} - \Sigma x^{r}\Sigma x^{2r} - 2\Sigma x^{2r}x^{r}}{2.\ 3.},$$

$$\Sigma\,\overline{x4}^{r} = \frac{(\Sigma x^{r})^{4} - (\Sigma x^{r})^{2}\Sigma x^{2r} - 2\Sigma x^{r}\Sigma x^{2r}x^{r} - 2.3\Sigma x^{2r}\overline{x2}^{r}}{2.\ 3.\ 4.},$$

$$\text{(I)}\ \Sigma\,\overline{x5}^{r} = \frac{(\Sigma x^{r})^{5} - (\Sigma x^{r})^{3}\Sigma x^{2r} - 2(\Sigma x^{r})^{2}\Sigma x^{2r}x^{r} - 2.3\Sigma x^{r}\Sigma x^{2r}\overline{x2}^{r} - 2.3.4\Sigma x^{2r}\overline{x3}^{r}}{2.\ 3.\ 4.\ 5.}$$

$$\Sigma\,\overline{x6}^{\,r} = [(\Sigma x^r)^6 - (\Sigma x^r)^4 \Sigma x^{2r} - 2(\Sigma x^r)^3 \Sigma x^{2r} x^r - 2.3(\Sigma x^r)^2 \Sigma x^{2r}\overline{x2}^{\,r} -$$

$$2.3.4 \Sigma x^r \Sigma x^{2r}\overline{x3}^{\,r} - 2.3.4.5\,\Sigma x^{2r}\overline{x4}^{\,r}] : 2.3.4.5.6.$$

ec.

$$\Sigma\,\overline{x(\mu)}^{\,r} = [(\Sigma x^r)\mu - (\Sigma x^r)^{\mu-2}\Sigma x^{2r} - 2(\Sigma x^r)^{\mu-3}\Sigma x^{2r} x^r - 2.3(\Sigma x^r)^{\mu-4}\Sigma x^{2r}\overline{x2}^{\,r} -$$

$$2.3.4(\Sigma x^r)^{\mu-5}\Sigma x^{2r}\overline{x3}^{\,r} - 2.3.4.5(\Sigma x^r)^{\mu-6}\Sigma x^{2r}\overline{x4}^{\,r} - \text{ec.} -$$

$$2.3.4.5\ldots(\mu-1)\,\Sigma x^{2r}\overline{x(\mu-2)}^{\,r}] : 1.2.3.4.5\ldots\mu.$$

In egual modo avendosi pei (n. 41, 46, 47 Teor. delle Equaz.)

$$\Sigma x^{2r} x^r = \Sigma x^{2r}\,\Sigma x^r - \Sigma x^{3r},$$

$$\Sigma x^{2r}\overline{x2}^{\,r} = \Sigma x^{2r}\,\Sigma\overline{x2}^{\,r} - \Sigma x^{3r} x^r,$$

$$(\mathrm{K})\quad \Sigma x^{2r}\overline{x3}^{\,r} = \Sigma x^{2r}\,\Sigma\overline{x3}^{\,r} - \Sigma x^{3r}\overline{x2}^{\,r},$$

$$\Sigma x^{2r}\overline{x4}^{\,r} = \Sigma x^{2r}\,\Sigma\overline{x4}^{\,r} - \Sigma x^{3r}\overline{x3}^{\,r},$$

ec.

$$\Sigma x^{2r}\overline{x(q)}^{\,r} = \Sigma x^{2r}\,\Sigma\overline{x(q)}^{\,r} - \Sigma x^{3r}\overline{x(q-1)}^{\,r},$$

troveremo risultarci

$$\Sigma x^{2r} x^r = \Sigma x^{2r}\Sigma x^r - \Sigma x^{3r},$$

$$\Sigma x^{2r}\overline{x2}^{\,r} = \Sigma x^{2r}\Sigma\overline{x2}^{\,r} - \Sigma x^{3r}\Sigma x^r + \Sigma x^{4r}$$

$$\Sigma x^{2r}\overline{x3}^{\,r} = \Sigma x^{2r}\Sigma\overline{x3}^{\,r} - \Sigma x^{3r}\Sigma\overline{x2}^{\,r} + \Sigma x^{4r}\Sigma x^r - \Sigma x^{5r},$$

$$\Sigma x^{2r}\overline{x4}^{\,r} = \Sigma x^{2r}\Sigma\overline{x4}^{\,r} - \Sigma x^{3r}\Sigma\overline{x3}^{\,r} + \Sigma x^{4r}\Sigma\overline{x2}^{\,r} - \Sigma x^{5r}\Sigma x^r + \Sigma x^{6r},$$

ec.

$$\Sigma x^{2r}\overline{x(q)}^{\,r} = \Sigma x^{2r}\Sigma\overline{x(q)}^{\,r} - \Sigma x^{3r}\Sigma\overline{x(q-1)}^{\,r} + \Sigma x^{4r}\Sigma\overline{x(q-2)}^{\,r} -$$

$$\Sigma x^{5r}\Sigma\overline{x(q-3)}^{\,r} + \Sigma x^{6r}\,\Sigma\overline{x(q-4)}^{\,r} - \text{ec.} \mp \Sigma x^{(q+1)r}\Sigma x^r \pm \Sigma x^{(q+2)r},$$

prendendosi in quest' ultima formola generale il segno superiore quando q è numero pari, l' inferiore, quando q è dispari.

38. Col mezzo delle Formole (I), (K), l' andamento delle quali è assai chiaro, noi potremo trasformare la data (A) in altra Equazione, le cui radici siano tutti i prodotti delle x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$ combinate fra loro a due a due, oppure a tre a tre, oppure a quattro a quattro, e in generale a μ a μ.

Supposto di fatti rappresentarsi dalla (G) la trasformata, vogliasi a cagione di esempio, che le sue radici, siano i prodotti tutti a quattro delle x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$, e però che abbiasi $u' = x'\,x''\,x'''\,x^{\prime v}$, $u'' = x'\,x''\,x'''\,x^{v}$, ec. $u^{(p)} = x^{(m-3)}\,x^{(m-2)}\,x^{(m-1)}\,x^{(m)}$. In questa ipotesi essendo $p = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.\ 3.\ 4}$, non restano a determinarsi che i coefficienti M, N, P, Q, ec.: a tal fine prendansi le prime tre delle (I) Equazioni, le prime due delle Equazioni (K), col loro mezzo si determinino le quantità $\Sigma\overline{x2}^{\,r}$, $\Sigma\overline{x3}^{\,r}$, $\Sigma x^{2r}x^{r}$, $\Sigma x^{2r}\,\overline{x2}^{\,r}$; e otterremo

$$\Sigma\overline{x4}^{\,r} = \frac{(\Sigma x^{r})^{4} - 6(\Sigma x^{r})^{2}\Sigma x^{2r} + 8\Sigma x^{r}\Sigma x^{3r} - 6\Sigma x^{4r} + 3(\Sigma x^{2r})^{2}}{2.\ 3.\ 4.},$$

ossia a cagione di $\Sigma\overline{x4}^{\,r} = \Sigma u^{r}$, otterremo

$$\Sigma u^{r} = \frac{(\Sigma x^{r})^{4} - 6(\Sigma x^{r})^{2}\Sigma x^{2r} + 8\Sigma x^{r}\Sigma x^{3r} - 6\Sigma x^{4r} + 3(\Sigma x^{2r})^{2}}{2.\ 3.\ 4}.$$

Quest' ultima è una formola, la quale facendo successivamente $r = 1, 2, 3$, ec., ci somministra i valori delle Σu, Σu^{2}, Σu^{3}, Σu^{4}, ec. espressi per le Σx, Σx^{2}, Σx^{3}, ec., ma i valori delle Σx, Σx^{2}, ec. col mezzo dei Teoremi Newtoniani ottengonsi espressi con i coefficienti A, B, C, ec. della data. Dunque sostituendo avremo ancora i valori delle Σu, Σu^{2}, Σu^{3}, ec. espressi con i coefficienti medesimi A, B, C, ec. Ora gli stessi Teoremi Newtoniani ci somministrano i valori dei coefficienti M, N, P, Q, ec. dipendentemente dalle Σu, Σu^{2}, Σu^{3} ec. Dunque, sostituendo di nuovo, otterremo infine i valori delle quantità M, N, P, Q, ec. espressi per le altre A, B, C, ec., e quindi determinata avremo la trasformata richiesta.

Lo stesso si dice, e si pratica, qualunque siasi nei prodotti rappresentati dalla u il numero μ delle radici x', x'', x''', ec. che li compongono.

Sia per esempio $x^{4} - 4x^{3} - 28x + 13 = 0$ la data Equazione (A), e vogliasi, che nella Trasformata (G) sia u

$= x' x''$. In questo caso avendosi $p = \frac{4 \cdot 5}{2} = 6$, la (G) diverrà
$$u^6 + Mu^5 + Nu^4 + Pu^3 + Qu^2 + Ru + S = 0,$$
e avendosi $\Sigma u^r = \Sigma \overline{x2}^r$, per la determinazione dei coefficienti M, N, P, ec. ci serviremo della prima delle formole (I), ponendo Σu^r in luogo di $\Sigma \overline{x2}^r$, ci serviremo cioè della $\Sigma u^r = \frac{(\Sigma x^r)^2 - \Sigma x^{2r}}{2}$. Ora facendo successivamente $r = 1, 2, 3, 4$, ec. ci risulta in corrispondenza
$$\Sigma u = \frac{(\Sigma x)^2 - \Sigma x^2}{2},\ \Sigma u^2 = \frac{(\Sigma x^2)^2 - \Sigma x^4}{2},\ \Sigma u^3 = \frac{(\Sigma x^3)^2 - \Sigma x^6}{2},$$
$$\Sigma u^4 = \frac{(\Sigma x^4)^2 - \Sigma x^8}{2},$$
ec., e dai Teoremi Newtoniani abbiamo
$$\Sigma u + M = 0, \Sigma u^2 + M\Sigma u + 2N = 0, \Sigma u^3 + M\Sigma u^2 + N\Sigma u + 3P = 0,$$
ec. Dunque sostituiti nelle prime di queste Equazioni in luogo delle Σx, Σx^2, Σx^3, ec. i loro valori, ed ottenuti così i valori delle Σu, Σu^2, Σu^3, ec. espressi pei cofficienti $-4, 0, -28, 13$ della data, pongo essi nelle Equazioni seconde, da queste così ridotte determino successivamente i valori dei coefficienti M, N, P, ec., e così operando, otterremo $M = 0$, $N = 99$, $P = -992$, $Q = 1287$, $R = 0$, $S = 2197$, onde
$$u^6 + 99u^4 - 992u^3 + 1287u^2 + 2197 = 0$$
sarà l' Equazione domandata.

39. Vogliasi sapere se la precedente Equazione $x^4 - 4x^3 - 28x + 13 = 0$ sia abbassabile opportunamente alla sua soluzione; e in caso che sì, quale ne sia la ridotta, e come dalle radici di questa potremo dedurre le radici della data.

Essendo la data un' Equazione semplice, ed essendo l' esponente 4 divisibile solamente per 2, non potrà essa abbassarsi che ad un' altra Equazione del grado 2.° (n.° 35). In conseguenza pertanto di ciò, che abbiam detto nel (n.° 36), suppongo il prodotto $x' x'' = u$, determino col metodo insegnato la precedente $u^6 + 99u^4 - 992u^3 + 1287u^2 +$

$2197 = 0$, osservo se questa ha fattor razionale di 2.° grado, e trovando che lo ha realmente, tale essendo il trinomio $u^2 - 8u + 13$, dirò, che l' Equazione data è attualmente abbassabile, e che $u^2 - 8u + 13 = 0$ è l' Equazione ridotta, le cui radici sono $u' = x' x''$, $u'' = x''' x^{\text{iv}}$.

Presentemente dovendosi dai valori u', u'' dedurre gli altri x', x'', x''', x^{iv}, formo pel (n.° 35) l' Equazione $x^2 + tx + u = 0$, e dai valori della u dovrò cercare i corrispondenti della t. A tal fine osservo, che altro non essendo le radici della $x^2 + tx + u = 0$ se non se due delle radici della Equazione data, il primo membro di questa dovrà essere divisibile esattamente pel primo di quella. Eseguisco pertanto simile divisione, e avuto l' avanzo
$-(t^3 + 4t^2 - 2tu - 4u + 28)\,x - (t^2u + 4tu - u^2 - 13)$; poichè questo deve essere zero indipendentemente dal valore della x, faccio
$t^3 + 4t^2 - 2tu - 4u + 28 = 0$, $t^2u + 4tu - u^2 - 13 = 0$.

Supponghiamo, che, risolta la prima di tali Equazioni, ottengasi $t = F(u)$; ma in amendue queste Equazioni, allorquando si pone $u = u'$, deve risultare $t = t'$; dunque, fatto $u = u'$, la $F(u') = t'$ dovrà essere radice non solamente della prima di esse, ma ancora della seconda, e però i loro primi membri dovranno essere divisibili entrambi esattamente per $t - F(u')$. In conseguenza di ciò, considerando la t come incognita, pratico su di loro l' operazione, che si usa a trovare il massimo comun divisore, estendo tale operazione, finchè mi risulta un divisore riguardo alla t di 1.° grado, pongo in questo u' in luogo della u, lo uguaglio allo zero, e mi verrà un'Equazione, il cui primo membro sarà evidentemente il precedente binomio $t - F(u')$, e da cui per conseguenza ricavandosi $t = F(u')$, si avrà $t = t'$; ma ciò stesso, che abbiam detto delle u', t' dicesi in egual modo delle u'', t''. Dunque se nella nostra Equazione porremo la u senza apice, la $t = F(u)$ sarà tale, che in vece della u collocando u', ci verrà $t' = F(u')$, e collocandovi u'', ci verrà $t'' = F(u'')$.

Effettuata nel nostro esempio l' operazion precedente, poichè pel divisore riguardo alla t di 1.° grado ci risulta la quantità $-(u^2 - 13)\,t - (4u^2 - 28u)$, uguaglio questa allo zero, e riducendo avremo $t = \frac{28u - 4u^2}{u^2 - 13}$, onde sarà $t' = \frac{28u' - 4u'^2}{u'^2 - 13}$, $t'' = \frac{28u'' - 4u''^2}{u''^2 - 13}$. Poichè u', u'' sono le radici della ridotta $u^2 - 8u + 13 = 0$, per maggiore semplicità eliminiamo col mezzo di questa la u^2 dalla $t = \frac{28u - 4u^2}{u^2 - 13}$, avuto il risultato $t = \frac{26 - 2u}{4u - 13}$, collochiamo in esso successivamente i due valori $u' = 4 + \sqrt{3}$, $u'' = 4 - \sqrt{3}$, e per tal guisa otterremo

$$t' = \frac{18 - 2\sqrt{3}}{3 + 4\sqrt{3}} = \frac{(3 - 4\sqrt{3})(18 - 2\sqrt{3})}{(3 - 4\sqrt{3})(3 + 4\sqrt{3})} = -\frac{78 - 78\sqrt{3}}{39} = -2 + 2\sqrt{3}$$

$$t'' = \qquad\qquad = -2 - 2\sqrt{3}.$$

Facciansi ora le dovute sostituzioni nella $x^2 + tx + u = 0$, e avute le due Equazioni $x^2 - (2 - 2\sqrt{3})x + (4 + \sqrt{3}) = 0$, $x^2 - (2 + 2\sqrt{3})x + (4 - \sqrt{3}) = 0$, la soluzione della prima di esse ci darà il valore delle due radici x', x'', della Equazion data, la soluzione della seconda ci darà il valore delle altre x''', x^{iv}.

40. Passiamo al caso generale, e dipendentemente dalle u', u'', u''', ec. $u^{(\mu)}$ radici della ridotta (D) vogliansi determinare i valori corrispondenti delle quantità t, z, y, u, ec. coefficienti della (C).

1.° Operando perciò come nel (n.° prec.), divido il primo membro della (A) pel primo della (C), e chiamo $Px^{n-1} + Q\,x^{\mu-2} + R\,a^{\mu-3} + S\,x^{\mu-4} +$ ec. $+ Y$ il residuo, che ne viene. Poichè la divisione deve risultare esatta, e deve però il risultato divenire $= 0$ indipendentemente dalla x, vedesi, che i valori delle t, z, y, v, ec. u fra loro corrispondenti dovranno, mentre sian posti contemporaneamente nei coefficienti P, Q, R, S, ec. Y, produrci le Equazioni

(L) $\quad P=0,\ Q=0,\ R=0,\ S=0,$ ec. $Y=0$.

Ora i valori della u sono già determinati dalla (D); dunque non restando a determinarsi che i corrispondenti delle t, z, y, v, ec., cominciamo dal porre nelle (L) il valore u', e dipendentemente da questo cerchiamo i valori t', z', y', v', ec. Fatta la sostituzione precedente può succedere che qualcuna delle (L) divenga immediatamente zero in conseguenza della sola u', come nella ipotesi, che, essendo per esempio $P=\varphi'(u)t^3+\varphi''(u)t^2z+\varphi'''(u)z^3+\varphi^{\prime v}(u)z^2+\varphi^{v}(u)$, abbiasi $\varphi'(u')=0, \varphi''(u')=0, \varphi'''(u')=0, \varphi^{\prime v}(u')=0, \varphi^{v}(u')=0$; oppure niuna delle accennate Equazioni (L) si verifica in conseguenza di tale sostituzione.

Prendiamo in primo luogo a considerare quest' ultimo caso. Essendo le Equazioni (L) di numero μ, e tolta già la u, essendo di numero $\mu-1$ le incognite t, z, y, v, ec., che vi rimangono, da un numero $\mu-1$ di tali Equazioni per esempio dalle $Q=0, R=0, S=0$, ec. $Y=0$ elimino le $\mu-2$ incognite z, y, v, ec. lasciandovi la t, e otterrò così un' Equazione $f(t)(u')=0$. In seguito da un altro numero $\mu-1$ delle Equazioni medesime, compresavi la $P=0$, elimino le stesse $\mu-2$ incognite z, y, v, ec., e mi verrà un' altra Equazione $f'(t)(u')=0$. Ottenute queste

(M) $\quad f(t)(u')=0,\ f'(t)(u')=0,$

supponghiamo in primo luogo, che le radici della (D) siano tutte disuguali fra loro; in somigliante ipotesi poichè lo stesso discorso, che abbiam fatto nel (n.° prec.) sulle due Equazioni in t, ed u colà esistenti, si applica egualmente alle (M); tolto dalla u' l' apice, cerco fra i primi due membri $f(t)(u)$, $f'(t)(u)$ il massimo comun divisore, ponendo la t come incognita, proseguo l' operazione fino ad ottenere un divisore, in cui la t non superi il primo grado, faccio questo uguale allo zero, e mi verrà un' Equazione $t=F(u)$, dalla quale, ponendo successivamente in luogo della u i valolori u', u'', u''', ec. $u^{(n)}$, per le ragioni accennate nel (n.° prec.) otterremo $t' = F(u')$, $t'' = F(u'')$, $t''' = F(u''')$, ec. $t^{(n)} = F(u^{(n)})$.

Quì pure, operando siccome nel (n.° prec.), potremo col mezzo della (D) eliminare dalla $F(u)$ tutti i termini, che contengono delle potenze della u di grado $> n-1$, e ciò fatto, è chiaro, che mi verrà un' Equazione della forma

$$(N) \qquad t = \frac{au^{n-1} + bu^{n-2} + cu^{n-3} + \text{ec.}}{\alpha u^{n-1} + \beta u^{n-2} + \gamma u^{n-3} + \text{ec.}},$$

da cui si avranno i valori t', t'', t''', ec. $t^{(n)}$, facendo successivamente $u = u'$, u'', u''', ec. $u^{(n)}$.

2.° Tornando alle Equazioni (L), in cui esista u' in luogo della u, ponghiamo t' in luogo della t. In conseguenza di tale sostituzione quì pure, come di sopra, o qualcuna delle (L) diviene zero, o no: supponghiamo primieramente che no, e in questa ipotesi mediante un numero $\mu - 2$ delle (L), per esempio mediante le $R = 0$, $S = 0$, ec. $Y = 0$ si tolgano le $\mu - 3$ quantità y, v, ec., si faccia l'eliminazione medesima col mezzo di altre $\mu - 2$ delle stesse Equazioni, per esempio col mezzo delle $P = 0$, $S = 0$, ec. $Y = 0$, e avremo così le due Equazioni

$$(O) \qquad f(z)(t')(u') = 0\,,\; f'(z)(t')(u') = 0\,.$$

Ora considerando in questa la z come incognita, e tolti dalle t', u' gli apici, cerco fra i loro primi due membri, il massimo comun divisore, estendendo l'operazione insino a che si abbia un divisore di 1.° grado, e uguagliato questo allo zero, avremo un' Equazione $z = F(t)(u)$, nella quale sostituendo invece delle t, u i valori già ritrovati t', u'; t'', u''; t''', u'''; ec. $t^{(n)}$, $u^{(n)}$, otterremo evidentemente $z' = F(t')(u')$, $z'' = F(t'')(u'')$, $z''' = F(t''')(u''')$, ec. $z^{(n)} = F(t^{(n)})(u^{(n)})$.

Col mezzo della (D), e col mezzo della Equazione in t, che potremo sempre determinare moltiplicando insieme i binomj $t - t'$, $t - t''$, $t - t'''$, $t - t^{(n)}$, se toglieremo dalla $F(t)(u)$

tutte le potenze delle t, u di grado $> n - 1$, avremo un' Equazione della forma

$$(P)\quad z = t^{n-1}(au^{n-1} + bu^{n-2} + \text{ec.}) + t^{n-2}(gu^{n-1} + hu^{n-2} + \text{ec.}) + t^{n-3}(pu^{n-1} + qu^{n-2} + \text{ec.}) + \text{ec.} : t^{n-1}(\alpha u^{n-1} + \beta u^{n-2} + \text{ec.}) + t^{n-2}(\zeta u^{n-1} + \eta u^{n-2} + \text{ec.}) + t^{n-3}(\pi u^{n-1} + \rho u^{n-2} + \text{ec.}) + \text{ec.}$$

da cui otterremo nello stesso modo, che dalla $z = \mathrm{F}(t)(u)$, tutti i successivi valori z', z'', z''', ec. $z^{(n)}$.

3.° Oltre delle quantità u', t' sostituiscasi nelle (L) in vece della z il valore z', e supponghiamo ancor quivi, che per ciò solo niuna delle (L) si verifichi. Operando, ciò posto, nelle Equazioni risultate in maniera simile alle precedenti, ricaveremo un' Equazione $y = \mathrm{F}(z)(t)(u)$, la quale col mezzo delle Equazioni già ottenute in u, t, z potrà, come precedentemente, ridursi ad un' altra

$$(Q)\qquad y = \varphi(z)(t)(u)$$

priva di tutte le potenze delle u, t, z di grado $> n - 1$; e sì la $y = \mathrm{F}(z)(t)(u)$, che l'altra $y = \varphi(z)(t)(u)$ ci daranno tutti i valori y', y'', y''', ec. $y^{(n)}$, mentre sostituiscansi in luogo delle z, t, u, successivamente i valori z', t', u'; z'', t'', u''; z''', t''', u'''; ec. $z^{(n)}$, $t^{(n)}$, $u^{(n)}$.

Lo stesso si dice, e si pratica per la determinazione degli altri coefficienti v, ec.

Abbiamo di sopra determinato il valore della z mediante i valori delle due quantità t, u, il valore della y mediante le tre z, t, u, e così in progresso, potevamo però determinare i valori di cadauna di queste z, y, ec. col mezzo dei valori di una sola delle altre incognite, per esempio della sola u, e ciò operando rapporto a ciascuna delle z, y, ec. nel modo istesso, che abbiam tenuto, allor quando abbiamo cercato dalla sola u i valori della t. Il più delle volte però il calcolo, se non erro, riuscirà più breve, mentre si esprimano i valori delle z, y, ec. col mezzo di più delle quantità accennate, che quando si esprimano col mezzo di una sola.

41. Suppongasi in secondo luogo, che due delle radici della (D) siano uguali fra loro, sia per esempio $u' = u''$. In questa supposizione la determinazione dei valori delle t, z, y, v, ec. corrispondenti alla $u' = u''$ porta necessariamente una variazione. Poichè per l' uguaglianza supposta fra le u', u'' dallo stesso valore u' dipendono egualmente i due t', t'', questi t', t'' dovranno entrambi essere radici di amendue le Equazioni (M), e però i primi membri di esse dovranno entrambi essere divisibili per un trinomio $t^2 + V'1\,t + V'2 = (t - t')(t - t'')$, in cui a cagione di t', e di t'' funzioni della u', i coefficienti $V'1$, $V'2$ saranno essi pure due funzioni della stessa u'. Ciò dunque essendo, nel cercare, come di sopra il massimo comun divisore fra i primi membri delle (M), proseguo l' operazione soltanto fino ad un divisore, nel quale la t ascende al 2.° grado, e questo uguagliato allo zero, altro non sarà che la

(R) $$t^2 + V1\,t + V2 = 0,$$

e ci darà quindi i due valori t', t'', mentre si ponga u' in luogo della u, e poscia si risolva l' ottenuta Equazione (R).

Dalla determinazione delle t', t'' passiamo a quella delle z', z'': questi valori della z o cercansi dipendentemente dalla sola u', oppure dipendentemente dalla u', e dai valori insieme corrispondenti della t. Nel primo di questi due casi, vedremo come precedentemente, che operando, come si è fatto riguardo alla t, ci verrà un' Equazione $z^2 + V1z + V2 = 0$, nella quale $V1$, $V2$ sono funzioni della u, e dalla cui soluzione, posto u' in vece di u, otterremo i cercati valori z', z''. Nel caso secondo poi, mentre si ha $u' = u''$, o ci risulta ancora $t' = t''$, o nò: se nò, questi valori z', z'' vedesi facilmente che si otterranno nel modo istesso del (n.° prec.); che se abbiamo $t' = t''$; allora cercando il massimo comun divisore fra i primi due membri delle (O) (n.° 40), ed estendendo il calcolo fino ad un risultato, in cui la z ascenda al grado 2.°, otterremo un' Equazione

$$z^2 + T1z + T2 = 0,$$

i coefficienti $T1$, $T2$ della quale saranno funzioni di amendue le t, u, e le radici diverranno le z', z'', mentre in luogo delle t, u vengano sostituiti i valori t', u'.

Avvertasi, che cercando i valori della z dalla $z^2 + V1z + V2 = 0$, gli otterremo bensì, ma non sapremo poi conoscere, quale tra essi sia quello che corrisponde a t', e quale il corrispondente a t'', e quale per conseguenza sia z', quale z''.

Con egual raziocinio, e in egual modo troveremo potersi determinare i valori y', y'' della y, i valori v', v'' della v corrispondenti ad $u' = u''$, e così in progresso.

42. Sia in terzo luogo $u' = u'' = u'''$. Applicandosi a questo caso gli stessi discorsi del (n.° prec.) vedremo, che i tre valori t', t'', t''' corrispondenti al solo u' dovendosi unire necessariamente in una sola Equazione di 3.° grado

(S) $$t^3 + V1t^2 + V2t + V3 = 0,$$

il primo membro di questa verrà determinato col proseguire la ricerca del massimo comun divisore fra i primi membri delle (M) sino ad un risultato, in cui 3 sia l' esponente della t. Relativamente poi alle z', z'', z''', alle y', y'', y''', ec. vedremo potersi avere la loro determinazione in maniere somiglianti alle accennate nel (n.° prec.).

Che se i valori della u tra loro uguali sono quattro, cinque, ec., i rispettivi quattro, cinque, ec. valori della t si uniranno in Equazioni di 4.°, di 5.°, ec. grado. La determinazione dei quattro, cinque ec. valori corrispondenti delle z, y, v, ec. si avrà come precedentemente.

43. Supponghiamo, che, essendo nella (D) l' esponente n numero pari, i valori della u siano tutti uguali fra loro a due a due. In questa ipotesi determinata come nel (n.° 41) l'Equazione (R), colloco successivamente nei coefficienti $V1$, $V2$ in vece della u i valori $u' = u''$, $u''' = u^{iv}$, $u^{v} = u^{vi}$, ec., e avremo così dalla stessa (R) a due a due tutti gli n valori della t. In egual modo se, essendo n multiplo del 3, le radici della (D) sono fra loro uguali a tre a tre; collocando

do successivamente nei coefficienti della (S) determinata come nel (n.° 42) i valori diversi della u in vece della u medesima; da essa ci risulteranno tutti gli n valori della t insieme congiunti a tre a tre. Lo stesso si dice, e si pratica negli altri casi a questi somiglianti. Che se finalmente i valori della u sono tutti uguali fra loro, i valori della t si uniranno tutti in una sola Equazione necessariamente di grado n, e questa si determinerà nella solita maniera. Per determinare poi i valori delle z, y, v, ec. nelle presenti ipotesi, le operazioni necessarie a farsi si deducono facilmente da quanto si è detto nei (n. 40, e seg.).

44. 1.° Supponghiamo presentemente, che nel (1.° n.° 40) una delle P, Q, R, S, ec. Y, per esempio la P diventi zero per la sola sostituzione di u' in vece di u. Scomparsa in questa ipotesi la prima delle Equazioni (L), resteranno le altre $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$ ec. $Y = 0$ in numero di $\mu - 1$ con le $\mu - 1$ incognite t, z, y, v, ec. Dunque con eliminare da esse le $\mu - 2$ quantità z, y, v, ec., combinandole in una qualunque maniera, non giungendo infine che ad una sola Equazione $f(t)(u') = 0$, i valori della t ricavati da questa uniti agli altri z', y', v', ec. u' tutte faranno verificare le Equazioni (L), e però non saranno che tutti quei valori della t corrispondenti ad u', che vengono richiesti dal Problema (n.° 40). In questa supposizione adunque i valori della t domandati si otterranno dalla $f(t)(u') = 0$ senza la ricerca d' un massimo comun divisore.

2.° Cercando in seguito i valori della z; o si vogliono questi dipendentemente dalla sola u', o si vogliono dipendentemente dalla u', e insieme dai rispettivi valori della t: nel primo di questi casi otterremo i valori della z come si sono trovati nel (prec. 1.°) quei della t, eliminando cioè dalle $\mu - 1$ Equazioni $Q = 0$, $R = 0$, $S = 0$, ec. $Y = 0$ le incognite t, y, v, ec., e trovando l' Equazion finale $f(z)(u') = 0$: nel caso secondo poi osservo, se per la sostituzione nelle Q, R, S, ec. Y dei valori della t determinati, ti, alcuna di queste quantità diventa zero, o nò; se nò, otterremo i valori della z, operando sulle $\mu - 1$ Equazioni, come è stato indicato nei (n.° 40, e seg.): che se una di queste Q, R, S, ec. Y, per esempio la Q svanisce alla sostituzione del valore t'; allora sulle $\mu - 2$ Equazioni $R = 0$, $S = 0$, ec. $Y = 0$, che restano, opero come nel (prec. 1.°), eliminando le $\mu - 3$ quantità y, v, ec., e l' Equazione finale $f(z)(t')(u') = 0$ ci darà tutti i valori della z corrispondenti alle u', t'.

Lo stesso deve eseguirsi nella ricerca dei corrispondenti valori della y, della v, ec.

45. Supponghasi in terzo luogo, che alla sostituzione della u' due delle P, Q, R, S, ec. Y, per esempio le due P, Q scompariscano, se è possibile, tostamente. In questo caso resteranno le $\mu - 2$ Equazioni $R = 0$, $S = 0$, ec. $Y = 0$ con le $\mu - 1$ incognite t, z, y, v, ec.; facendo adunque la precedente eliminazione, giungeremo ad una Equazion finale, in cui esisteranno due delle incognite accennate. Sia $f(z)(t)(u') = 0$ una tale Equazione; per la sua natura d' indeterminata una delle t, z resterà necessariamente arbitraria; tale pertanto supposto essere la t, troveremo primamente dalla $f(z)(t)(u') = 0$ il valore della z, e in seguito troveremo come nel (n.° prec.) il valore delle altre y, v, ec. espressi per la t medesima, e per quantità note. Chiamati z', y', v', ec. somiglianti valori, sostituiscansi nella (C), ed il risultato

$$\text{(XIII.)} \qquad x^{\mu} + tx^{\mu-1} + z'x^{\mu-2} + y'x^{\mu-3} + v'x^{\mu-4} + \text{ec.} + u'$$

dovrà essere un divisore esatto del primo membro della (A): ora ciò è impossibile; poichè se il primo membro della (A) fosse divisibile esattamente per (XIII); allora potendo l' indeterminata t ricevere infiniti differenti valori, esso primo membro avrebbe infiniti divisori esatti diversi, il che a cagione di m numero finito è impossibile. Dunque sarà ancora impossibile, che due delle P, Q, R, S, ec. Y divengano zero per la sola supposizione di $u = u'$. Lo stesso molto più si dimostra, se per la ipotesi di $u = u'$ si volesse, che tre, quattro ec. delle accennate P, Q, R, S, ec. Y scomparissero.

46. Abbia luogo il caso primo del (2.° n.° 40), e si verifichi immediatamente una, o più delle Equazioni (L) per la sostituzione delle u', t' in vece delle u, t. Se delle indicate (L) non se ne verifica che una sola; allora essendo di numero $\mu - 1$ le Equazioni, e di numero $\mu - 2$ le incognite, che rimangono, otterremo i valori delle z, y, v, ec. operando come (n. 40, ec. 43): se fra le P, Q, R, S, ec. Y quelle, che diventano zero, sono due, avremo gli indicati valori delle z, y, v, ec., operando siccome nel (n.° 44). La supposizione poi, che sia maggiore di due il numero delle P, Q, R, S, ec. Y, che svaniscono alla sola supposizione di $t = t'$, e di $u = u'$ si dimostrerà assurda col fare lo stesso raziocinio del (n.° prec.).

Le conseguenze medesime, e le medesime operazioni si applicano egualmente alle altre incognite z, y, v, ec.

47. Date siano le due Equazioni

(XIV) $x^6 - 4x^5 - 2x^4 + 18x^3 - 8x^2 - 18x + 9 = 0$,

(XV) $x^6 - 2x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x - 2x + 1 = 0$,

e vogliasi la lor soluzione.

Riguardo in primo luogo alla (XIV), operando come è stato indicato nei (n. 36, 38), troveremo, che fatto $x' \; x'' \; x''' = u$, essa è riducibile ad un' Equazione di 2.° grado $u^2 - bu + 9 = 0$, le cui radici u', u'' sono amendue $= 3$. Ciò essendo, divido il primo membro della (XIV) per $x^3 + tx^2 + zx + u$, ossia, poichè la u non ha che il valor 3, per $x^3 + tx^2 + zx + 3$. Dovendo la divisione risultare esatta, uguaglio allo zero i coefficienti delle x^2, x, x^0 nell' avanzo corrispondenti ai coefficienti P, Q, Y del (n.° 40), e avremo

$$z^2 - (3t^2 + 8t - 2)z + (t^4 + 4t^3 - 2t^2 - 12t + 4) = 0,$$

$$\text{(XVI.)} \quad (2t + 4)z^2 - (t^3 + 4t^2 - 2t - 12)z + (3t^2 + 12t + 12) = 0.$$

$$(6t + 12)z - (3t^3 + 12t^2 - 6t - 36) = 0.$$

Mediante la prima e la terza di queste Equazioni elimino la z, faccio l' eliminazione medesima, combinando le Equazioni seconda e terza, avuti i risultati

$$t^6+12t^5+44t^4+32t^3-124t^2-240t-112=0,$$

$$t^4+8t^3+24t^2+32t+16=0,$$

trovo fra i loro primi membri il massimo comun divisore, e uguagliato questo allo zero, ci verrà per t l' Equazione $t^2+4t+4=0$. Ora quì pure entrambe le radici t', t'' hanno il valore medesimo -2, e questo sostituito nelle precedenti tre Equazioni ci rende zero i primi membri delle seconde due, indipendentemente dalla z; dunque per quanto abbiam detto nei (num. 44, 46), avrò immediatamente i valori corrispondenti della z, col porre -2 in luogo della t nella prima delle (XVI), e da ciò venendoci $z^2+6z+4=0$, e però $z'=-3+\sqrt{5}$, $z''=-3-\sqrt{5}$, otterremo i sei valori della x nella (XIV), sciogliendo le due Equazioni $x^3-2x^2-(3-\sqrt{5})x+3=0$, $x^3-2x^2-(3+\sqrt{5})x+3=0$.

Invece della z vogliasi dalle precedenti (XVI) eliminare la t: combinando perciò fra loro le ultime due Equazioni, veggo, che mentre voglio col loro mezzo togliere la t, mi svanisce ancora la z. Ora che significa ciò? ciò mostra, che la verità di tali due Equazioni non dipende punto dalla z, e dipende soltanto dalla t: ma, se questo succede, sappiamo non poter accadere, che mentre la t abbia un tale valore, che per esso divenga zero ciascuno dei coefficienti delle potenze z^0, z^1, z^2, ec. Dunque, chiamato t' l' accennato valore della t, dovendo cadauno di simili coefficienti essere divisibile esattamente per $t-t'$, potrò trovare assai facilmente questo t', determinando fra due dei coefficienti accennati il massimo comun divisore, ed uguagliando questo allo zero. Esso t' è chiaro, che sarà il valore della t richiesto, ed è chiaro, che mentre vien questo determinato, vengono a determinarsi eziandio tutti gli altri valori della t', che corrispondono ad u'. Quello stesso, che abbiam detto nell' esposto esempio, vedesi che si dice egualmente in generale, e però che quando ha luogo l' accennato accidente, allora la determinazione della incognita rispettiva, nel nostro esempio della t, riesce molto più semplice.

L' altra Equazione (XV) altro non è che una delle così dette Equazioni reciproche, in cui per conseguenza abbiamo $x' x'' = x''' x^{iv} = x^{v} x^{vi} = 1$. Dunque, posto $x' x'' = u$, essa sarà riducibile ad un' Equazione in u di 3.° grado, nella quale ciascuna delle radici u', u'', u''' sarà $= 1$; ora questo valore 1 è già determinato; dunque non abbisognando di cercare la ridotta in u, divido immediatamente il primo membro della (XV) per $x^2 + tx + u$, o più semplicemente per $x^2 + tx + 1$, determino il massimo comun divisore tra le due quantità $t^5 + 2t^4 - t^3 - 2t^2 + 5$, $t^4 + 2t^3 - 5t$, le quali altro non sono che i coefficienti delle x^1, x^0 nel residuo, e fatto uguale allo zero il divisor, che si ottiene, l' Equazione $t^3 + 2t^2 - 5 = 0$ ci darà i tre valori t', t'', t''' corrispondenti ad $u' = u'' = u''' = 1$, e la soluzione delle $x^2 + t'x + 1 = 0$, $x^2 + t''x + 1 = 0$, $x^2 + t''x + 1 = 0$ ci darà le radici della (XV).

L'operazione praticata presentemente rapporto alla (XV) è chiaro che può tenersi egualmente per l' abbassamento di una data Equazione reciproca semplice qualunque.

48. Il metodo, che abbiamo stabilito per la determinazione dei coefficienti t, z, ec. dipendentemente dai valori della u (n. 40, e seg.) potrà servirci a risolvere il Problema importantissimo del (n.° 142. Teor. delle Equaz.) in altra maniera diversa da quella che ci propone l' immortale Lagrange, e che abbiamo colà esposta.

Data difatti la funzione $u = f(x')\ (x'')\ (x''')\ \ldots$ volendosi dipendentemente dai valori di questa i rispettivi valori di un' altra funzione qualunque $t = \varphi(x')(x')(x''')\ldots$, suppongo il trinomio

(T) $$Z^2 + tZ + u,$$

eseguisco nelle u, t tutte le possibili permutazioni fra le x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$, chiamo u', t'; u'', t''; u''', t'''; ec. $u^{(p)}, t^{(p)}$ tutti i risultati che ne vengono fra loro corrispondenti, li sostituisco nel trinomio (T), moltiplico insieme le quantità $Z^2+t'Z+u'$, $Z^2+t''Z+u''$, $Z^2+t'''Z+u'''$, ec. $Z^2+t^{(p)}Z+u^{(p)}$, e uguagliato allo zero il prodotto, onde mi venga l'Equazione

(V) $$Z^{2p}+aZ^{2p-1}+bZ^{2p-2}+cZ^{2p-3}+\text{ec.}=0,$$

colloco nei coefficienti a, b, c, ec. in luogo delle u', t', u'', t'', ec. i rispettivi valori in x', x'', x''', ec. Ciò fatto, è manifesto che questi coefficienti a, b, c, ec. divengono tante funzioni della forma $f(x', x'', x''', \ldots\ldots x^{(m)})$, e che però sono determinabili razionalmente con i coefficienti A, B, C, ec. della data (A): eseguita pertanto una simile determinazione, sieguo ad operare come nei (n. 39, e seg.), e quindi diviso per (T) il primo membro della (V), ed avuto l' avanzo $Pz+Y$, in cui $P=f(t)(u)$, $Y=f'(t)(u)$; sostituisco in luogo della u il valore u', osservo se in una delle quantità $f(t)(u')$, $f'(t)(u')$ tutti i coefficienti delle t^0, t^1, t^2 ec. vanno per questo a divenire zero, o nò: se sì, l' altra, che rimane, fatta $=0$ pel (1.° n.° 44) ci darà tutti i valori della t corrispondenti ad u'; se nò, cerco fra le $f(t)(u)$, $f'(t)(u)$ il massimo comun divisore, considerando incognita la t, e come nei (cit. n.ⁱ) avrò infine la Equazione $t=F(u)$, oppur l' altra $t^2+V1t+V2=0$, oppure la terza $t^3+V1t^2+V2t+V3=0$, ec., secondo che il valore della u, che si prende in considerazione, è disuguale dagli altri tutti, oppure ne uguaglia un solo, o ne uguaglia due, ec. Mediante poi l' Equazione in u già determinata potremo come nei (n.ⁱ 39, 40) eliminare dai coefficienti $F(u)$, $V1$, $V2$, $V3$, ec. tutte le potenze della u di grado $> p-1$, e ciò fatto, la $t=F(u)$ si convertirà nella (N), gli altri coefficienti $V1$, $V2$, $V3$, ec. acquisteranno delle forme a questa somiglianti.

Queste ultime Equazioni, nei coefficienti delle quali mancano le potenze della u di grado $> p-1$, come ancor le al-

altre $t = \mathrm{F}(u)$, $t^2 + \mathrm{V}1t + \mathrm{V}2 = 0$, $t^3 + \mathrm{V}1t^2 + \mathrm{V}2t + \mathrm{V}3 = 0$, ec. quelle saranno, che sciolgono il proposto Problema del (n.° 142. Teor. delle Equaz.).

Abbiamo esposta la soluzione presente dell' accennato Problema, sì perchè se ne è data l'opportunità, e sì perchè ci è sembrata piuttosto semplice principalmente nel caso, in cui due, tre, ec. dei valori della u sono uguali fra loro. Se nel trinomio (T) la t ci esprima la funzione data, e la u la richiesta, troveremo, che il calcolo riescirà più semplice, poichè nelle $f(t)(u)$, $f'(t)(u)$ la u ascende ad un grado inferiore al grado, a cui ascende la t.

49. La nostra Equazion di rapporto $\mathrm{T}' = h$ (n.° 26) abbia la forma indicata nel (IV. Caso 2.° n.° 29) dalla (F), e trascriviamo quivi le Equazioni colà supposte, cioè le

$$
\text{(XVII)} \quad
\begin{aligned}
&x^{\beta} + g x^{\beta-1} + \text{ec.} + l = 0,\\
&l^{\pi} + p l^{\pi-1} + \text{ec.} + q = 0,\\
&q^{\nu} + t q^{\nu-1} + \text{ec.} + u = 0,\\
&u^{n} + a u^{n-1} + b u^{n-2} + \text{ec.} = 0.
\end{aligned}
$$

Suppongasi ora risolta l' ultima di queste Equazioni (XVII), Equazione, la quale pel (III. 2.° n.° 29) sappiamo dover essere razionale, e dipendentemente dai valori u', u'', u''', ec. $u^{(n)}$ suppongansi trovati i valori corrispondenti dei coefficienti t, ec., si collochino essi nella Equazione penultima, e avuti gli n risultati

$$q^{\nu} + t' q^{\nu-1} + \text{ec.} + u' = 0,\ q^{\nu} + t'' q^{\nu-1} + \text{ec.} + u'' = 0,$$

$$\text{(XVIII)}\ q^{\nu} + t''' q^{\nu-1} + \text{ec.} + u''' = 0, \text{ec.}, q^{\nu} + t^{(n)} q^{\nu-1} + \text{ec.} + u^{(n)} = 0,$$

moltiplichiamo tutti questi insieme; è chiaro, che ci verrà un' Equazione

$$\text{(V)} \qquad q^{n\nu} + \mathrm{T} q^{n\nu-1} + \text{ec.} + \mathrm{V} = 0.$$

i coefficienti della quale saranno determinabili razionalmente dai coefficienti della (A). Dai valori q', q'', q''', ec. $q^{(n\nu)}$

supponghiamo dedotti i valori rispettivi dei coefficienti p, ec., e fatte le opportune sostituzioni, si moltiplichino fra loro gli $n\nu$ risultati

$$\begin{array}{l}\quad l^{\pi}+p'l^{\pi-1}+\text{ ec. }+q'=0,\ l^{\pi}+p''l^{\pi-1}+\text{ ec. }+q''=0\\ \text{(XIX) } l^{\pi}+p'''l^{\pi-1}+\text{ec.}+q'''=0,\text{ ec. } l^{\pi}+p^{(n\nu)}l^{\pi-1}+\text{ec.}+q^{(n\nu)}=0,\end{array}$$

onde si abbia l' Equazione

$$\text{(Y)}\qquad l^{n\nu\pi}+\mathrm{P}\,l^{n\nu\pi-1}+\text{ ec. }+\mathrm{Q}=0:$$

ancora i coefficienti di questa saranno funzioni commensurabili dei coefficienti della (A) . Ricavati finalmente dai l', l'', l''', ec. $l^{(n\nu\pi)}$ i valori corrispondenti delle quantità g, ec., fatta la solita sostituzione nella prima delle Equazioni (XVII) , e moltiplicate insieme le $n\nu\pi$ Equazioni, che se ne ottengono,

$$\begin{array}{l}\quad x^{\beta}+g'x^{\beta-1}+\text{ ec. }+l'=0,\ x^{\beta}+g''x^{\beta-1}+\text{ ec. }+l''=0,\\ \text{(XX) } x^{\beta}+g'''x^{\beta-1}+\text{ec.}+l'''=0,\text{ ec. } x^{\beta}+g^{(n\nu\pi)}x^{\beta-1}+\text{ec.}+l^{(n\nu\pi)}=0,\end{array}$$

ci verrà in fine un' Equazione

$$\text{(Z)}\qquad x^{n\nu\pi\beta}+\mathrm{G}\,x^{n\nu\pi\beta-1}+\text{ ec. }+\mathrm{L}=0,$$

i coefficienti della quale saranno funzioni anch' essi razionali dei coefficienti della (A) .

Ciò presupposto , riflettasi, che pel (VI. caso 2.° n.° 29) tanto nella (F), quanto nelle funzioni $f(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\mu)})$, $f(x')(x'')\ldots(x^{(\alpha)})$ esposte nel (IV. caso 2.° n.° 29) niuna delle radici, che entrano in una delle funzioni componenti , possono entrare nelle altre. Dunque tutte le radici delle Equazioni (XX) essendo fra loro diverse , l' Equazione (Z) non sarà , che la (A) medesima , e quindi avremo il suo esponente $n\nu\pi\beta=m$. In conseguenza di ciò dovendo la (A) essere abbassabile ad un' Equazione (Y) , in cui l' esponente $n\nu\pi=\dfrac{m}{\beta}$, e la radice $l=x'\,x''\,x'''\ldots x^{(\beta)}$; troverò questa ridotta , operando come è stato insegnato nel (n.° 39) . Poichè la (Y) è riducibile anch' essa ad un' Equazione (V) avente l' esponente $n\nu$, e la radice $q=l'\,l''\,l'''\ldots l^{(\pi)}$, col me-

metodo medesimo (n.° 39) determinerò dalla (Y) questa (V) . Finalmente essendo ancora la (V) abbassabile alla $u^n + au^{n-1} + bu^{n-2} + \text{ec.} = 0$, determinerò da essa (V) quest' ultima Equazione operando nella solita maniera (n.° 39) . Ciò fatto dalle radici u', u'', u''', ec. $u^{(n)}$ determinate, sciogliendo la $u^n + au^{n-1} + bu^{n-2} + \text{ec.} = 0$, determino col mezzo del (n.° 40., e seg.) le Equazioni (XVIII) ; quindi coi valori q', q'', q''', ec. $q^{(n\nu)}$ ricavati dalle (XVIII) trovo le Equazioni (XIX) ; e finalmente mediante i valori l', l'', l''', ec. $l^{(n\nu\pi)}$ radici della (XIX) determinate le Equazioni (XX) , la soluzione di queste ultime ci darà tutte le radici della (A) .

Dunque, se tale è il rapporto particolare fra le radici della (A), che siano determinabili delle Equazioni ulteriori di grado sempre inferiore, dalla soluzion delle quali si possa in seguito ottenere più facilmente il valore delle radici x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$; anche in allora il nostro metodo servirà pienamente alla soluzion del Problema, non avendosi perciò che a replicare sulle Equazioni successive le medesime operazioni .

50. Onde poter dire pienamente soddisfatto ai tre importantissimi quesiti, che ci siam proposti a principio, non più rimane, a noi sembra, da considerarsi che un solo caso, e tale è il seguente. Supposte u', u'', u''', ec. $u^{(n)}$, $u^{(n+1)}$, $u^{(n+2)}$, ec. $u^{(p)}$ le radici tutte della (G) , e tra queste esprimendosi dalle prime n le radici della (D), può succedere, che a cagione dei valori particolari delle x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$ alcune delle u', u'', u''', ec. $u^{(n)}$ siano non solamente uguali tra loro, ma che siano uguali ancora ad alcune delle altre $u^{(n+1)}$, $u^{(n+2)}$, ec. $u^{(p)}$, come se per esempio si voglia $u' = u'' = u^{(n+1)} = u^{(n+2)} = u^{(n+3)}$. Per questo accidente esigonsi delle riflessioni ulteriori ; ma essendo questa Memoria riescita già troppo prolissa, serberemo simili riflessioni ad un'

un'altra, nella quale, se per la Dio mercè il potremo, procureremo di aggiungere qualche metodo particolare, onde agevolare maggiormente i calcoli nelle pratiche applicazioni.

Frattanto se mai si voglia che accada l' uguaglianza ora indicata tra i valori della u inservienti alla dimostrazione del Teorema del (n.° 23); se si voglia cioè che là pure alcune delle u', u'', u''', ec. $u^{(n)}$ radici della Equazione (V) non solo si uguaglino fra loro, ma uguaglino ancora alcuni fra gli altri valori $u^{(n+1)}, u^{(n+2)}$, ec. $u^{(p}$ della $u = \pm x' x'' x''' \ldots x^{(\alpha)}$, come se per esempio si voglia $u' = u^{(n+1)} = u^{(n+2)}$; quindi sarà necessario osservare per tutta esattezza, se questo caso altera punto la verità del Teorema indicato. Se sia $u' = u^{(n+1)} = u^{(n+2)}$ allora allo stesso valore u' corrispondendo egualmente i tre valori t', $t^{(n+1)}$, $t^{(n+2)}$ della t, i tre z', $z^{(n+1)}$, $z^{n+2)}$, della z, ec., non potremo più dire immediatamente, che i coefficienti P, ec. della (VII) siano funzioni razionali dei coefficienti g, ec. della (V). In tal caso però dovremo cercare il valore di questi coefficienti P, ec. non già dagli altri g, ec., ma dalla (B), o dalla $T' = h$, che da essa deriva (n.° 20): essendo solamente di numero n i valori della (B) uguali a K, ed essendo i coefficienti P, ec. tante funzioni delle x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$, che conservano sempre lo stesso valore a tutte quelle permutazioni, per cui hanno luogo le uguaglianze (IV), ne segue, che saranno essi tutti determinabili razionalmente dalla K; ora questa K è quantità commensurabile (n.° 23); dunque eziandio nell' ipotesi ora fatta le quantità P, ec., e quindi l' Equazione (VII) risulteran razionali. Dunque ancora in questo caso sarà vero il Teorema del (n.° 23), e però ec.

51. Da quanto poi abbiamo detto finora concluderemo, che, posta (A) Equazione semplice.

1.° Essa non è mai riducibile opportunamente alla propria soluzione, ogniqualvolta il suo esponente m sia numero primo (n.° 34).

2.° Allorche la (A) è abbassabile, potrà sempre determinarsi un' Equazione, l' esponente della quale sia un divisore esatto dell' esponente m della data, e supposto n l' esponente della ridotta, ed $m = \mu n$, la soluzione di due Equazioni, la prima di grado n, la seconda di grado μ ci daranno il valore di tutte le radici x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$ (n.° 35).

3.° Nella ipotesi, che m abbia più di due divisori, come nel caso di $m = n \nu \pi \beta$, potrà darsi a cagione di particolare rapporto fra le x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$, che si ottenga il valore di queste radici con la soluzione di tante Equazioni, i gradi delle quali vengano espressi da tutti i fattori n, ν, π, β dell' esponente m (n.° 49).

4.° Se le ultime Equazioni ottenute nella riduzione risultano tutte di grado < 5, allora potremo attualmente avere la soluzione della data, ma se qualcuna delle Equazioni accennate diventa di grado non < 5, ed è insieme irreducibile a grado inferiore; allora diremo, che la data (A) quantunque abbassata di grado, pure è incapace di soluzione. Ciò non pertanto, anche nel caso che le ridotte divengano di grado > 4, non dobbiamo già credere, che l' eseguito abbassamento sia inutile; essendo le ridotte di grado minore del grado della data, potremo più agevolmente applicare ad esse i metodi di approssimazione.

5.° Il metodo da Noi stabilito nei (n. 35, 36, 39, ec.) ci dimostra non solamente quali Equazioni sono abbassabili opportunamente alla propria soluzione, e quali nò; ma ci somministra ancora nelle prime tra queste l' abbassamento attuale: dai medesimi (n. 35, 36, 39, ec.) apprendiamo in seguito, come dalle radici della ridotta possiamo ricavare le radici della proposta.

6.° Succeda, o nò tra i valori della u il caso del (n.° 50), la ridotta (D) è sempre determinabile col nostro metodo, mentre la data (A) sia capace di abbassamento opportuno alla propria soluzione.

RIFLESSIONI

INTORNO ALLA RETTIFICAZIONE, ED ALLA QUADRATURA DEL CIRCOLO

Di Paolo Ruffini

Ricevute il dì 21. *Ottobre* 1801.

1. Dato nella (Fig. 1.) il Circolo ADBEA, il cui raggio AC $= a$, supponghiamo, che esso raggio prolungato all' infinito verso S si aggiri perpetuamente intorno al punto C con moto uniforme, e supponghiamo, che nel tempo medesimo un punto partendo da C scorra esso pure con moto uniforme lungo la retta CS, e sia la velocità di questo punto alla velocità della CS $:: m : n$. In questa ipotesi è chiaro, che il nostro punto descriverà una spirale CNFG dotata d' infiniti giri, di cui facilmente determinerem l'Equazione; imperciocchè, supposto, che la CS venga in una posizione qualunque CT, e che contemporaneamente il nostro punto arrivi in N, fatto CN $= u$, l' arco ADM $= z$, avremo per le condizioni del Problema $u : z :: m : n$, e perciò sarà $nu = mz$.

Da questa Equazione vedesi, che il valore del raggio vettore u dipende totalmente dal valore dell' arco z, cosicchè, se quest' ultimo è determinabile algebraicamente per un' Equazione finita, resterà per la stessa Equazione determinato algebraicamente anche il raggio u. Ora quest' ultima determinazione è impossibile, poichè tagliandosi la spirale dalla CT in infiniti punti, infiniti sono i valori della u, e però l' Equazione in u deve necessariamente risultare di grado infinito. Dunque sarà ancora impossibile, che il valore dell' arco z sia determinabile algebraicamente col mezzo di un' Equazione finita.

Questo è il discorso, con cui l' immortale Newton nei (Princ. Mat. Lib. 1.° Sez. 6.ª Lem. 28.) dimostra impossibibile la Quadratura, e la Rettificazione del Circolo. Il Ch. Saurin con altro raziocinio dimostra il Teorema medesimo (Comment. di Parigi An. 1720) nella maniera seguente.

2. Sia nella (fig. 2.) il Quadrante Circolare AQMB, e sia AGND una Curva tale, che le sue ordinate, PN, ec. eguaglino gli archi circolari da essi tagliati, AQM, ec. Ciò presupposto, e condotta un' ordinata qualunque PN, venga richiesto di tagliare dall' arco AQM una porzione, la quale stia all' arco medesimo in una ragion data; nella ragione, per esempio, di PF : PN. Per soddisfare a questa domanda innalzo da F una perpendicolare FG, dal punto d' incontro G conduco la GH perpendicolare ad AC, e l' arco AQ da questa determinato sarà appunto tale, che AQ : AQM : : PF : PN; come è facile a vedersi, essendo AQM = PN, AQ = HG, ed HG = PF. Ora se AQ si voglia parte aliquota di AQM, l' Equazione, per cui si determina la corda che corrisponde ad essa AQ, sale a tanto grado, quante volte questa parte aliquota si contiene in AQM. Dunque se la ragione di PF : PN sia indefinita, e quindi AQ debba essere una parte indefinita di AQM, quella Equazione non potrà essere finita, e per conseguenza anche la AGND, pel cui mezzo possiam sempre con una medesima costruzione geometrica tagliare l' arco AQ, qualunque siasi il rapporto di PF : PN, non potrà essere razionale; ma se la ragione dell' Arco AQM con le coordinate AP, PM potesse esser razionale, diverrebbe razionale anche il rapporto di PN : AP, e però razionale l' Equazion della Curva AGND. Dunque non potendo ciò essere, non potrà essere neppure, che il valore dell' arco AQM possa ottenersi in generale con un' Equazione finita, e però ec.

I Matematici movendo delle difficoltà contro delle esposte dimostrazioni, ànno concluso non essere per anche risolta pienamente la celebre quistione, se sia possibile, o no la Rettificazione, e quindi la Quadratura del Circolo, ed esiggono tutt' ora raziocinii più rigorosi (d' Alembert Opusc. ma-

Matemat. Tom. 4.° pag. 66.). Io, presa ad esaminare una tal quistione, credo di poter asserire con tutta sicurezza la proposizione medesima, che è stata asserita da Newton, e da Saurin; se mai ingannato mi fossi lo decidano i Dotti da quanto sono per dire.

3. Le difficoltà promosse contro le accennate dimostrazioni sono le seguenti

1.° E' vero, che l' Equazione algebraica, per cui nella (fig. 1.) si determina il valore del raggio vettore u (n.° 1.), e l' altra, per cui nella (fig. 2.) si domanda il valore della corda AQ, mentre la ragione di PF : PN è indefinita, deggiono risultare di grado infinito; ma tali Equazioni non potrebbero essere riducibili ad altre di grado finito, dalla soluzion delle quali si potesse poi ritrarre uno dei valori di u nel primo caso, od il valore della corda AQ nel secondo? Difatti dovendosi il valore della u (fig. 1.) ricavare dalla natura del Circolo, e però dall' Equazione $y^2 = a^2 - x^2$, chiamata x l' ascissa, y l' ordinata, ed avendo in questa Equazione le variabili due valori, uno positivo, e l' altro negativo, vedesi facilmente, che ancora la u dovrà corrispondentemente ottenere due valori, uno positivo, l' altro negativo; dunque nel tempo, che si cercano i valori delle rette CN, CG, ec. caderemo ad ottenere ancora quei delle Cn, Cg, ec.; ma queste seconde rette uguagliano le prime prese negativamente, onde, supposto CN $= u'$, CG $= u''$, si ha C$n = -u'$, C$g = -u''$, ec. dunque l' Equazione in u, venendo ad avere le sue radici tutte uguali fra loro a due a due e di segno contrario, col supporsi $u^2 = t$ si ridurrà ad un' Equazione in t di un grado metà minore. Ora come l' esposto rapporto fra le u', $-u'$, u'', $-u''$, ec. riduce la nostra Equazione ad un' altra di un grado metà minore; non potrebbe egli esistere qualche altro rapporto capace di ridurre l' Equazione stessa ad un' altra di grado finito?

Aumentasi la difficoltà, allorchè riflettiamo al Problema della trisezione dell'Arco Circolare. Venga difatti nel Circolo della (fig. 3.) proposto a trisecarsi l' arco BM. La determinazione di quest' arco dipende dalla posizione data del diametro AB, e da quella del coseno CP, e del seno PM; ma da questo diametro, e da questo seno, e coseno dipendono ancora egualmente gli archi tutti BDAEB + BM, 2BDAEB + BM, ec., i quali sono di numero infinito; dunque allorquando cerchiamo di trisecare l' arco BM, dovendo cadere a trisecare eziandio gli altri BDAEB + BM, 2BDAEB + BM ec., dovremo cadere in un' Equazione di grado infinito; ma l' Equazione, la quale coi metodi noti si ottiene per la soluzione di questo Problema, è del terzo grado: Dunque l' Equazione, che ne dovrebbe risultare di grado infinito sarà per se riducibile ad un' altra di grado finito, a quella cioè, che realmente si ottiene del grado terzo. Ora ciò, che succede nel Problema della trisezione dell' arco non potrebbe succedere nel Problema della Rettificazione?

2.° Le esposte dimostrazioni, mentre siano esatte, provano bensì essere impossibile l' esistenza di una formola generale, pel cui mezzo possa ottenersi algebraicamente il valore di un' arco circolare qualunque, ma non provano che non possa esistere un qualche arco determinato, e quindi la Circonferenza istessa, di cui si possa ottenere il valore in termini algebraici. Quantunque non possiamo quadrare una qualunque porzione di area circolare, pure possiam trovare la Quadratura di quelle porzioni determinate, che conosciamo col nome di Lunette d'Ippocrate (Encicloped. Art. Quadrat. du Cercl. Le Seur. et Jacquier Comment. in Newton n.° 365.).

3.° Il. Ch. d'Alembert ne'suoi Opuscoli Matematici (Tom. 4.° pag. 66) „ Confesso, dice, che fatico ad arrendermi „ senza scrupoli ai ragionamenti di Newton per provare l' impossibilità della Quadratura, ossia della Rettificazione indefinita del Circolo, quando veggo, che simili raziocinii „ applicati alla Rettificazione della Cicloide condurrebbero ad „ una conclusion falsa. Non v'ha, sembrami, altra differenza

,, se non che il Circolo è una curva rientrante, e la Cicloide
,, non lo è; ma non vedo nel raziocinio di Newton cosa,
,, che possa cangiarsi per questa differenza, tanto più
,, perchè la Cicloide, se non è una curva rientrante, come
,, il Circolo, è almeno una curva continua, i rami della
,, quale non sono punto separati; in una parola il raziocinio
,, di Newton mi sembra poggiare unicamente sopra questo
,, supposto, che nel Circolo corrisponde alla medesima ascissa
,, un' infinità di archi, dal che egli conclude, che l' Equazione
,, fra l' arco, e l' ascissa deve essere di un grado
,, infinito, ed in conseguenza l' arco irrettificabile algebraicamente:
,, ora applicando questo raziocinio alla Cicloide,
,, ne concluderò, che l' Equazione fra l' ascissa, e l' arco
,, corrispondente deve essere di un grado infinito, e per
,, conseguenza l' arco irrettificabile algebraicamente, il che
,, è falso.

4.° ,, Sia, soggiunge d'Alembert (loc. cit.), $dy = Xdx$
,, l' Equazione dell' Arco *Circolare* corrispondente all' ascissa
,, x. L' integrale è $y = a + SXdx$, essendo a una costante,
,, ma variabile per ciascheduna rivoluzione, e che
,, può avere un' infinità di valori; e perchè dunque non potrebbe
,, dirsi, che l'Equazione $y = a + SXdx$ non possa
,, essere una quantità algebraica? Questo è ciò, che accade
,, infatti nella Cicloide, in cui l' Equazione, che
,, esprime l' Arco y, è $y = A \pm 2\sqrt{2ax}$, essendo A una
,, costante, che varia a misura, che si prolunga la Cicloide
,, da una parte, e dall' altra. Sembrami, che queste riflessioni
,, meritino l' attenzione dei Geometri, e possano impegnarli
,, a ricercare una dimostrazione più rigorosa dell'
,, impossibilità della Quadratura, e della Rettificazione indefinita
,, del Circolo. ,,

4. Ciò posto, venghiamo al nostro Problema, e dato in un Circolo il raggio, e date due coordinate qualunque, vogliasi determinare se possa rettificarsi, cioè se possa venire espresso algebraicamente per le quantità proposte il valore dell' arco.

Sia dato il Circolo ADBEA (fig. 3.), e chiamato a il raggio, x l' ascissa, y l' ordinata corrispondente, $y^2 = a^2 - x^2$ la sua Equazione, vogliasi determinare, se col mezzo delle coordinate CP, PM, e del raggio a possa venire espresso algebraicamente il valore dell' arco BM.

I dati alla soluzione del nostro Problema vedesi essere solamente 1.° il Circolo proposto, e le sue proprietà; 2.° quelle linee, o quantità, che stabiliscono l' arco da rettificarsi; nel nostro caso è dato il circolo ADBEA con le sue proprietà dipendenti tutte dall' Equazione $y^2 = a^2 - x^2$, data è la posizione del diametro AB, e dato è il coseno CP, per cui mediante l' Equazione resta determinato anche il seno PM. Ora supposto l' arco BM $= \alpha$, l' altro ADM $= \beta$, ed il quadrante AD $= \pi$, io dico, che questi dati portano tutti necessariamente alla simultanea determinazione di tutti gli archi qui sottoposti

$$\begin{array}{ll}
 & \alpha,\ 4\pi + \alpha,\ 8\pi + \alpha,\ 12\pi + \alpha,\ \text{ec.}\ 4c\pi + \alpha, \\
 & \quad -4\pi + \alpha,\ -8\pi + \alpha,\ -12\pi + \alpha,\ \text{ec.}\ -4c\pi + \alpha, \\
 & \beta,\ 4\pi + \beta,\ 8\pi + \beta,\ 12\pi + \beta,\ \text{ec.}\ 4d\pi + \beta, \\
 & \quad -4\pi + \beta,\ -8\pi + \beta,\ -12\pi + \beta,\ \text{ec.}\ -4d\pi + \beta, \\
\text{(A)} & -\alpha,\ -(4\pi + \alpha),\ -(8\pi + \alpha),\ -(12\pi + \alpha),\ \text{ec.}\ -(4c\pi + \alpha); \\
 & \quad 4\pi - \alpha,\ 8\pi - \alpha,\ 12\pi - \alpha,\ \text{ec.}\ 4c\pi - \alpha, \\
 & -\beta\ -(4\pi + \beta),\ -(8\pi + \beta),\ -(12\pi + \beta),\ \text{ec.},\ -(4d\pi + \beta) \\
 & \quad 4\pi - \beta,\ 8\pi - \beta,\ 12\pi - \beta,\ \text{ec.}\ 4d\pi - \beta.
\end{array}$$

Imperciocchè in quanto agli archi delle prime quattro righe, essi cominciando tutti in ugual modo nel punto B, oppure A, e terminando nel punto M, dipendono tutti in maniera eguale dalla posizione del diametro AB, e dalle rette CP, PM. In quanto poi agli archi delle ultime quattro file dovendo la soluzione del nostro Problema dedursi dall' Equazione $y^2 = a^2 - x^2$, ed essendo in questa le due ordinate PM $= y$, PN $= -y$ insiem collegate in guisa, che la considerazione dell' una non può andare disgiunta da quella dell' altra; ne viene, che mentre cerco gli archi, i quali ànno i loro estremi ne' punti B, oppure A, ed M, cadrò an-

ancora a dover determinare gli archi, che ànno i loro estremi ne' punti B, oppure A, ed N. Ora tutti questi archi (A) son di numero infinito; dunque nel cercare il valore dell' arco α espresso algebraicamente per le quantità a, CP, PM, dovendo cadere nella determinazione insieme di tutti gli archi (A), verremo a cadere in un' Equazione di grado infinito.

5. Chiamiamo α', α'', α''', α^{iv}, ec. $\alpha^{(c)}$ le radici, che in (A) occupano la prima fila; chiamiamo β', β'', β''', β^{iv}, ec. $\beta^{(d)}$ le radici della fila terza, e γ', γ'', γ''', γ^{iv}, ec. $\gamma^{(e)}$, δ', δ'', δ''', δ^{iv}, ec. $\delta^{(f)}$ quelle rispettivamente delle file seconda, e quarta. Chiamato ζ l' arco di cui si cerca il valore, sia

$$(B) \qquad \zeta^m + A\zeta^{m-1} + B\zeta^{m-2} + \text{ec.} = 0$$

l' Equazione di grado infinito (n.° prec.), che supponghiamo essersi ricavata, e poichè la soluzione di questa (B) considerata così in generale è impossibile, cerchiamo in primo luogo di determinare di quale abbassamento è dessa capace. Se questa (B) è riducibile ad altra Equazione di grado inferiore, ciò non potrà succedere, che in conseguenza di qualche rapporto particolare fra le radici (A) (Ruffini Capo 15.° Teor. delle Equazioni); i dati del Problema, anzichè poter servire all' abbassamento della (B) servono al contrario a rendere essa (B) del grado infinito m (n.° prec.); e se questa Equazione si considera in generale non potrà mai abbassarsi opportunamente di grado, poichè dal (Capo 13.° Teor. delle Equaz.) sappiamo, che nessuna Equazione algebraica generale di grado superiore al 4.° può ridursi ad altra di grado inferiore atta a produrre la propria soluzione. Considerando pertanto questi rapporti particolari, veggo in primo luogo, che in (A) le radici delle quattro seconde file altro non sono, che le radici delle prime quattro prese negativamente. Dunque essendo nella (B) le radici tutte a due a due fra loro uguali, e di segno contrario, se supporremo

$\zeta^2 = u$, vedesi, che per questo rapporto ci risulterà una trasformata

$$(C) \qquad u^{\mu} + F u^{\mu-1} + G u^{\mu-2} + \text{ec.} = 0,$$

in cui sarà $\mu = \frac{m}{2}$, e le radici saranno le quantità:

$$\alpha'^2,\ \alpha''^2,\ \alpha'''^2,\ \alpha^{iv\,2},\ \text{ec.},\ \alpha^{(c)^2}$$

$$\gamma'^2,\ \gamma''^2,\ \gamma'''^2,\ \gamma^{iv\,2},\ \text{ec.},\ \gamma^{(e)^2}$$

$$\beta'^2,\ \beta''^2,\ \beta'''^2,\ \beta^{iv\,2},\ \text{ec.},\ \beta^{(d)^2}$$

$$\delta'^2,\ \delta''^2,\ \delta'''^2,\ \delta^{iv\,2},\ \text{ec.},\ \delta^{(f)^2}$$

ossia, posto $\alpha^2 = \varepsilon$, $\beta^2 = \zeta$, $\gamma^2 = \eta$, $\delta^2 = \nu$, le quantità

$$\varepsilon',\ \varepsilon'',\ \varepsilon''',\ \varepsilon^{iv},\ \text{ec.},\ \varepsilon^{(c)}$$

$$\eta',\ \eta'',\ \eta''',\ \eta^{iv},\ \text{ec.},\ \eta^{(e)}$$

$$(D) \qquad \zeta,\ \zeta',\ \zeta'',\ \zeta^{iv},\ \text{ec.},\ \zeta^{(d)}$$

$$\nu',\ \nu'',\ \nu''',\ \nu^{iv},\ \text{ec.},\ \nu^{(f)}.$$

6. Questa riduzione della Equazione (B) alla (C) vedesi non difficilmente dipendere dal doppio valore della y nella $y^2 = a^2 - x^2$. Lo stesso rapporto, il quale esiste tra $+y$, e $-y$ esiste puranche tra gli archi delle prime quattro file, ed i corrispondenti delle seconde, e questo rapporto quello si è, che ha prodotto l' abbassamento accennato. Ma l' Equazione (C) potrà essa ridursi ulteriormente, ed opportunamente a grado inferiore? Non già: Gli archi delle quattro prime righe dipendendo tutti egualmente dalla stessa x, e dalla stessa y, devono necessariamente collegarsi insieme in una sola Equazione per modo, che non avvi ragione, per cui uno di tali archi possa determinarsi piuttosto, che l'altro, e quindi tra essi non può aver luogo alcuna particolar relazione, per cui possa opportunamente abbassarsi l' Equazione, dalla quale dipendono. Ora ciò, che abbiamo detto degli archi delle quattro prime file in (A) riportasi pienamente alle

quantità (D). Dunque l' Equazione (C), della quale queste (D) sono radici, sarà un' Equazione incapace di una riduzione opportuna alla determinazione dell' arco richiesto.

Se qualcuno mai esitasse su questo discorso metafisico, per convincerlo pienamente della verità della nostra asserzione prendiamo a considerare più particolarmente le relazioni tutte, che esister ponno tra le (D), e giusta il (Capo 15.° Teor. delle Equaz.) veggiam, se per esse possa dalla (C) ottenersi il valore di una delle sue radici, per es., della ε', e se per conseguenza possa ricavarsi il valore dell'arco α'.

7. Supposto, che la Lettera K ci esprima la ragione data del Quadrante π all' arco α', cosicchè si abbia $\pi : \alpha' = K$, e $\pi = K\alpha'$, vedesi, che sostituendo nelle prime quattro righe in (A) invece di β' il suo valore $2\pi - \alpha'$ (n. 4. 5.), ed in vece di π il valore $K\alpha'$ otterremo

$\alpha'' = (4K + 1)\alpha'$, $\alpha''' = (8K + 1)\alpha'$, $\alpha^{iv} = (12K + 1)\alpha'$, ec.;

$$\alpha^{(c)} = (4(c - 1)K + 1)\alpha'$$

(E) $\beta' = (2K - 1)\alpha'$, $\beta'' = (6K - 1)\alpha'$, $\beta''' = (10K - 1)\alpha'$,
$\beta^{iv} = (14K - 1)\alpha'$, ec., $\beta^{(d)} = ((4d - 2)K - 1)\alpha'$,
$\gamma = -(4K - 1)\alpha'$, $\gamma'' = -(8K - 1)\alpha'$, $\gamma''' = -(12K - 1)\alpha'$,
$\gamma^{iv} = -(16K - 1)\alpha'$, ec., $\gamma^{(e)} = -(4eK - 1)\alpha'$,
$\delta' = -(2K + 1)\alpha'$, $\delta'' = -(6K + 1)\alpha'$, $\delta''' = -(10K + 1)\alpha'$,
$\delta^{iv} = -(14K + 1)\alpha'$, ec., $\delta^{(f)} = -((4f - 2)K + 1)\alpha'$,

e per conseguenza $\varepsilon'' = (4K + 1)^2\varepsilon'$, $\varepsilon''' = (8K + 1)^2\varepsilon'$,
$\varepsilon^{iv} =)\,12K + 1)^2\varepsilon'$, ec., $\varepsilon^{(c)} = (4(c - 1)K - 1)^2\varepsilon'$,
(F) $\zeta = (2K - 1)^2\varepsilon'$, $\zeta'' = (6K - 1)^2\varepsilon'$, $\zeta''' = (10K - 1)^2\varepsilon'$,
ec., $\zeta^{(d)} = ((4d - 2)K - 1)^2\varepsilon'$,
$\eta' =)\,4K - 1)^2\varepsilon'$, $\eta'' = (8K - 1)^2\varepsilon'$, $\eta''' = (12K - 1)^2\varepsilon'$, ec.,
$\eta^{(e)} = (4eK - 1)^2\varepsilon'$,
$\nu' = (2K + 1)^2\varepsilon'$, $\nu'' = (6K + 1)^2\varepsilon'$, $\nu''' =$

(10

$(10K + 1)^2 \varepsilon'$, cc., $\nu^{(f)} = ((4f - 2)K + 1)^2 \varepsilon'$. Queste Equazioni (F), io dico, che tutti ci esprimono i rapporti particolari fra le radici della (C), e qualunque altro ne esista non, potrà che essere identico, e dipendente dai rapporti medesimi; imperciocchè se si volesse altrimenti, che per es., fra le tre radici ε'', ζ''', ν' esistesse una relazione diversa, e indipendente dalle precedenti, espressa questa con l' Equazione $f(\varepsilon'')(\zeta'')(\nu') = h$, e sostituite in luogo delle ε', ζ', ν' le quantità α''^2, β'''^2, δ'^2 (n.° prec.) avremo pei (n.^{i} 5, 6) le quattro Equazioni

$\alpha'' = 4\pi + \alpha'$, $\beta''' = 10\pi - \alpha'$, $\delta' = 2\pi - \alpha'$, $f(\alpha''^2)(\beta'''^2)(\delta'^2) = h$

con le cinque quantità α', α'', β''', δ', π. Elimino da queste le α'', β''', δ', ci verrà un' Equazione finale tra le sole α', π, che rappresenterò per $f(\alpha')(\pi) = 0$; ora tale Equazione non facendo, che esprimere la relazione dell' arco α al quadrante π deve essere identica con la supposta $\pi : \alpha' = K$. Dunque per mezzo dell' Equazione $f(\alpha')(\pi) = 0$ non ottenendosi alcun nuovo rapporto tra gli archi $= \alpha''$, β''', δ', neppur l' altra $(f\varepsilon'')(\zeta''')(\nu') = h$ ci darà nuovo rapporto tra le quantità ε'', ζ'', ν', e per conseguenza tutte le relazioni particolari tra le radici della (C) verranno rappresentate, e dipenderanno dalle Equazioni (F).

8. Prendasi la prima delle Equazioni (F), e ridotta questa alla $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = (4K + 1)^2$, vogliasi dipendentemente da tal relazione particolare fra le due radici ε', ε'' pel (Capo 15.° Teor. delle Equaz.) determinare se può ottenersi il valore della ε. Chiamate perciò u', u'', u''', $u^{\prime v}$, ec. le radici della (C), ossia le quantità (D) prendo la funzione $\frac{u''}{u'}$, e fatte in essa tutte le possibili permutazioni fra le u', u'', u''' $u^{\prime v}$, ec. suppongo $\frac{u''}{u'} = t'$, $\frac{u'''}{u'} = t''$, $\frac{u^{\prime v}}{u''} = t'''$, $\frac{u^{v}}{u'} = t^{\prime v}$, ec., e giusta il (n.° 105. Teor. delle Equaz.) determino dalla (C) l' Equazione. (G)

(G) $\quad t^n + pt^{n-1} + qt^{n-2} + \text{ec.} = 0,$

di cui le t', t'', t''', t^{IV} ec. siano radici. Ciò posto suppongo $\varepsilon' = u'$, $\varepsilon'' = u''$, onde abbiasi $t' = (4\text{K}+1)^2$, e dipendentemente da $\frac{u''}{u'} = t'$ pei (n. 144, 147 Teor. delle Equaz.) cerco il valore di $u' = \varepsilon'$. Se nella (G) non esistesse, che una sola radice $= t'$, allora sappiamo dal citato (n.° 144. Teor. delle Equaz.), che il valore di $u' = \varepsilon'$ potrebbe determinarsi dalla t' mediante un' Equazione di primo grado, ed essendo $t' = (4\text{K}+1)^2$ quantità cognita, verremmo a conoscere anche il valore della ε'. Ma si verifica egli, che la (G) abbia una sola radice $= t'$?

Supponghiamo, che nelle Equazioni

(H) $\alpha^{(c)} = (4(c-1)\text{K}+1)\alpha'$; $\beta^{(d)} = ((4d-2)\text{K}-1)\alpha'$, $\gamma^{(e)} = -(4e\text{K}-1)\alpha'$, $\delta^{(f)} = -((4f-2)\text{K}+1)\alpha'$

esposte in (E) facciasi successivamente

$c = 4\text{K}+3,\ 8\text{K}+4,\ 12\text{K}+5$, ec., $4r\text{K}+r+2$
$d = 2\text{K},\ 6\text{K}+1,\ 10\text{K}+2$, ec., $(4r-2)\text{K}+r-1$
$e = 4\text{K},\ 8\text{K}+1,\ 12\text{K}+2$, ec., $4r\text{K}+r-1$
$f = 2\text{K}+2,\ 6\text{K}+3,\ 10\text{K}+4$, ec., $(4r-2)\text{K}+r+1$

esprimendo r un numero intero positivo qualunque. Col sostituire questi valori nelle Equazioni (H) vedremo dopo breve calcolo risultarci in corrispondenza

$\alpha^{(4\text{K}+3)} = (4\text{K}+1)(4\text{K}+1)\alpha'$, $\alpha^{(8\text{K}+4)} = (4\text{K}+1)(8\text{K}+1)\alpha'$, $\alpha^{(12\text{K}+5)} = (4\text{K}+1)(12\text{K}+1)\alpha'$, ec., $\alpha^{(r(4\text{K}+1)+2)} = (4\text{K}+1)(4r\text{K}+1)\alpha'$,

$\beta^{(2\text{K})} = (4\text{K}+1)(2\text{K}-1)\alpha'$, $\beta^{(6\text{K}+1)} = (4\text{K}+1)(6\text{K}-1)\alpha'$, $\beta^{(10\text{K}+2)} = (4\text{K}+1)(10\text{K}-1)\alpha'$, ec. $\beta^{((4r-2)\text{K}+r-1)} = (4\text{K}+1)((4r-2)\text{K}-1)\alpha'$,

$\gamma^{4\text{K}} = -(4\text{K}+1)(4\text{K}-1)\alpha'$, $\gamma^{(8\text{K}+1)} = -(4\text{K}+1)(8\text{K}-1)\alpha'$,

$\gamma^{(12K+2)} = -(4K+1)(12K-1)\alpha'$, ec.

$\gamma^{(4rK+r-1)} = -(4K+1)(4rK-1)\alpha'$,

$\delta^{(2K+2)} = -(4K+1)(2K+1)\alpha'$, $\delta^{(6K+3)} = -(4K+1)(6K+1)\alpha'$,

$\delta^{(10K+4)} = -(4K+1)(10K+1)\alpha'$, ec.,

$\delta^{((4r-2)K+r+1)} = -(4K+1)((4r-2)K+1)\alpha'$.

Dunque sostituendo quivi i valori delle Equazioni (E) otterremo:

$\alpha^{(4K+3)} = (4K+1)\alpha''$, $\alpha^{(8K+4)} = (4K+1)\alpha'''$, $\alpha^{(12K+5)} = (4K+1)\alpha^{\prime v}$, ec., $\alpha^{(r(4K+1)+2)} = (4K+1)\alpha^{(r+1)}$.

$\beta^{(2K)} = (4K+1)\beta'$, $\beta^{(6K+1)} = (4K+1)\beta''$, $\beta^{(10K+2)} = (4K+1)\beta'''$, ec., $\beta^{((4r-2)K+r-1)} = (4K+1)\beta^{(r)}$.

$\gamma^{(4K)} = (4K+1)\gamma'$, $\gamma^{(8K+1)} = (4K+1)\gamma''$, $\gamma^{(12K+2)} = (4K+1)\gamma'''$, ec. $\gamma^{(4rK+r-1)} = (4K+1)\gamma^{(r)}$.

$\delta^{(2K+2)} = (4K+1)\delta'$, $\delta^{(6K+3)} = (4K+1)\delta''$, $\delta^{(10K+4)} = (4K+1)\delta'''$, ec. $\delta^{((4r-2)K+r+1)} = (4K+1)\delta^{(r)}$

e per conseguenza sarà

$\varepsilon^{(4K+3)} = (4K+1)^2\varepsilon''$, $\varepsilon^{(8K+4)} = (4K+1)^2\varepsilon'''$, $\varepsilon^{(12K+5)} = (4K+1)^2\varepsilon^{\prime v}$, ec., $\varepsilon^{(r(4K+1)+2} = (4K+1)^2\varepsilon^{(r+1)}$.

$\zeta^{(2K)} = (4K+1)^2\zeta$; $\zeta^{(6K+1)} = (4K+1)^2\zeta''$, $\zeta^{(10K+2)} = (4K+1)^2\zeta'''$, ec., $\zeta^{((4r-2)K+r-1)} = (4K+1)^2\zeta^{(r)}$.

$\eta^{4K} = (4K+1)^2\eta'$, $\eta^{(8K+1)} = (4K+1)^2\eta''$, $\eta^{(10K+4)} = (4K+1)^2\eta'''$, ec., $\eta^{(4rK+r-1)} = (4K+1)^2\eta^{(r)}$

$\nu^{(2K+2)} = (4K+1)^2\nu'$, $\nu^{(6K+3)} = (4K+1)^2\nu''$, $\nu^{(10K+4)} = (4K+1)^2\nu'''$, ec., $\nu^{((4r-2)K+r+1)} = (4K+1)^2\nu^{(r)}$,

e finalmente

$$\frac{\varepsilon^{(4K+3)}}{\varepsilon''} = (4K+1)^2, \quad \frac{\varepsilon^{(8K+4)}}{\varepsilon'''} = (4K+1)^2,$$

$\varepsilon^{(12K+5)}$

$$\frac{\varepsilon^{(12K+5)}}{\varepsilon^{IV}} = (4K+1)^2,\ \text{ec.},\ \frac{\varepsilon^{(r(4K+1)+2)}}{\varepsilon^{(r+1)}} = (4K+1)^2.$$

$$\frac{\zeta^{(2K)}}{\zeta'} = (4K+1)^2,\ \frac{\zeta^{(6K+1)}}{\zeta'} = (4K+1)^2,$$

$$\text{(I)}.\quad \frac{\zeta^{(10K+2)}}{\zeta'''} = (4K+1)^2;\ \text{ec.},\ \frac{\zeta^{((4r-2)K+r-1)}}{\zeta^{(r)}} = (4K+1)^2$$

$$\frac{\eta^{(4K)}}{\eta'} = (4K+1)^2,\ \frac{\eta^{(8K+1)}}{\eta''} = (4K+1)^2,$$

$$\frac{\eta^{(12K+2)}}{\eta'''} = (4K+1)^2,\ \text{ec.},\ \frac{\eta^{(4rK+r-1)}}{\eta^{(r)}} = (4K+1)^2$$

$$\frac{\nu^{(2K+2)}}{\nu'} = (4K+1)^2,\ \frac{\nu^{(6K+3)}}{\nu''} = (4K+1)^2,$$

$$\frac{\nu^{(10K+4)}}{\nu'''} = (4K+1)^2,\ \text{ec.},\ \frac{\nu^{((4r-2)K+r+1)}}{\nu^{(r)}} = (4K+1)^2.$$

Le u', u'', u''' ec. altro non essendo, che le quantità (D), ne segue che le (I) saranno tante radici della Equazione (G); ma ciascuna di queste (I) è $= (4K+1)^2$. Dunque essendo esse di numero infinito la (G) avrà infinite radici $= t'$.

Venendo ora a determinare, se possa dipendentemente dalla $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = (4K+1)^2$ ottenersi il valore della ε' osservo in primo luogo, che nel passare dall' una all'altra delle (I), per esempio dalla $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$ alla $\frac{\varepsilon^{(4K+3)}}{\varepsilon'}$, da questa $\frac{\varepsilon^{(4K+3)}}{\varepsilon''}$ alla $\frac{\varepsilon^{(8K+4)}}{\varepsilon'''}$ ec., il valore $(4K+1)^2$ si mantiene sempre lo stesso, non per la forma della funzione, ma per un rapporto particolare fra le radici. Dunque chiamate t', t'', t''', t^{v} ec. simili quantità tutte uguali fra loro, mentre voglio dipendentemente dalla $t' = (4K+1)^2$ il valore della ε'' (pei num. 16. 20

Memoria antecedente), formerò con tutte le accennate t', t'', t''', t^{iv} ec. la Equazione $t' + t'' + t''' + t^{iv} +$ ec $= h$, essendo h uguale alla quantità $(4K + 1)^2$ replicata tante volte quante sono le accennate (I), e chiamata essa $T' = h$ cercherò da questa Equazione il valore della ε'. Ora nella $t' + t'' + t''' + t^{iv}$ ec. $= h$, trasportiamo la t' nel secondo membro, ci verrà $t'' + t''' + t^{iv} + t^{v} +$ ec. $= h - t'$; ma essendo le (I) di numero infinito la h è quantità necessariamente infinita. Dunque scomparendo rapporto ad essa la t' ci resterà $t'' + t''' + t^{iv} + t^{v} +$ ec. $= h$, Equazione che esprimerò per $T'' = h$. Trasportando in seguito nell' altro membro la t'', dalla $T'' = h$, si ottiene $t''' + t^{iv} + t^{v} + t^{vi} = h - t''$: dunque svanendo rapporto alla h, eziandio la t'' otterremo l' Equazione $t''' + t^{iv} + t^{v} + t^{vi} +$ ec. $= h$ che chiamerò $T''' = h$. Nella stessa maniera col portare nel secondo membro delle successive Equazioni le quantità t''', t^{iv}, ec. troveremo risultarci le Equazioni $T^{iv} = t^{iv} + t^{v} + t^{vi} +$ ec. $= h$, $T^{v} = t^{v} + t^{vi} + t^{vii} + t^{viii} = h$, ec. Ora somiglianti Equazioni son di numero infinito, e nella medesima guisa con cui si determina la ε' dalla T' deve evidentemente venir determinata la ε'' dalla T'', la ε''' dalla T''', ec. Dunque essendo tutte queste funzioni T', T'', T''' ec. uguali ad h, nel cercare dalla T', e però dalla h il valore ε' dovrò necessariamente ottenere nel tempo medesimo eziandio i valori ε'', ε''', ε^{v} ec., e per conseguenza unendosi tutte queste ε', ε'', ε''', ε^{iv} ec. in una sola Equazione di tanto grado, quanto sono le T', T'', T''' ec., caderemo nuovamente in un' Equazione necessariamente di grado infinito. Dunque per la determinazione della ε' dipendentemente dalla $T' = h$, e però dalla $t' = (4K + 1)^2$ dovendosi di necessità cadere in un' Equazione di grado infinito, ne segue che tale determinazione sarà impossibile.

Cerchiamo presentemente dalla $T' = h$ il valore di una funzione delle u', u'', u''', ec. che chiamerò y, e dipendentemente da questa y cerchiamo in seguito il valore della ε.

Qualunque siasi questa y od essa à i suoi valori dipendenti dalla T' di numero infinito, o no. Se gli ha di numero infinito, allora potrebbe bensì questa funzione esser tale, che dipendentemente da uno dei suoi valori y' potrebbe determinarsi mediante un' Equazione finita il valore della ε', ma nel voler determinare dalla T' l' Equazione in y, e quindi il supposto valore y' cadremo, come precedentemente, nella necessità di dover risolvere un' Equazione di grado infinito. Che se si vuole che la y abbia i suoi valori dipendenti dalla T' di un numero finito: allora potremo bensì ottenere questi mediante un' Equazione di grado finito; ma cercando poi da essi il valore della ε caderem nuovamente in un' Equazione d' infinito grado. Imperciocchè se ciò non fosse, risultando allora la ε una funzione degli accennati valori della y dotata di un numero finito di risultati, e questi valori della y essendo funzioni delle t', t'', t''' ec., ed essendo per la ipotesi di un numero finito; ancora la ε sarebbe una funzione delle t', t'', t''', ec. avente un numero finito di valori, e quindi sarebbe determinabile dalla $T' = h$ col mezzo di un' Equazione finita, il che è contro quanto abbiamo dimostrato precedentemente. Dunque il valore della ε non potrà determinarsi dipendentemente dalla $T' = h$ e però dalla $t' = (4K + 1)^2$, nè immediatamente, nè col soccorso di una nuova funzione y.

9. Passiamo alla seconda delle Equazioni (F), cioè alla $\varepsilon''' = (8K + 1)^2 \varepsilon'$, e cerchiamo il valore di ε' dipendentemente dal rapporto $\frac{\varepsilon'''}{\varepsilon'} = (8K + 1)^2$. Questa funzione $\frac{\varepsilon'''}{\varepsilon'}$ altro essa pure non è, che una radice della (G); supposto pertanto $u'' = \varepsilon'''$, ed $\frac{\varepsilon'''}{\varepsilon'} = \frac{u'''}{u'} = t2$ (n.° 8), veggiamo in primo luogo siccome nel (cit. n.° 8), quante volte la (G) contiene una simil radice. Supponghasi perciò, che nelle Equazioni (H) si faccia successivamente

$c =$

$c = 8K + 4,\ 16K + 5,\ 24K + 6$, ec., $8rK + r + 3$

$d = 4K - 1,\ 12K,\ 20K + 1$, ec., $(8r - 4)K + r - 2$

$e = 8K - 1,\ 16K,\ 24K + 1$, ec., $8rK + r - 2$

$f = 4K + 3,\ 12K + 4,\ 20K + 5$, ec., $(8r - 4)K + r + 2$

Sostituiscansi questi valori nelle (H), e proseguito il calcolo come nel (cit. n.° 8), vedremo quì pur risultarci

$$\frac{\varepsilon^{(8K+4)}}{\varepsilon''} = (8K+1)^2,\ \frac{\varepsilon^{(16K+5)}}{\varepsilon'''} = (8K+1)^2,$$

$$\frac{\varepsilon^{(24K+6)}}{\varepsilon^{iv}} = (8K+1)^2,\ \text{ec.},\ \frac{\varepsilon^{(r'8K+1)+3)}}{\varepsilon^{(r+1)}} = (8K+1)^2.$$

$$\frac{\zeta^{(4K-1)}}{\zeta''} = (8K+1)^2,\ \frac{\zeta^{(12K)}}{\zeta''} = (8K+1)^2,$$

$$\frac{\zeta^{(20K+1)}}{\zeta'''} = (8K+1)^2,\ \text{ec.},\ \frac{\zeta^{((8r-4)K+r-2)}}{\zeta^{(r)}} = (8K+1)^2.$$

$$\frac{\eta^{(8K-1)}}{\eta'} = (8K+1)^2,\ \frac{\eta^{(16K)}}{\eta''} = (8K+1)^2,$$

$$\frac{\eta^{(24K+1)}}{\eta'''} = (8K+1)^2,\ \text{ec.},\ \frac{\eta^{(8rK+r-2)}}{\eta^{(r)}} = (8K+1)^2.$$

$$\frac{\nu^{(4K+3)}}{\nu'} = (8K+1)^2,\ \frac{\nu^{(12K+4)}}{\nu''} = (8K+1)^2,$$

$$\frac{\nu^{(20K+5)}}{\nu'''} = (8K+1)^2,\ \text{ec.},\ \frac{\nu^{((8r-4)+rK-2)}}{\nu^{(r)}} = (8K+1)^2.$$

Dunque nella (G) esisteranno ancora infinite radici $= t2$, e per conseguenza, replicato lo stesso raziocinio del (cit. n.° 8) troveremo egualmente impossibile il determinare il valore della ε' dipendentemente dall' Equazione di rapporto $\frac{\varepsilon'''}{\varepsilon'} = (8K+1)^2$.

10.

10. Ciocchè abbiamo dimostrato presentemente (n. 8, 9) riguardo alle due Equazioni di rapporto $\varepsilon'' = (4K + 1)^2 \varepsilon'$, $\varepsilon''' = (8K + 1)^2 \varepsilon'$, troveremo nella maniera medesima verificarsi ancora di tutte le Equazioni (F).
Imperciocchè supposto successivamente nelle Equazioni (H)

$c = 12K + 5, 24K + 6$, ec., $12rK + r + 4$;
$c = 16K + 6, 32K + 7$, ec., $16rK + r + 5$, ec.;
$c = 4qK + q + 2, 8qK + q + 3$, ec., $4rqK + r + q + 1$.
$d = 6K - 2, 18K - 1$, ec., $(12r - 6)K + r - 3$;
$d = 8K - 3, 24K - 2$, ec., $(16r - 8)K + r - 4$, ec.;
$d = 2qK - q + 1, 6qK - q + 2$, ec. $(4rq - 2q)K - q + r$.
$e = 12K - 2, 24K - 1$, ec., $12rK + r - 3$;
$e = 16K - 3, 32K - 2$, ec., $16rK + r - 4$, ec.,
$e = 4qK - q + 1, 8qK - q + 2$, ec., $4rqK - q + r$.
$f = 6K + 4, 18K + 5$, ec., $(12r - 6)K + r + 3$;
$f = 8K + 5, 24K + 6$, ec., $(16r - 8)K + r + 4$, ec;
$f = 2qK + q + 1, 6qK + q + 2$, ec., $(4rq - 2q)K + q + r$.

Con la sostituzione e riduzione ne viene in corrispondenza

$$\frac{\varepsilon^{(12K+5)}}{\varepsilon''} = \frac{\varepsilon^{(24K+6)}}{\varepsilon'''} = \text{ec.} = \frac{\varepsilon^{(12rK+r+4)}}{\varepsilon^{(r+1)}} = (12K+1)^2;$$

$$\frac{\varepsilon^{(16K+6)}}{\varepsilon''} = \frac{\varepsilon^{(32K+7)}}{\varepsilon'''} = \text{ec.} = \frac{\varepsilon^{(16rK+r+5)}}{\varepsilon^{(r+2)}} = (16K+1)^2, \text{ ec.};$$

$$\frac{\varepsilon^{(4qK+q+2)}}{\varepsilon''} = \frac{\varepsilon^{(8qK+q+3)}}{\varepsilon'''} = \text{ec.} = \frac{\varepsilon^{(4rqK+r+q+1)}}{\varepsilon^{(r+1)}} = (4qK+1)^2;$$

$$\frac{\zeta^{(6K-2)}}{\zeta} = \frac{\zeta^{(18K-1)}}{\zeta''} = \text{ec.} = \frac{\zeta^{((12r-6)K+r-3)}}{\zeta^{(r)}} = (12K+1)^2;$$

$$\frac{\zeta^{(8K-3)}}{\zeta'} = \frac{\zeta^{(24K-2)}}{\zeta''} = \text{ec.} = \frac{\zeta^{((16r-8)K+r-4)}}{\zeta^{(r)}} = (16K+1)^2, \text{ ec.};$$

$$\frac{\zeta^{(2qK-q+1)}}{\zeta'} = \frac{\zeta^{(6qK-q+2)}}{\zeta''} = \text{ec.} = \frac{\zeta^{((4rq-2q)K-q+r)}}{\zeta^{(r)}} = 4qK+1)^2.$$

$\eta^{(12}$

$$\frac{\eta^{(12K-2)}}{\eta} = \frac{\eta^{(24K-1)}}{\eta''} = \text{ec.} = \frac{\eta^{(12rK+r-3)}}{\eta^{(r)}} = (12K+1)^2;$$

$$\frac{\eta^{(16K-3)}}{\eta'} = \frac{\eta^{(32K-2)}}{\eta''} = \text{ec.} = \frac{\eta^{(16rK+r-4)}}{\eta^{(r)}} = (16K+1)^2, \text{ ec};$$

$$\frac{\eta^{(4qK-q+1)}}{\eta'} = \frac{\eta^{(8qK-q+2)}}{\eta''} = \text{ec.} = \frac{\eta^{(4rqK-q+1)}}{\eta^{(r)}} = (4qK+1)^2.$$

$$\frac{\nu^{(6K+4)}}{\nu'} = \frac{\nu^{(18K+5)}}{\nu''} = \text{ec.} = \frac{\nu^{((12r-6)K+r+3)}}{\nu^{(r)}} = (12K+1)^2;$$

$$\frac{\nu^{(8K+5)}}{\nu'} = \frac{\nu^{(24K+6)}}{\nu''} = \text{ec.} = \frac{\nu^{((16r-8)K+r+4)}}{\nu^{(r)}} = (16K+1)^2, \text{ ec.};$$

$$\frac{\nu^{(2qK+q+1)}}{\nu'} = \frac{\nu^{(6qK+q+2)}}{\nu''} = \text{ec.} = \frac{\nu^{((4rq-2q)K+q+r)}}{\nu^{(r)}} = (4qK+1)^2.$$

Supposto in seguito

$c = (2r-1)K - r,\ (6r-3)K - r - 1,\ (10r-5)K - r - 2$, ec.,
$(4rq - 2r - 2q + 1)K - r - q + 1$;

$d = 2rK - r + 1,\ 6rK - r + 2,\ 10rK - r + 3$, ec.,
$(4rq - 2r)K - r + q$;

$e = 2r - 1)K - r + 1,\ (6r-3)K - r + 2,\ (10r-5)K - r + 3$, ec.,
$(4rq - 2r - 2q + 1)K - r + q$;

$f = 2rK - r,\ 6rK - r - 1,\ 10rK - r - 2$, ec.,
$(4rq - 2r)K - r - q + 1$;

corrispondentemente si ottiene

$$\frac{\varepsilon^{((2r-1)K-r)}}{\zeta^{(r)}}=(2K-1)^2,\ \frac{\varepsilon^{((6r-3)K-r-1)}}{\zeta^{(r)}}=(6K-1)^2,$$

$$\frac{\varepsilon^{((10r-5)K-r-2)}}{\zeta^{(r)}}=(10K-2)^2,\text{ec.},\ \frac{\varepsilon^{((4rq-2r-2q+1)K-r-q+1)}}{\zeta^{(r)}}=[(4q-2)K-1]^2,$$

$$\frac{\zeta^{(2rK-r+1)}}{\varepsilon^{(r+1)}}=(2K-1)^2,\ \frac{\zeta^{(6rK-r+2)}}{\varepsilon^{(r+1)}}=(6K-1)^2,$$

$$\frac{\zeta^{(10rK-r+3)}}{\varepsilon^{(r+1)}}=(10K-1)^2,\text{ec.},\ \frac{\zeta^{((4rq-2r)K-r+q)}}{\varepsilon^{(r+1)}}=[(4q-2)K-1]^2.$$

$$\frac{\eta^{((2r-1)K-r+1)}}{\nu^{(r)}}=(2K-1)^2,\ \frac{\eta^{((6r-3)K-r+2)}}{\nu^{(r)}}=(6K-1)^2,$$

$$\frac{\eta^{((10r-5)K-r+3)}}{\nu^{(r)}}=(10K-1)^2,\text{ec.},\ \frac{\eta^{((4rq-2q-2r+1)rK+q)}}{\nu^{(r)}}=[(4q-2)K-1]^2.$$

$$\frac{\nu^{(2rK-r)}}{\eta^{(r)}}=(2K-1)^2,\ \frac{\nu^{(6rK-r+1)}}{\eta^{(r)}}=(6K-1)^2,$$

$$\frac{\nu^{(10rK-r-2)}}{\eta^{(r)}}=(10K-1)^2,\text{ec.},\ \frac{\nu^{((4rq-2r)K-r-q+\ )}}{\eta^{(r)}}=[(4q-2)K-1]^2;$$

e da ciascuna di queste Equazioni, fatto successivamente $r=1, 2, 3,$ ec., ci risultano come precedentemente tante frazioni, le quali hanno per denominatori tutte le quantità (D), e le quali uguagliano i coefficienti tutti della ε' nella seconda riga della (F). Finalmente supposto

$c = 4rqK - r - q + 1$, $d = (4rq - 2q)K - r + q + 1$,

$e = 4rqK - r + q$, $f = (4rq - 2q)K - r - q + 1$,

$c = (4rq-2r-2q+1)K+r+q$, $d = (4rq-2r)K+r-q+1$,

$e = (4rq-2r-2q+1)K+r-q$, $f = (4rq-2r)K+r+q$, ci risultano in corrispondenza le formole

$$\frac{\varepsilon^{(4rqK-r-q+1)}}{\eta^{(r)}} = (4qK-1)^2,\ \frac{\zeta^{((4rq-2q)K-r+q+1)}}{\nu^{(r)}} = (4qK-1)^2,$$

$$\frac{\eta^{(4rqK-r+q)}}{\varepsilon^{(r+1)}} = (4qK-1)^2,\ \frac{\nu^{((4rq-2q)K-r-q+1)}}{\zeta^{(r)}} = (4qK-1)^2,$$

$$\frac{\varepsilon^{((4rq-2r-2q+1)K+r+q)}}{\nu^{(r)}} = [(4q-2)K+1]^2,\ \frac{\zeta^{((4rq-2r)K+r-q+1)}}{\eta^{(r)}} = [(4q-2)K+1]^2,$$

$$\frac{\eta^{((4rq-2r-2q+1)K+r-q)}}{\zeta^{(r)}} = [(4q-2)K+1)^2,\ \frac{\nu^{((4rq-2r)K+r+q)}}{\varepsilon^{(r+1)}} = [(4q-2)K+1]^2,$$

dalle quali col supporre successivamente $q = 1, 2, 3$, ec.; $r = 1, 2, 3$, ec., e combinando ciascun valore della q con ciascun valore della r, ricavansi, come nei casi precedenti, tante Equazioni, i secondi membri delle quali non sono, che tutti i coefficienti della ε' nelle righe terza, e quarta delle (F), e i membri primi sono tanti rotti, che hanno per denominatori tutte le quantità (D). Dunque nessuna delle Equazioni di rapporto (F) potrà servire a determinare il valore della ε'.

11. Ma non potrebbe ad una simile determinazione servire un qualche altro rapporto fra alcuna delle radici (D) diverso dai precedenti (F)? Esista questo nuovo rapporto, per es.°, fra le radici ε', ε'', ζ', η''', e venga espresso dall' Equazione $f(\varepsilon')(\varepsilon'')(\zeta')(\eta''') = h$. Questo quantunque appaja diverso dagli accennati (F), pure pel (n.° 7) dovrà essere dipendente dai medesimi, e dovrà perciò esser nato da una combinazione, qualunque essa siasi, fra le Equazioni

$\varepsilon'' = (4K+1)^2\varepsilon'$, $\zeta' = (2K-1)^2\varepsilon'$, $\eta''' = (12K-1)^2\varepsilon'$.

Ora pei (n. 7. 8. 9.) avendosi

$$\varepsilon^{(4K+3)} = (4K+1)^2\varepsilon'',\ \varepsilon^{(8K+4)} = (4K+1)^2\varepsilon''',\ \varepsilon^{(12K+5)} = (4K+1)^2\varepsilon^{iv},\ \text{ec.}$$

$$\zeta^{(2K)} = (2K-1)^2\varepsilon'',\ \zeta^{(4K-1)} = (2K-1)^2\varepsilon''',\ \zeta^{(6K-2)} = (2K-1)^2\varepsilon^{iv},\ \text{ec.}$$

$$\eta^{(12K+2)} = (12K-1)^2\varepsilon'',\ \eta^{(24K+1)} = (12K-1)\varepsilon''',\ \eta^{(36K)} = (12K-1)^2\varepsilon^{iv},\ \text{ec.}$$

è chiaro, che se la combinazione istessa, e le stesse operazioni, che abbiamo supposte praticate fra le Equazioni $\varepsilon'' = (4K+1)^2\varepsilon'$, $\zeta = (2K-1)^2\varepsilon'$, $\eta''' = (12K-1)^2\varepsilon'$, praticate si fossero fra le tre Equazioni, che nelle ultimamente ottenute formano la prima colonna, oppure fra le tre Equazioni della colonna seconda, o fra quelle della terza ec., è chiaro, dissi, che ci sarebbero risultate in corrispondenza le Equazioni

$$f(\varepsilon'')\,(\varepsilon^{(4K+3)})\,(\zeta^{(2K)})\,(\eta^{(12K+2)}) = h,$$

$$f(\;''')\,(\varepsilon^{(8K+4)})\,(\zeta^{(4K-1)})\,(\eta^{(24K+1)}) = h,$$

$$f(\varepsilon^{iv})\,(\varepsilon^{(12K+5)})\,(\zeta^{(6K-2)})\,(\eta^{(36K)}) = h, \text{ ec.},$$

le quali altro evidentemente non sono, che la $f(\varepsilon')\,(\varepsilon'')\,(\zeta)\,(\eta''') = h$, permutate avendosi le ε', ε'', ζ' η''' rispettivamente nelle ε'', $\varepsilon^{(4K+3)}$, $\zeta^{(2K)}$, $\eta^{(12K+2)}$, nelle ε''', $\varepsilon^{(8K+4)}$, $\zeta^{(4K+1)}$, $\eta^{(24K+1)}$; nelle ε^{iv}, $\varepsilon^{(12K+5)}$, $\zeta^{(6K-2)}$, $\eta^{(36K)}$, ec. Dunque se dalla $f(\varepsilon')(\varepsilon'')(\zeta')(\eta''') = h$ vorrò cercare il valore di ε', troverò siccome precedentemente, di dover cadere in un'Equazione, di cui saranno radici eziandio le ε'', ε''', ε^{iv}, ec., e però di grado infinito. Ciò che abbiam' ora dimostrato del rapporto supposto fra le ε', ε'', ζ', η''', dimostrandosi egualmente di un' altro rapporto qualunque fra un qualunque numero delle radici (D), ne segue che nessuno nè potrà esistere atto alla determinazione della nostra ε'.

12. Il primo membro della Equazione (C) non puo avere alcun fattore algebraico di grado finito.

Esista se è possibile un simile fattore e tale sia il primo membro della Equazione algebraica finita

$$\text{(K)} \qquad u^{\rho} + au^{\rho-1} + bu^{\rho-2} + \text{ec.} = 0.$$

di cui sia radice la ε'. Se esiste l'accennato divisore della (C), ciò non può essere che in conseguenza di qualche rapporto particolare fra quelle delle sue radici che sono radici ancora della (K). Ora in conseguenza di quanto abbiamo dimostrato, per niuno dei rapporti (F) nè per alcun altro che possa aver luogo fra le u', u'', u''' ec. può mai determinarsi un' Equazione di grado finito, la cui soluzione ci somministri il valore della ε'. Dunque non potrà neppur essere che il primo membro della supposta (K) sia fattore del primo membro della (C), poichè altrimenti la soluzione di questa Equazione (K) ci darebbe il valore ε'. Dunque ec.

Quindi segue che qualunque metodo si adoperi, cioè la via delle Equazioni, o quella delle serie, o il Calcolo infinitesimale, ec. non potrà mai trovarsi alcun' Equazione algebraica finita di cui ε' sia radice. Imperciocchè se ciò fosse possibile, il primo membro della (C) avrebbe evidentemente un fattore algebraico finito, contro quello che abbiamo dimostrato precedentemente.

13. Da quanto abbiamo detto, cominciando dal (n.° 7), sino al presente, concludiamo pertanto essere impossibile la determinazione della ε', tanto se si cerchi il suo valore dall' Equazione (C), o immediatamente, o mediatamente, tentando di abbassare essa (C), o di ridurla ad altra Equazione opportuna all' intento, quanto se si cerchi il valore medesimo con altro mezzo indipendente dalla stessa Equazione (C) (n.° 12). Ora abbiamo $\alpha'^2 = \varepsilon'$ (n.° 5). Dunque essendo impossibile la determinazione della quantità ε', sarà ancora impossibile quella dell' arco α', e per conseguenza sarà impossibile la rettificazione del Circolo.

A pieno compimento di questa dimostrazione, osserviamo, che se per esprimere il Circolo, e per istabilire l' arco dato BM (Fig. 3), invece delle CP, PM, prendiamo per coordinate altre due rette qualisivogliono, o se riferiamo questa Curva ad un fuoco, o la rappresentiamo in un' altra maniera diversa, osserviamo, dissi, che sempre verrà la medesima conclusione. Qualunque siasi questa maniera, essa dipenderà sempre pienamente dall' Equazione $y^2 = a^2 - x^2$, dipendendo da tale Equazione tutte le proprietà del Circolo, e per conseguenza l' arco $\alpha' = \mathrm{BM}$ non potendosi esprimere al-

algebraicamente per le quantità α, CP, PM, non potrà neppure venire espresso algebraicamente dalle quantità dipendenti dal nuovo metodo supposto.

14. La dimostrazione, che ingegnati ci siam d' assegnare, vedesi facilmente, che tutte esclude le obbiezioni, che ponnosi fare contro del nostro Teorema. Imperocchè in quanto alla prima delle obbiezioni esposte nel (n.° 3), allorchè abbiamo dimostrata impossibile la determinazione della quantità ε', abbiam dimostrato insieme non potere l' Equazione (C), e quindi la (B) ricevere abbassamento opportuno a determinare il valore dell' arco α'. In quanto all' obbiezione seconda del (n.° 3), osservisi, che la nostra dimostrazione si verifica qualunque valore determinato si attribuisca alla Lettera K (n. 6), e però avendosi $\alpha' = \frac{\pi}{K}$ si verifica rapporto ad un qualunque arco determinato, il quale abbia una determinata relazione con la intera circonferenza; se sia $K = 1$, risultando $\alpha' = \pi$, il precedente discorso ci dimostra impossibile la rettificazione del Quadrante. Potremo rispondere alle obbiezioni proposteci dal Ch. d' Alembert (3.°, 4.° n.° 3), nella maniera, che segue.

15. Supponghiamo, che $dz = Xdx$ ci esprima il Differenziale Mm dell' arco di una Curva qualunque BMD (Fig. 4.), e però che il suo Integrale, che supporrò essere $z = f(x)(C)$, essendo C la Costante da aggiungersi, rappresenti il valore dell' arco medesimo. Ciò posto, consideriamo in qual luogo terminerà l' arco, di cui vogliamo il valore, è chiaro, che finirà nel punto M, ove termina l' ordinata, e che questo punto viene determinato dal valore dell' ascissa AP, e dell' ordinata PM; ma da qual punto deve cominciare a computarsi l' arco medesimo? Ecco a che serve nella Integrazione la Costante C; le coordinate AP, PM danloci nella Curva soltanto la posizione del punto M non possono determinarci il principio dell' arco, che consideriamo; questo principio per la proprietà, che, stabilito

una volta si conserva sempre lo stesso, viene determinato dalla Costante. Se nella nostra curva vogliasi che l'arco cominci dal punto B già dato, abbassata l'ordinata BC, e supposto, che sia $AC = p$, e che quando $x = p$ sia $z = 0$, sostituisco questi valori nell'Equazione $z = f(x)(C)$, avremo $0 = f(p)(C)$, trovo quindi il valore della C, lo sostituisco nella $z = f(x)(C)$, e stabiliti così il principio B, e l'estremo M, avremo dall'Equazion risultata il valore dell'arco z. Dunque tanto la costante C, quanto le due coordinate AP, PM non fanno, che determinarci due punti, cioè le due estremità dell'arco, e il valore dell'arco dipenderà dall'Equazione $z = f(x)(C)$. Venghiamo ora al circolo (Fig. 3) di cui l'Equazione è $y^2 = a^2 - x^2$ (n.° 4), e supposto l'arco $BM = z$, facciamo la precedente formola $Xdx = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, onde sia $dz = \frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, e $z = f(x)(C)$ uguale all'arco circolare; venendo quì pure dalle coordinate CP, PM determinato il solo punto M, l'altro punto B dovrà dipendere dalla Costante C; ora se si vuole, che da un tal punto cominci l'arco allorchè $x = a$, deve essere $z = 0$, dunque sostituendo questi valori nella $z = f(x)(C)$, avremo l'Equazione $0 = f(a)(C)$, e il valor della C da questa ricavato, e sostituito nella $z = f(x)(C)$ non farà, che stabilire il punto B, la grandezza dell'arco dipenderà dall'Equazione ottenuta. Egli è poi un assurdo il volere nel nostro caso attribuire alla C dei valori arbitrarj; avendosi stabilito, che il principio del nostro arco sia in B, non possiamo alla C dare quel valore, che ci piace, dobbiamo darle quello, che risulta dalla soluzione della $0 = f(a)(C)$.

Ciò posto potrà la $f(x)(C)$ essere una funzion algebraica? Non già. Essendosi determinato dalla $0 = f(a)(C)$, e sostituito nella $z = f(x)(C)$ il valore della C, da quest'ultima Equazione devesi ottenere il valore dell'arco compreso tra i punti B, M; ora di simili archi non v'è già il solo BM, ma ve ne sono infiniti, tali essendo gli archi tutti

$4\pi+\alpha$, $8\pi+\alpha$, ec. (n.° 4). Dunque dovendo risultare infiniti i valori della z, la funzione $f(x)$ (C) dovrà avere infiniti valori, conservandosi la C sempre la medesima, ed essa $f(x)$ (C) per conseguenza non potrà essere funzione Algebraica.

Suppone il Ch. d'Alembert, che la nostra Costante sia variabile per ogni rivoluzione (4.° n.° 3); ma riflettendo, che la Costante non fa, che determinare il punto B, e che questo punto è sempre il medesimo rapporto a tutti gli archi α, $4\pi+\alpha$, $8\pi+\alpha$, ec., è facile a vedersi essere questa una supposizione, la quale nel nostro caso non può aver luogo.

Il d'Alembert paragona la rettificazione del Circolo con quella della Cicloide (3.°, 4.° n.° 3), e dalla possibilità di questa sospetta la possibilità della prima; ma tra queste due Curve esiste tal differenza, che, per quanto a me sembra, non può giammai aver luogo una simile deduzione: sì nel Circolo, che nella Cicloide ad una medesima ascissa corrispondono, è vero, infiniti archi diversi, cosicchè nel circolo della (Fig. 3.ª) alla stessa ascissa CP corrispondono gli infiniti archi α, $4\pi+\alpha$, $8\pi+\alpha$, ec. (n.° 4.) e nella Cicloide della (Fig. 5.ª) all'ascissa medesima AP corrispondono gli infiniti archi AM, AMBM', AMBM'EM'', ec.; ma i primi fra questi (fig. 3.ª) oltre la medesima ascissa CP hanno ancora l'ordinata stessa PM; non così i secondi; l'arco AM (fig. 5.ª) corrisponde all'ordinata PM, l'altro AMBM' all'ordinata PM', il terzo AMBM'EM'' all'ordinata PM'', ec. Ora per la natura della curva la determinazione d'un arco dipendendo dall'integrazione della formola $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, dipender deve dal valore dell'ascissa insieme, e da quello dell'ordinata. Dunque nel circolo dalle stesse coordinate CP, PM dipendendo in egual modo tutti gli archi α, $4\pi+\alpha$, $8\pi+\alpha$, ec. l'Equazione algebraica richiesta ad esprimere, il valore del primo di questi archi dovrà racchiudere insieme il valor degli altri, ed essere perciò di grado infinito;

ma nella Cicloide, quantunque l' ascissa sia sempre la stessa, pure gli archi venendo a dipendere da ordinate diverse, evidentemente ne siegue, che la determinazione dell' arco AM potrà essere affatto indipendente da quella dell' arco AMBM', da quella dell' arco AMBM'EM", ec., e però non dovendo essi, siccome gli archi circolari, collegarsi necessariamente insieme in una sola Equazione, non dovrò nella ricerca del primo AM cadere necessariamente a determinare anche gli altri AMBM', AMBM'EM", ec., e per conseguenza non dovrò necessariamente cadere in Equazione di grado infinito.

16. Per rispondere finalmente alla difficoltà promossa dal paragonare il Problema della trisezione con quello della rettificazione dell' arco circolare (1.° n.° 3) osserviamo, che dimandandosi di trisecare l' arco BM (fig. 3.ª), pei (1.° n.° 3, n.° 4) simultaneamente dimandasi la trisezione di tutti gli archi (A); ma allorchè, dato l' arco BM, cerco di tagliarlo in tre parti uguali, altro non faccio, che cercar di trovare un punto R, il quale determini l' arco BQ terza parte di BM. Dunque lo stesso dicendosi di tutti gli archi (A), ne viene, che il nostro Problema si ridurrà alla ricerca di tutti i punti Q, ec., dai quali restano determinate le terze parti di tutti gli archi sovraccennati; ora quantunque gli archi siano infiniti, pure tali punti, come vedremo fra poco, riduconsi a tre soli; dunque tre sole essendo in fine le cose richieste dal Problema, l' Equazione che per la soluzione di questo si ottiene, dovrà soltanto ascendere al terzo grado, e non già ad un grado infinito. Dunque il paragone accennato nel (1.° n.° 3), e quindi la promossa difficoltà non potrà punto aver luogo.

Ritenute le denominazioni dei (n. 4, 5), e supposti nel Circolo ABDE determinati i tre punti Q, R, S tali, che $BQ = \frac{\alpha}{3}$, $BDR = \frac{4\pi + \alpha}{3}$, $BDAS = \frac{8\pi + \alpha}{3}$ avremo prescinscindendo per ora dalle direzioni,

$$\mathrm{BES} = 4\pi - \frac{8\pi+\alpha}{3} = \frac{4\pi-\alpha}{3},\ \mathrm{BEAR} = 4\pi - \frac{4\pi+\alpha'}{3} = \frac{8\pi-\alpha'}{3},$$

$$\mathrm{BEADQ} = 4\pi - \frac{\alpha'}{3} = \frac{12\pi-\alpha'}{3},\ \mathrm{AR} = 2\pi - \frac{4\pi+\alpha'}{3} = \frac{2\pi-\alpha'}{3} = \frac{\beta'}{3},$$

$$\mathrm{ADQ} = 2\pi - \frac{\alpha'}{3} = \frac{6\pi-\alpha'}{3} = \frac{4\pi-\beta'}{3},\ \mathrm{ADBES} = 2\pi + \frac{4\pi-\alpha'}{3} = \frac{10\pi-\alpha'}{3} = \frac{8\pi+\beta'}{3};$$

$$\mathrm{AS} = 4\pi - \frac{8\pi+\beta'}{3} = \frac{4\pi-\beta'}{3},\ \mathrm{AEBQ} = 4\pi + \frac{4\pi-\beta'}{3} = \frac{8\pi-\beta'}{3},$$

$$\mathrm{AEBDR} = 4\pi - \frac{\beta'}{3} = \frac{12\pi-\beta'}{3}.$$

Tengo ora conto delle direzioni trascurate, colloco nei dovuti luoghi le lettere supposte nel cit. (n.° 4), e sarà

$$\mathrm{BQ} = \frac{\alpha'}{3},\ \mathrm{BDR} = \frac{\alpha''}{3},\ \mathrm{BDAS} = \frac{\alpha'''}{3},$$

$$\mathrm{BES} = \frac{\gamma'}{3},\ \mathrm{BEAR} = \frac{\gamma''}{3},\ \mathrm{BEADQ} = \frac{\gamma'''}{3},$$

$$\text{(L)} \qquad \mathrm{AR} = \frac{\beta'}{3},\ \mathrm{ADQ} = \frac{\beta''}{3},\ \mathrm{ADBES} = \frac{\beta'''}{3},$$

$$\mathrm{AS} = \frac{\delta'}{3},\ \mathrm{AEBQ} = \frac{\delta''}{3},\ \mathrm{AEBDR} = \frac{\delta'''}{3},$$

Ora supponendo le espressioni

$$4n\pi + \frac{z'}{3},\ 4n\pi + \frac{z''}{3},\ 4n\pi + \frac{z'''}{3},$$

queste sono tali, che se in luogo di n si collocano successivamente tutti i numeri interi 0, 1, 2, 3, ec., e in luogo delle z', z'', z''' sostituisconsi corrispondentemente da prima le quantità α', α'', α''', poscia le γ', γ'', γ''', in terzo luogo le β', β'', β'', e finalmente δ', δ'', δ''' ottengonsi evidentemente le terze parti di tutti gli archi espressi nelle prime quattro file di (A), e inoltre qualunque valore abbiasi il numero n, gli archi (M) hanno tutti in corrispondenza i loro estremi nei punti, ne' quali li hanno li archi $\frac{z'}{3}$, $\frac{z''}{3}$, $\frac{z'''}{3}$. Ritenuta pertanto l' indicata ipotesi poichè questi $\frac{z'}{3}$, $\frac{z''}{3}$, $\frac{z'''}{3}$ altro non rappresentano, che gli archi (L), e cominciano quindi tutti nei punti B, od A, e terminano negli altri Q, ed R, od S, ne viene, che ancora le terze parti degli archi esistenti nelle prime quattro file di (A) espressi in (M), cominciando essi pure da uno dei due punti B, A, termineranno tutti in uno degli altri tre Q, R, S; ma i primi due punti B, A sono cogniti, dunque restando a trovarsi solamente i tre Q, R, S, ne segue, che la sola determinazione di questi, basterà per trisecare gli archi tutti, che in (A) formano le prime quattro file. Gli archi poi delle quattro file seconde, altro non essendo, che quei delle prime presi negativamente, è chiaro, che, ritrovate le terze parti di questi, restano determinate eziandio le terze parti di quelli; e per conseguenza la trisezione di tutti gli archi (A) dipenderà dalla determinazione dei soli esposti tre punti, Q, R, S.

17. Dimostrata così impossibile la rettificazione del Circolo, ne concludiamo ancora impossibile la quadratura; quest' ultima, ognun sa, pienamente dipendere dalla prima, e viceversa.

18. L' immortale Newton non restringe già il suo discorso al solo Circolo, ma lo estende a tutte le figure ovali (Princ. Matem. Lib. 5. Sez. 6. Lem. 28.); col mezzo sempre di una Spirale dimostra egli impossibile tanto la quadratura, che la rettificazione di queste. Lo stesso potremo fare ancor noi: supposto, che la (Fig.^{a} 6.^{a}) rappresenti una qualunque figura ovale, vogliasi la sua rettificazione, o la sua quadratura. Condotti perciò i due assi AB, DE, tirata l' ordinata PM, supposto CP $= x$, PM $= y$, e chiamati α, β, π (n.° 4) nel caso della rettificazione, i tre archi

BM, ADM, BMD, e nel caso della quadratura le tre aree BPM, APM, BCD, troveremo quì ancora, siccome nel cit.° (n.° 4), che nel cercare il valore dell' arco, o dell' area α espresso algebraicamente per gli assi, e le coordinate, dovremo cadere nella determinazione di tutti gli archi, o di tutte le aree, che vengono rappresentate dalle espressioni (A); imperciocchè tutti questi archi cominciano egualmente in uno dei punti B, A, e terminano in M, e le aree principiano tutte dalla retta PB, oppure PA, e finiscono nella PM. Supposta in seguito (B) l' Equazione, di cui sono radici gli archi, o le aree (A), proseguendo il discorso medesimo, che abbiam fatto nei (n. 4, 5, ec. 13), troveremo egualmente, che questa Equazione (B) risultata di grado infinito è innabbassabile a grado finito, che niun metodo esiste capace alla determinazione sì dell' arco BM, che a quella dell' area BPM, e che per conseguenza è impossibile tanto la rettificazione, che la quadratura di tutte le figure ovali.

19. Aggiungo essere in egual modo impossibile la rettificazione, e la quadratura di tutte le curve, che vengono espresse con l' Equazione $y^{2m} = A^2(x^{2n} - B^2)$. Imperciocchè rapporto alla quadratura, avendosi l' area della curva supposta $= \int y dx = \int dx \sqrt[2m]{\left(A^2 (x^{2n} - B^2)\right)}$, ed essendo $\sqrt[2m]{\left(A^2 (x^{2n} - B^2)\right)} = \sqrt[2m]{-A^2} \times \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})}$, sarà quest' area $= \sqrt[2m]{-A^2} \int dx \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})}$. Ora l' Equazione $y^{2m} = (B^2 - x^{2n})$ ci rappresenta evidentemente una Curva ovale, la cui area è $= \int dx \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})}$. Dunque essendo pel (n.° prec.) quest' ultim' area indeterminabile algebraicamente, ed essendo perciò inintegrabile la formola

$\int dx \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})}$, non potrà integrarsi neppur l'altra $\sqrt[2m]{-A^2} \int dx \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})}$, e per conseguenza l'area della supposta curva $y^{2m} = A^2 (x^{2n} - B^2)$ non sarà capace di determinazione algebraica. Riguardo poi alla rettificazione, nella Curva $y^{2m} = a^2 (B^2 - x^{2n})$, abbiamo l' arco =

$$= \int dx \sqrt{\frac{m^2 \sqrt[2m]{[a^2(B^2 - x^{2n})]^{4m-2}} + n^2 a^4 x^{4n-2}}{m^2 \sqrt[2m]{[a^2 (B^2 - x^{2n})]^{4m-2}}}} =$$

$$= \int dx \sqrt{\frac{m^2 \sqrt[2m]{a^{9m-4}} \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})^{4m-2}} + n^2 a^4 x^{4n-2}}{m^2 \sqrt[2m]{a^{8m-4}} \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})^{4m-2}}}},$$

e nella Curva $y^{2n} = A^2 (x^{2n} - B^2)$, abbiamo l' arco

$$= \int dx \sqrt{\frac{m^2 \sqrt[2m]{[A^2(x^{2n} - B^2)]^{4m-2}} + n^2 a^4 x^{4n-2}}{m^2 \sqrt[2m]{[A^2 (x^{2n} - B^2)]^{4m-2}}}}$$

$$= \int dx \sqrt{\frac{m^2 \sqrt[2m]{-A^{8m-4}} \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})^{4m-2}} + n^2 A^4 x^{4n-2}}{m^2 \sqrt[2m]{-A^{8m-4}} \sqrt[2m]{(B^2 - x^{2n})^{4m-2}}}},$$

Ora quest' ultima espressione è tale, che se ponghiamo a^2 in luogo di $-A^2$, si cangia nella prima, ed altronde questa prima è inintegrabile, poichè l'Equazione $y^{2m} = a^2(B^2 - x^{2n})$ esprime una Curva ovale, e l' arco di tal curva non si può determinare (n.° prec.). Dunque sarà inintegrabile anche l' espressione seconda, e però non potremo ottenere il valore dell' arco corrispondente.

Se nella Equazione $y^{2m} = A^2 (x^{2n} - B^2)$ facciamo $m = 1$, $n = 1$, essa diviene $y^2 = A^2 (x^2 - B^2)$, diviene cioè l' Equazione dell' Iperbola Appolloniana. Dunque la qua-

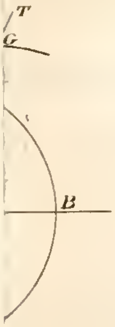


Fig. 2.

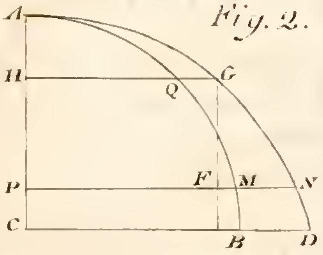

A
H
G
Q
F
M
N
P
C
B
D

Fig. 3.

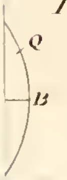


Fig. 4.

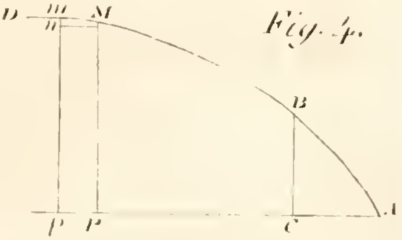


Fig. 5.

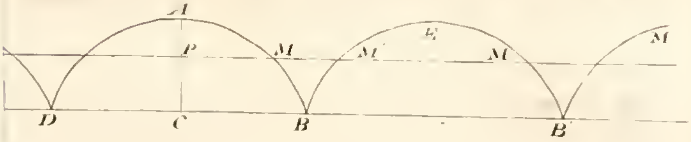

A
P
M
M'
E
M
M
D
C
B
B'

Fig. 6.

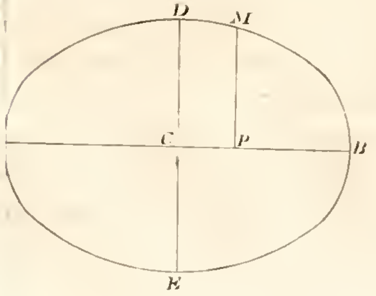


Fig. 1.

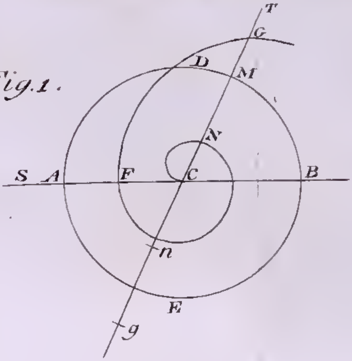

T
G
D
M
N
S
A
F
C
B
n
E
g

Fig. 2.

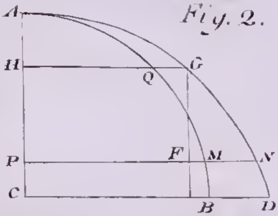

A
H
G
Q
P
F
M
N
C
B
D

Fig. 3.

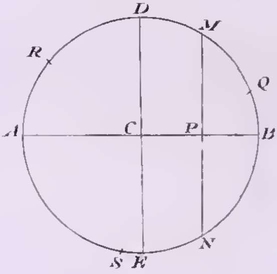

D
M
R
Q
A
C
P
B
S
E
N

Fig. 4.

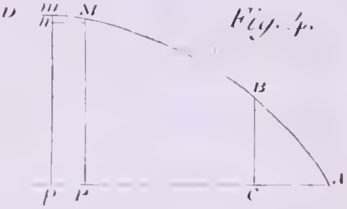


Fig. 5.

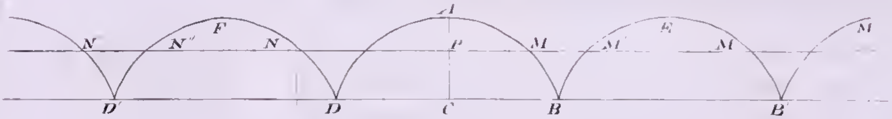
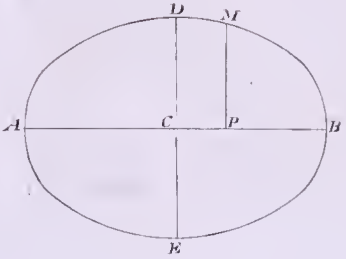

A
N
N''
F
N
P
M
M'
E
M
M
D'
D
C
B
B'

Fig. 6.



quadratura, e la rettificazione di questa Curva sono impossibili. La rettificazione della Parabola Appolloniana, sappiamo dipendere dalla quadratura dell' Iperbola. Dunque essendo quest' ultima indeterminabile, tale sarà ancora la prima.

DELLA

DELLA IMPOSSIBILITA' DELLA QUADRATURA DEL CERCHIO

MEMORIA

Di Tommaso Valperga Caluso

Ricevuta il dì 24. *Ottobre* 1801.

UNa persona ostinata a perdere il tempo dietro una sua pretesa quadratura del Cerchio mi fa seriamente pensare quanto sarebbe utile, che da tutti i Maestri di Geometria si desse ai discepoli per certissimo essere la mentovata quadratura impossibile quale da male istruiti si cerca siccome cognitissima e possibile. Perchè non per altro alcuni tuttora si stillano inutilmente il cervello in sì sciagurato problema, se non perchè si dice non esserne dimostrata l'impossibilità; la qual cosa essi interpretano come s'ella fosse negata. Montucla ne ha scritto un egregio volumetto, *Histoire des recherches sur la quadrature du Cercle*. Paris 1754, dove trovasi molto pure di dottrinale; ma sono forse necessarj maggiori schiarimenti. Onde rimandando a lui per quanto si può desiderare di Storico, ristringerommi alla speculativa, la quale volendo sgombrare da ogni dubbio e oscurità, stimo bene cominciare un pò da lontano.

1. Due grandezze essendo tali, che l' una per l'altra vicendevolmente restin determinate, chiamansi *funzioni* l' una dell'altra; e *relazione* chiamasi quella qualunque connessione, che passa fra esse, e reciprocamente l' una in dipendenza dell' altra determina; onde notando X un' espressione di qualunque numero di termini composti comunque di x, e di cognite, o costanti, che le vogliam dire, una forma $y = X$, per cui dato x si ha y, sarà la relazione di y a x.

Quando X è composto di un numero finito di termini, potendosi questi esprimer tutti, non è necessario che passi fra essi alcuna legge di formazione successiva; ma sarà questa necessaria per quelli innumerabili termini, che forza è tralasciare da proseguirsi, quando il numero de' termini non ha fine. Sicchè X potrà comporsi di termini, che non fan serie, di serie, e di serie di serie, che sempre si sottintendano di termini senza fine.

Le serie non danno propriamente la determinazione, se non quando è noto il limite della somma della serie, il quale essendone l' esatto valore, sostituendolo riducesi X a un numero finito di termini. In altro caso se la serie è convergente, è buona e vera; ma non dando che un' approssimazione, e non tutti i valori, a cui la relazione si estende, non n' è mai l' espressione perfetta, benchè ne sia la propria, quando non se ne può avere una finita.

Termini algebraici son quelli, che si possono costruire geometricamente, e funzione algebraica quella, di cui la relazione può esprimersi con un finito numero di termini tutti algebraici, e quando ciò non si può, la funzione chiamasi *trascendente*.

Ma per accertare che sielo, è chiaro non bastare che non sappiasi, ma convenir dimostrare che assolutamente non si può la relazione esprimere con un numero finito di termini algebraici.

2. Però a vederne il caso il più semplice, sia la progressione $∺\ a, b, \frac{b^2}{a}, \frac{b^3}{a^2}, \frac{b^4}{a^3}$, &c., di cui se ciascun termine si paragoni con a, si ha primieramente la ragione di ugualità $\frac{a}{a} = 1$, non composta di ragione alcuna di b ad a; onde il numero delle ragioni $\frac{b}{a}$, che compongono quella prima ragione $\frac{a}{a}$, sarà *zero*. Il secondo paragone ci darà $\frac{b}{a}$, che

contiene precisamente una volta la mentovata ragione. Il terzo termine $\frac{b^2}{a}$ comparato con a ne dà $\frac{b^2}{a^2}$ composto di due delle suddette ragioni. Quindi $\frac{b^3}{a^2} : a$ ne dà una ragione composta di tre $\frac{b}{a}$, e il termine seguente ce la dà composta di quattro, e generalmente i numeri delle ragioni $\frac{b}{a}$ componenti la ragione di ciascun termine al primo a saranno i termini della progressione aritmetica 0, 1, 2, 3, 4, &c.

Ma la geometria ci somministra il mezzo non solo di continovare la prima progressione con terze proporzionali all' infinito, ma d'interpolarla altresì con mezze proporzionali all' infinito, cominciando da $\sqrt{ab}$, che ci dà il termine di mezzo fra a e b; quindi $\sqrt{a\sqrt{ab}} = a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{1}{4}}$ non solo ci dà quello, che dee precedere $\sqrt{ab}$, ma, mediante una terza o una quarta proporzionale, il susseguente $a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{3}{4}}$. E così generalmente col numero m di mezze proporzionali successive, le quali ci danno la radice dell' ordine 2^m, si ha il numero di termini $2^m - 1$ da interpolarsi non solo fra a e b, ma per via di terze o di quarte proporzionali da continuarsi fra tutti i termini della prima progressione all' infinito.

Che se compariamo con a il primo degli interpolati $a\sqrt[2^m]{\frac{b}{a}} = a\left(\frac{b}{a}\right)^{1:2^m}$, avremo $\left(\frac{b}{a}\right)^{1:2^m}$ composto del numero 2^{-m} di ragioni $\frac{b}{a}$ submultiplicate, dovendosi per lo segno negativo pigliar al contrario, che vale a dire che in vece di essere quella ragione composta di tante $\frac{b}{a}$, si è questa

sta $\frac{b}{a}$ composta del numero 2^m di ragioni $b^{1:2^m} : a^{1:2^m}$.

Così per esempio pigliando fra i primi termini venticinque mezze proporzionali successive, avremo $2^{25} - 1 = 33554431$ termini a interpolare fra quei, che immediatamente si seguono nelle due prime progressioni; e tuttavia le due progressioni ∺ a, $a\left(\frac{b}{a}\right)^{1:2^m}$, $a\left(\frac{b}{a}\right)^{2:2^m}$, $a\left(\frac{b}{a}\right)^{3:2^m}$, &c., 0, $\frac{1}{2^m}$, $\frac{2}{2^m}$, $\frac{3}{2^m}$, &c. avranno i termini sempre tali, che il n^{esimo} della seconda essendo $\frac{n-1}{2^m}$, il corrispondente della prima $a\left(\frac{b}{a}\right)^{(n-1):2^m}$ si potrà geometricamente sempre determinare.

3. Se pertanto più generalmente io suppongo $y = c^x$, potendo fare $a = 1$, $b = c$, sempre che sarà $x = \frac{n-1}{2^m}$, essendo m, n numeri intieri e positivi, y sarà funzione algebraica di x, e di quelle, che si possono costruire colla geometria piana. Ma se x è una frazione, che nella espressione sua più semplice abbia nel denominatore per fattori de' numeri primi altri che 2, onde ponendo qualsivoglia numero intiero per m ed n, non possa mai essere $\frac{n-1}{2^m} = x$, non potranno x ed y esser termini delle due progressioni, come dianzi interpolate; ma potranno inserirsi nelle prime $0, 1, 2, 3$ &c. $a, b, \frac{b^2}{a}, \frac{b^3}{a^2}$, &c. con quella interpolazione, che il caso richieda, pigliando per esempio fra due termini della seconda due medie in proporzione continua, se un fattore è

3. Siccome però a pigliar due tali medie bisogna uscire dalla geometria piana, la determinazione di y quando $x = \frac{n-1}{2^m.3^r}$, non sarà più possibile a tale geometria: ma non per ciò lascierà y di essere funzione algebraica di x. Solo il problema non sarà più del secondo, ma del terzo grado; come sarà del quinto, se il numero primo fattore del denominatore sarà 5. E così proseguendo per tutti i numeri primi avremo una serie infinita di casi, in cui y non lascierà di essere funzione algebraica, benchè d' ordini successivamente sempre superiori, che vanno sempre accrescendo difficoltà all' infinito, la quale potrà superarsi tanto più oltre, quanto sarà più perfetto ed esteso il saper nostro.

4. Ma se fo $x = \sqrt{2}$, allora i progressi, che può fare la scienza, non ci possono più dare speranza alcuna, mentre sappiamo che l' espressione di $\sqrt{2}$ con numeri finiti è dimostrata impossibile assolutamente, e che a essendo una linea, $a\sqrt{2}$ è un limite, al quale con parti aliquote di a si può bene andar presso quanto si vuole, ma giunger non mai. Il 47453132^{mo} termine della progressione aritmetica recata dianzi in esempio differisce così poco da $\sqrt{2}$, che appena se ne può dir minore; onde $a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{47453131}{33554432}}$, che gli corrisponde nella progressione geometrica, sarà prossimo a $y = c^{\sqrt{2}}$; ed è chiaro che se ne potrà avere uno quanto si voglia più appressante con un maggior numero di medie proporzionali successive. Ma nulla gioverebbe saper costrurre $a\left(\frac{b}{a}\right)^{(n-1):2^m.3^r.5^s.\ \&c.}$; perchè nè più, nè meno non si potrebbe mai avere nè un termine della progressione aritmetica $= \sqrt{2}$, nè uno della geometrica $= a\left(\frac{b}{a}\right)^{\sqrt{2}}$. E lo

stesso è chiaro fatto $x = \sqrt{3}$, o a qualunque altra radice sorda. Sempre che x sia irrazionale, la relazione $y = c^x$ sarà trascendente.

5. Che se dalla sezione delle ragioni passiamo a quella degli angoli, e però degli archi in parti della periferia π, la geometria piana ci dà le corde di tutti gli archi $\frac{\pi}{2^m}$, $\frac{\pi}{3.2^m}$, $\frac{\pi}{5.2^m}$, $\frac{\pi}{15.2^m}$, ed oltre queste quattro serie di poligoni regolari, combinando i termini di serie diverse, per addizione o sottrazione, si hanno gli archi d'innumerabili settori, che non sono parti aliquote della circonferenza; de' quali tutti basterà la geometria piana a determinare la corda, il seno, il coseno, la tangente &c., che perciò saranno tutte funzioni del raggio di quella prima classe, di cui $y = c^x$, quando $x = \frac{n-1}{2^m}$. Che se aggiungonsi tutti gli archi espressi da $\frac{\pi}{2^m.3^n}$, $\frac{\pi}{5.2^m.3^n}$, che si hanno colla trisezione dell' angolo, che sì elegantemente si fa coll' iperbole, si uscirà dai limiti della geometria piana, e vieppiù ricorrendo a un' Equazione di quinto grado, che colle precedenti ne dia $\frac{\pi}{2^m.3^n.5^r}$. Così però proseguendo per tutti i numeri primi sempre con un' Equazione dell' ordine indicato dal numero, verranno pur sempre le funzioni dell' angolo di quel genere, di cui abbiam veduto $y = c^x$, quando x frazione razionale ha nel denominatore alcun fattore numero primo altro che due.

Ma se l'arco è $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, o più generalmente $\frac{m\pi}{n\sqrt{q}}$, ove $\sqrt{q}$ sia irrazionale, sarà il terzo caso delle funzioni trascendenti, poichè richiede un' Equazione dell' ordine $\sqrt{q}$, più impossibile ancora a ridursi a espressione finita che un solo termine coll' esponente irrazionale.

6. Or dall' angolo passiamo all' area d'un triangolo isoscele, di cui l' angolo fra i lati eguali sia A. Il qual angolo fatto variare fra' lati costanti, il triangolo sarà massimo quando A sia retto: nel qual caso se vogliamo che l' area del triangolo sia $= 1$, dovranno farsi i lati $= \sqrt{2}$, e l'area d' ogni altro triangolo sarà $2 \operatorname{sen.} \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} A = \operatorname{sen.} A$. Sia dunque $v = \operatorname{sen.} A$ (*) l'area del triangolo variante; la relazione di v al raggio sarà nei limiti della geometria piana sempre che A sia una frazione di π, nel cui denominatore non sieno altri fattori numeri primi che 2 quanti si vuole, un solo 3, un solo 5; sarà algebraica, ma superiore, quando nel denominatore di π sieno altri fattori numeri primi, ma pur sia frazione razionale. Ma dove A sia frazione irrazionale, la relazione di v al raggio sarà trascendente.

7. Sia z il segmento circolare sotteso dalla corda opposta ad A, $z + v$ sarà l' area del settore, che moltiplicato per $\frac{n}{m}$, essendo $A = \frac{m\pi}{n}$, darà l' area di tutto il cerchio. Che però dato un valore di z, se la relazione di v al raggio è nei limiti della geometria piana, è evidente che si avrà per essa ogni altro qualunque segmento z' per ogni altro angolo A', che sia similmente ne' limiti della geometria piana; poichè col dato valore di z trovata l' area del cerchio, e divisala nella ragione di $\pi : A'$, si avrà l' area del settore, da cui tolto il triangolo v', resterà z'.

Che se z sia dato per un valore di A, che sia nel secon-

(*) Seni per metafora dovettero primieramente chiamarsi i triangoli v, e quindi le perpendicolari, cui sono proporzionali, e che calcolate, come anche gli archi, pel raggio $= 1$, sono le aree di essi triangoli, e de' settori col raggio $= \sqrt{2}$, il quale suppone la stessa unità, che agguaglia ai logaritmi naturali le aree di quei, che possiam chiamare settori Iperbolici.

condo caso della relazione di v al raggio, algebraica, ma superiore, tutti gli altri valori, che se ne potranno ritrarre, di z, saranno per lo meno egualmente al di là de' limiti della geometria piana; perchè bisogna sempre cominciare dalla determinazione di A ed v. Se non che determinata una volta per mezzo di z con costruzione geometrica di qual si fosse grado l' area del cerchio, cominciando poscia da questa, come data, il problema si ridurrebbe per ogni altro angolo A' alla classe della relazione di v'.

Nè altrimenti se z sia dato a luogo, dove la relazione di v al raggio sia trascendente, verranno a essere trascendenti col cerchio tutti senza eccezione i segmenti sottesi a qualunque angolo; perchè trascendente essendo la relazione di v al raggio, l' è necessariamente eziandio quella del settore $v + z$, da cui si ha da trarre l' area del cerchio per passare agli altri segmenti.

8. Quindi si fa chiaro 1.° quello, che già da tutti i Geometri si concede, essere impossibile la quadratura geometrica del cerchio *indefinita*, cioè per qualsivoglia sua parte; 2.° ch' ella non può darsi per un segmento, un settore geometrico, che non sia data in conseguenza per infiniti altri, e pel cerchio intero; 3.° che se alcun valore di z è trascendente sotto un angolo di sezione geometrica, ne seguirà non esservi segmento, la cui relazione al raggio non sia trascendente; e però sarà impossibile non la sola quadratura indefinita, ma eziandio la definita.

Sicchè questa celebre distinzione si riduce a un' eccezione, che si avrebbe a fare quando fosse del resto la quadratura del cerchio possibile; che se ne avrebbero a eccepire i casi, dove s' avesse a tagliare un angolo, un arco, la cui ragione alla circonferenza fosse irrazionale. La qual cosa quantunque vera, non farebbe però torto a una quadratura geometrica, procedendo da un' impossibilità, per cui eziandio l' area de' triangoli rettilinei $v =$ sen. A in que' medesimi casi non si può avere geometricamente.

9.

9. Nè però è men chiaro che dall' impossibilità d' una Equazione finita, che ci dia il settore $\frac{r\pi}{2q}$, ove q sia irrazionale, ha necessariamente a seguirne l'impossibilità d'una Equazione generale finita, che ci dia i segmenti. Poichè sia la saetta $r-x$, posto $z=X$ funzione di x del grado m, essendo $v=x\sqrt{r^2-x^2}$, ed $v+z=\frac{r\pi}{2q}$, si avrebbe $x\sqrt{r^2-x^2}=\frac{r\pi}{2q}-X$, $r^2x^2-x^4=\frac{r^2\pi^2}{4q^2}-\frac{r\pi X}{q}+X^2$; e però trovato π mediante un valore di z preso dove v sia geometrico, avrebbesi x mediante un' Equazione del grado $2m$ per qualunque valore di q, eziandio irrazionale. Sicchè non solo per li settori, ma pur anche per li segmenti ogni Equazione generale finita è impossibile; e però non la sola quadratura indefinita è impossibile, ma eziandio la definita. Perchè la sola parte semplice del cerchio essendo il segmento, facilmente s' intende niuna parte di esso potersi avere che non s' abbia il segmento; e niun segmento può aversi geometricamente, se non per via d' un' Equazione, che vaglia per tutti. Poichè non trattandosi di una coincidenza fortuita di valori, per cui possa certo segmento capitare a essere uguale a certa superficie rettilinea, ma d' egualità necessaria per la connessione della grandezza del segmento con quella di una retta, l' Equazione che la connession loro include ed esprime, non può non esser la stessa per qualunque segmento; mentre la semplicità e l' uniformità del cerchio in ogni sua parte esclude evidentemente ogni varietà di casi, per cui possa un' Equazione fra le sue funzioni aver luogo in alcuna sua parte, e non in alcun' altra.

10. Ond' anche niuna forza ha l' esempio ricordato da Montucla pag. 95. di alcune curve Bernoulliane non quadrabili indefinitamente, che pur non lasciano di aver quadrabili uno o più spazj determinati. Perchè son curve composte

di due, togliendo, o aggiungendo all'ordinata dell'una quella dell'altra, *e. g.* di $u = \frac{a^2}{2\sqrt{2ax-x^2}}$, $v = \frac{x^2}{\sqrt{4a^2-x^2}}$, facendo $u - v = y = \frac{a^2}{2\sqrt{2ax-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{4a^2-x^2}}$, di $u = \sqrt{a^2+x^2}$, $v = \frac{1}{2}\sqrt{ax+\frac{1}{4}x^2}$, facendo $u + v = y = \sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{ax+\frac{1}{4}x^2}$, che sono esempj dello stesso Giovanni Bernoulli (*v. Opera* t. III. pag. 405, e 409). Queste hanno spazj quadrabili per lo stesso principio, che il sono le lunule, perchè non v' ha ragione, per cui la differenza o la somma di due trascendenti sia trascendente; poichè ad A algebraico aggiungendo X trascendente, ho $A + X = Z$ trascendente, $Z - X = A$ algebraico; da A togliendo X, ho $A - X = Z'$ trascendente, $X + Z' = A$ algebraico. Che poi sieno quadrabili in alcuno e non in tutti i punti, viene da combinazioni, che si potran vedere presso lo stesso Bernoulli, bastandomi l' accennato a non lasciar dubbio sul punto dell' universalità, onde tanto sia certa l' impossibilità della quadratura del cerchio finita, quanto è certo che la fluente, o integrale che la vogliam dire, di $dx\sqrt{1-x^2}$ è trascendente.

11. Che se questo non da tutti si reputa per li principj del calcolo integrale dimostrato abbastanza, ciò avviene perchè in flussioni complicate talora accadendoci di non saperne dare la fluente finita, quando pur si può, chi non discute minutamente i casi e le ragioni, non vede perchè non possa lo stesso aver luogo in espressioni più semplici, quali sono quelle delle flussioni dell' area $dx\sqrt{1-x^2}$, $dx\sqrt{2x-x^2}$, o dell' arco $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$, $\frac{dx}{1+x^2}$, $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, se-

condo che x noti il seno o retto o verso, o la tangente o la segante. Le quali flussioni tutte convengono in ripugnare alle condizioni, che necessariamente debbono trovarsi nelle flussioni esatte, intiere di fluenti algebraiche, e tutte sono state volte e rivolte in ogni possibil modo. Non può esistere una flussione, la cui fluente sia algebraica, e non si sappia, se non perchè niuno mai abbia cercata la flussione di tal fluente; e sebbene in tutta l'estensione dell'Algebra senza numero abbiano a essere le fluenti non esaminate da alcuno, non perciò è da temere che sia sfuggita a ogni calcolo alcuna di quelle ristrette combinazioni di formole, di cui la flussione possa avere qualche affinità colle circolari; come non perchè niuno può sapere tutte le voci, che si possono scrivere colle venti lettere dell' alfabeto, è men certo quante e quali sono puro anagramma di Roma.

E chi non intende la forza di alcune ragioni può rassicurarsi considerando quanta maestria si scorge ne' metodi, che abbiamo, di dar la fluente di Xdx, qualunque possa mai essere in tutta l' estensione dell' algebra l' espressione di X funzione di x, sempre che si sappia stralciarla e scomporla, e si possa al bisogno liberarla da radicali; e come allora la fluente si ha sempre con un numero finito di termini algebraici, o dipendenti dalle quadrature o del Cerchio, o dell' Iperbole; onde a queste quadrature si riducono altre innumerabili trascendenti.

12. Ed è da avvertire che sebbene la trascendenza della quadratura dell' Iperbole sia pur anch' essa certissima, vieppiù trascendente vuol riputarsi quella del Cerchio. Imperciocchè sia $a = \text{CA}$ (Fig. 1.^{a}) il raggio di $\text{MA}m$, e la tangente $\text{AT} = t$, il triangolo $\text{CM}m = v$, il segmento $\text{PMA}m = z$; e sia $\text{M}'\text{A}m'$ l' arco dell' Iperbole, di cui amendue gli assi eguali a $2a$; il triangolo $\text{CM}'m' = v'$, il segmento $\text{P}'\text{M}'\text{A}m'$ $= z'$. Avremo $\text{CP} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + t^2}}$, $\text{PM} = \frac{at}{\sqrt{a^2 + t^2}}$, $v = \frac{a^3 t}{a^2 + t^2}$.

$\frac{a^3t}{a^2+t^2}$. E nell' Iperbole, posto CP′ $= x$, onde P′M′ $= \sqrt{x^2-a^2} = \frac{tx}{a}$, $a^2x^2 - a^4 = t^2x^2$, $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-t^2}} =$ CP′, P′M′ $= \frac{at}{\sqrt{a^2-t^2}}$, $v' = \frac{a^3t}{a^2-t^2}$. Ora la flussione del segmento z è la flussione di AP per 2PM; la flussione di AP è quella di CP $\left(\frac{-a^2tdt}{(a^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$ col segno contrario; sicchè $dz = \frac{2a^3t^2dt}{(a^2+t^2)^2}$. La flussione del triangolo è $dv = \frac{a^3dt}{a^2+t^2} - \frac{2a^3t^2dt}{(a^2+t^2)^2}$. Dunque la flussione del settore CMAm $dv + dz = \frac{a^3dt}{a^2+t^2}$.

E similmente la flussione del segmento Iperbolico è la flussione di AP′ per M′m'; la flussione di AP′, la stessa che di CP′, è $-\frac{a^2tdt}{(a^2-t^2)^{\frac{3}{2}}}$; e però $dz' = \frac{2a^3t^2dt}{(a^2-t^2)^2}$, $dv' = \frac{a^3dt}{a^2-t^2} + \frac{2a^3t^2dt}{(a^2-t^2)^2}$, onde la flussione di CM′Am', $dv' - dz' = \frac{a^3dt}{a^2-t^2}$.

Così fra le flussioni de' due settori la sola differenza è del segno; la quale però rende il caso dell' Iperbole capace di una scomposizione, essendo $\frac{a^3dt}{a^2-t^2} = \frac{a^2dt}{2(a+t)} + \frac{a^2dt}{2(a-t)}$, termini infimi, de'quali è la fluente ricomposta $\frac{1}{2}a^2 \log.\frac{a+t}{a-t}$, la quale quando $t = \frac{9}{11}a$, sarà $\frac{1}{2}a^2 \log. 10$, che non sarebbe funzione trascendente, se il logaritmo fosse degli usuali di Briggs. Ma vuol essere del modulo $= 1$, al quale eziandio giova ridurre la quadratura dell' Iperbole equilatera facendo la metà dell' asse CA $= \sqrt{2}$, o sia pigliando per unità il lato della potenza della Iperbole, il seno e coseno di 45°. Che però dovendo la base del sistema essere $e = 1 + \frac{A}{1} + \frac{B}{2} + \frac{C}{3} + \frac{D}{4} +$ &c., dove ciascuna lettera significa il termine, che la precede, tutti i termini del sistema riescono trascendenti; siccome è chiaro supponendo $b = e$ trascendente nella progressione, di cui al n.° 2.

Ma $\frac{a^3 dt}{a^2 + t^2}$, flussione del settore del cerchio, non si può similmente ridurre all' infimo grado, $a^2 + t^2$ non avendo fattori che immaginarj; sicchè può stimarsi per la quadratura del cerchio la ragione di trascendenza tanto maggiore, quanto $\frac{dt}{a^2 + t^2}$, o, fatti $a^2 = \alpha$, $t^2 = \tau$, quanto $\frac{d\tau}{2(\alpha + \tau)\sqrt{\tau}}$ è men semplice di $\frac{dt}{a + t}$.

13. Ma vediamo se alla certezza del fatto possiamo aggiungere l' intendimento della cagione, per cui forza è che la quadratura del cerchio sia trascendente. Si sa che le Equazioni per avere $x = \text{sen.}\,\frac{A}{m}$, mediante il seno, o il coseno di A, sono $\text{Sen.}\,A = mx(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3} x^3 (1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.\,3.\,4.\,5} x^5 (1-x^2)^{\frac{m-5}{2}} - \text{\&c.}$$

ovvero $\text{Cos.}\,A = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} - \frac{m(m-1)}{2} x^2 (1-x^2)^{\frac{m-2}{2}}$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.\,3.\,4} x^4 (1-x^4)^{\frac{m-4}{2}} - \text{\&c.}$$

Onde essendo π la circonferenza, n il numero de' lati, a il raggio, e però l'area del poligono inscritto na^2 sen.$\frac{\pi}{2n}$ cos.$\frac{\pi}{2n}$ $= \frac{1}{2} na^2$ sen.$\frac{\pi}{n}$, fatto $m = \frac{1}{4}n$, onde A sia il quadrante, Sen. A$=1$, Cos.A$=0$, avremo l'area del poligono $\frac{1}{2} na^2$ sen. $\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} na^2 x$ dipendente da qual si voglia delle due Equazioni

$$0 = 1 - mx(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} x^3 (1-x^2)^{\frac{m-3}{2}} - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5} x^5 (1-x^2)^{\frac{m-5}{2}} + \&c.$$

$$0 = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} - \frac{m(m-1)}{2} x^2 (1-x^2)^{\frac{m-2}{2}} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} x^4 (1-x^2)^{\frac{m-4}{2}} - \&c.$$

che così pure senza fare svanire i radicali, sono dell'ordine m, e constano del numero di termini $\frac{m}{2}$ quando m è pari, e $\frac{m-1}{2}$ quando è caffo. Sicchè a misura che cresce il numero de' lati $= 4m$, la relazione dell'area del poligono al quadrato del raggio anderà crescendo e di grado e di numero di termini all'infinito. Dunque il limite di essa relazione è una serie senza fine. Ma l'area del cerchio è il limite di quelle de' poligoni inscritti; dunque la sua relazione a esso quadrato è una serie senza fine.

14. Ma più forza farà il considerar la ragione, per cui si può dimostrare *a priori* che l' Equazione, che ne dà il seno di $\frac{A}{m}$, vuol essere almeno dell'ordine m; e si è perchè il seno di A, da cui si parte, non è seno del solo arco A, e

del suo supplemento $\frac{1}{2}\pi - A$, ma eziandio di $\pi + A$, $2\pi + A$, $3\pi + A$, &c., e similmente di $\frac{3\pi}{2} - A$, $\frac{5\pi}{2} - A$, &c. Ond’ è che quantunque l’ intenzione di chi cerca il seno di $\frac{A}{m}$, possa ristringersi a un solo arco, col fatto però, valendosi del seno, la questione si estende a tutti quegli archi, che hanno per l’ appunto quel seno; sicchè se il seno sia per esempio la metà del raggio, non s’ avrà solo a divider l’ arco di 30°, ma altresì quelli di 390°, 750°, 1110°, &c. e quelli di 150°, 510°, 870°, 1230°, &c., e però la formola, che dà sen. $\frac{A}{m}$, se poniamo $m = 3$, dovrà avere tanti valori, quanti sono i seni di tutti quegli archi divisi per 3, cioè quanti sono i seni degli archi di 10°, 130°, 250°, 370°, &c. e quelli di 50°, 170°, 290°, 410°, &c. Dove si vuol osservare che i seni di 10°, di 170°, e di 370° hanno uno stesso valore, e così quei di 50°, di 130°, di 410°, e quei di 250°, e di 290°. Onde tutti si riducono a tre; perchè da 370°, e da 410° ricominciando la volta dagli stessi punti estremi degli archi di 10°, e di 50°, da cui ebber le due serie principio, forza è che proseguendo si ricada sempre su punti di seno già incontrato. Vedesi inoltre, che tutti i seni vengono in ciascuna delle serie, onde basta la formola $n\pi + A$, dove n significhi tutti i numeri intieri successivamente, cominciando da zero, e proseguendo finchè sia $n = m$, e però $\frac{n\pi + A}{m} = \pi + \frac{A}{m}$, prima ripetizione: onde i seni diversi saranno quanti i termini 0, 1, 2, 3 . . . $m - 1$, il numero de’ quali è appunto m.

Ma può essere A a π nella ragione di 1 a $\sqrt{2}$, o in qualunque altra irrazionale, onde essendo m incommensurabile con n, i successivi valori di $\frac{n\pi + A}{m}$ vadano all’ infinito senza ricader mai a un medesimo punto ; e così senza fine essendo il numero dei valori sempre diversi de' seni, che la risoluzione del problema compita dovrebbe dar tutti, e non può, si scorge *a priori* ch' ella dovrà ridursi alla espressione imperfetta d' una serie infinita . Poichè questo è principio infallibile che una Equazione finita non può non estendersi quanto le premesse, ond' è tratta, e non dar tanti valori, quanti soddisfanno al problema, non preso nella ristrettezza, in cui possiam volerlo, ma in tutta l' ampiezza del significato de' termini della sua prima espressione algebraica bene interpretata.

15. Or con questo principio facciamoci a esaminare la quadratura del cerchio, la fluente del prodotto della flussione del seno verso per il retto ; ove supposta la flussione costante, resta la quadratura funzione del seno ; il quale prescindendo tuttavia dalle intiere circonferenze, che agli archi si possono aggiungere, appartiene egualmente a due Archi, A, e 180° — A . Dovrà dunque la fluente aver due valori, uno, che dia l' area fra il diametro, il seno, e l' arco A, l' altro l' area fra il diametro, il seno, e l' arco 180° — A ; vale a dire che supposto il seno PM, (fig. 2.ª) dovrà dare a un tempo AMP, e AMD*mp*, o PMDB, il quadrante AMDC ± CDMP . Onde avrà la fluente a dividersi in due parti, una la stessa per qualunque valore di PM, l'altra dipendente da PM, la cui relazione alla prima dipendendo da quella del seno al raggio, non potrà non essere trascendente, quando lo è quella del seno.

Ma PM è pur anche il seno di tutta la circonferenza più AM . Dunque l' Equazione finita ed esatta della quadratura dovrebbe pur dare un terzo valore, quello dell' area di tutto il cerchio $\frac{1}{2} r\pi$ aggiunta ai due precedenti ; e così un quarto valore di due aree del cerchio più i medesimi, perchè la stessa PM è il seno di 2π + AM ; e in una parola dovrebbe dare l' infinito numero di tutti i valori di

I

$\frac{1}{2} n r \pi$ + AMBC ± CDMP, perchè PM è il seno di tutti gli archi $n \pi$ + AM.

16. La qual cosa schiarisce e conferma la dimostrazione, che dà Newton, del suo *Lemma* XXVIII. del libro I. de' *Principj Matematici*, dove asserisce non esservi figura ovale, la cui area fra rette tirate a piacimento possa generalmente trovarsi con Equazione di numero di termini e di grado finiti. Egli il dimostra facendo rotare intorno a un punto, preso nell' ovale, quasi polo, una retta, di cui la parte fra il polo e l' ovale sia y, l' angolo, ch' ella fa colla sua prima posizione, sia z, mentre un punto, che partendo dal polo, sempre sulla retta rotante, se ne allontana colla flussione $dx = ay^2 dz$, descriva una curva, onde x, distanza dal polo a questa curva, sia sempre proporzionale all' area dell' ovale percorsa dalla retta rotante. Così x descriverà una spirale con giri senza fine, in ciascun de' quali ritornando la retta a una stessa posizione, vi avrà x un nuovo valore: sicchè infinito sarà il numero de' valori di x per ciascun valore dell' angolo z. Ora se un' Equazione finita desse l' area dell' ovale, non potrebbe non dare ciò, che è lo stesso, la fluente finita di $ay^2 dz = dx$; lo che è impossibile, avendo questa fluente x infiniti valori. Dunque impossibile è un' Equazione finita, che dia l' area dell' ovale.

Non è necessario ch' io aggiunga quel di più, che dice Newton, e ognun può leggere nel libro citato. Ma negandosi dal Lemma la possibilità dell' Equazione finita soltanto pigliando la quadratura in qualunque modo, *generaliter*, ci convien vedere se perciò si possa la negazione restringere a non includere quella di una quadratura del cerchio definita.

17. Dico pertanto che a giudicare a quali casi s' abbia, o non s'abbia da estendere il Lemma, convien vedere a quali perfettamente s' adegui, o non s' adegui la dimostrazione. Vi sono curve ovali solo in parte, esempigrazia quella dell' Equazione $ay^2 = 6a^3 + 5a^2x - 2ax^2 - x^3$, che oltre l' ovale

le BDEF (Fig. 3.ª, dove comincian le x in A, positive verso B) ha due rami GH, GI stendentisi all' infinito; ed è chiaro che facendo rotare AH intorno ad A, il caso non è più lo stesso. Di che segue non già che la curva sia quadrabile algebraicamente, ma che non si può per lo Lemma di Newton asserire che nol sia, e convien chiarirsene altrimenti. Che se perciò avendo $ydx = \frac{dx}{\sqrt{a}}\sqrt{6a^3+5a^2x-2ax^2-x^3}$, fatto $a+x=z^2$, sostituendo ne traggo $ydx = \frac{2z^2dz}{\sqrt{a}}\sqrt{6a^2+az^2-z^4}$, flussione comparabile alla forma XC di Cotes, veggo esserne la quadratura più trascendente di quella delle pure ovali; poichè l' esponente di z fuori del radicale ripugna alla riduzione della fluente a numero finito di termini mediante le quadrature del cerchio o dell' Iperbole, mentre a quella del cerchio riducesi la quadratura delle mere ovali, di cui assai acconcia Equazione per servirci di esempio si è $a^{2m+2}y^2 = b^2(c^2-x^2)(e^m+x^m)^2$, dove sia e non minore di c, ed m numero intiero e positivo, o zero. Nel qual caso essendo e^0, x^0 sempre $= 1$, l' ordinata, che generalmente è $y = \pm\frac{b(e^m+x^m)}{a^{m+1}}\sqrt{c^2-x^2}$, diventa $y = \pm\frac{2b}{a}\sqrt{c^2-x^2}$, Equazione all' Ellisse, di cui $2c$ sia l' asse delle ascisse x; e l' altr' asse $\frac{4bc}{a}$. Che se $2b = a$, la curva sarà il cerchio del raggio c. Negli altri casi se m è pari, l' ovale sarà simmetrico, diviso dai due assi in quattro parti eguali e simili; se casso, saranno simili ed eguali soltanto le due parti divise dall' asse, su cui si tagliano le x; ma le parti divise dalla perpendicolare al mezzo di esso asse, dove $x = 0$, saranno ineguali e dissimili, maggiori dal lato, verso cui x è positivo. E per la quadratura, sì nell' uno, che nell' altro caso avendo $ydx = \pm\frac{bdx}{a^{m+1}}(e^m+x^m)\sqrt{c^2-x^2}$, moltiplicando sopra e sotto per $\sqrt{c^2 - x^2}$, ho $ydx = \pm \frac{bdx}{a^{m+1}} \times \frac{e^m c^2 - e^m x^2 + c^2 x^m - x^{n+2}}{\sqrt{c^2 - x^2}}$, flussione di quattro termini, de' quali i due primi hanno sempre la fluente per mezzo della quadratura del cerchio, e i due altri l' hanno similmente per la medesima, quando m è pari; e quando è caſſo, l' hanno algebraica. Poichè sappiamo che, essendo in parti del raggio $= 1$, A l'arco, il cui seno $= \frac{x}{c}$, la fluente di $\frac{e^m c^2 dx}{\sqrt{c^2 - x^2}}$ è ec^{m2} A, quella di $\frac{-e^m x^2 dx}{\sqrt{c^2 - x^2}}$ è $\frac{1}{2} e^m x \sqrt{c^2 - x^2} - \frac{1}{2} e^m \mathrm{A}$; e per le altre, la cui fluente è algebraica sempre che m è caſſo, quando l' esponente è pari, si ha $\int \frac{x^p dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{3.5.7 \ldots (p-1)}{2.4.6 \ldots p} \left[\mathrm{A} - \left(x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{2.4}{3.5} x^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7} x^7 \ldots + \frac{2.4.6 \ldots (p-2)}{3.5.7 \ldots (p-1)} x^{p-1} \right) \sqrt{c^2 - x^2} \right]$. Sicchè quanto v' ha di trascendente in queste quadrature, riducesi ad A, e alla ragione del raggio alla periferia, onde si ha l' area del settore $\frac{1}{2} c^2 \mathrm{A} = \mathrm{DCM}$ (fig. 2.ª), supposto $\mathrm{CP} = x$, $\mathrm{CB} = c$; e però eziandio quella di $\mathrm{DC}pm = \frac{1}{2} c^2 \mathrm{A} + \frac{1}{2} x \sqrt{c^2 - x^2}$, di cui è facile capire che ha da esser funzione algebraica l' area dell' ovale, generata e percorsa dall' ordinata y nel passare dalla primitiva sua posizione su CD, dove $x = 0$, $y = \frac{bce^m}{a^{m+1}}$, a quella, che le conviene quando $x = \mathrm{C}p$.

18. Ma se così vediamo, che la trascendenza della quadratura dell' ovale è la stessa che quella di A, e del suo settore, vediamo insieme che senza aver fatto uso di alcuna

ipotesi di rotazione, come Newton, troviam niente meno, ch' essa deve avere infiniti valori corrispondenti a una qualunque x; poichè nell' analisi, che abbiam seguita, nulla avendo introdotto, che possa ristringer A al solo primo arco, di cui è il seno $= \frac{x}{c}$, forza è che ogni altro arco dello stesso seno parimente soddisfi all' Equazione. L' intendimento ristretto alla ricerca della superficie rinchiusa dalla curva ci fa voler l' impossibile, che ne finisca la flussione quando l' area è tutta percorsa una volta, com' ella si concepisce finire allorchè l' area si fa generare dal prodotto della doppia ordinata per la flussione dell' ascissa. Ma perchè tal supposto non può fare che la quadratura non sia quello, che veramente ella è; pur partendo da esso il calcolo va alla ~~fluente~~ propria e naturale delle curve rientranti in se, ovali puri, che come le spirali, vogliono concepirsi generate dalla rotazione di un raggio, per così chiamarlo, vettore, il quale se ad ogni suo ~~ritorno~~ a una stessa direzione ogni volta è maggiore, descriverà una spirale; se vi ritorna sempre uguale senza esserlo da per tutto, descriverà un' ovale; ed un cerchio, s' è uguale da per tutto. Fingiamo un' orbita d' un pianeta non alterata dall' attrazione degli altri; acciocchè sia veramente un' Ellisse, le aree dal raggio vettore descritte, proporzionali ai tempi, non abbraccieranno elle una, o più intiere superficie dell' Ellisse, quando il tempo è maggiore di una o di più rivoluzioni? Ma stando al cerchio $\frac{1}{2}\pi$, essendo il raggio $= 1$, per ogni area $\frac{\pi}{2z}$ si concepisca che z partendo dall' infinito per dare alle aree il primo nascimento, venga via via scemando, onde $\frac{\pi}{2z}$ riceva successivamente tutti i valori delle parti del cerchio, sinchè giunga a quello del cerchio intiero, quando $z = 1$, non v' ha cosa che impedisca z di proseguir quindi scemando finchè giunga a zero, onde $\frac{\pi}{2z}$ passerà a tutti i valori delle medesime parti coll' aggiunta successivamente all' infinito di ciascun numero di cerchj intieri. Or nell' aggiunta di ciascun cerchio, ogni volta, che la parte cadrà sopra uno stesso punto, il seno, e tutte le altre linee rette, funzioni similmente dell' angolo, ritorneranno le stesse. Dunque se vi fosse un' Equazione finita $E = \frac{\pi}{2z}$, non potendo E non esser funzione di alcuna di esse linee rette, dovrebbe per uno stesso valore di essa retta dare all' area infiniti valori diversi. Che però non v' ha dubbio che la dimostrazione di Newton convenga perfettamente e s' adegui alla quadratura del cerchio, eziandio, se vogliamo così chiamarla, definita, cioè per Equazione trovata in certo supposto, con certo modo, per certo caso, ma Equazione verace, qual vuol esser quella, di cui si nega la possibilità.

19. Che se alcuno domandasse, poichè Newton ha negato solo *generaliter*, se il suo Lemma lasci luogo ad eccezioni di aree d' ovali puri di quadratura algebraica, dirò che la dimostrazione non soffre eccezioni di vere quadrature, cioè di spazj fra una curva semplice e linee rette. Ma fra due ovali, o fra un ovale ed un cerchio si possono avere lunule quadrabili algebraicamente, non solo sul totale, come le comprese fra due cerchj, ma eziandio per ciascuna loro parte fra due ordinate. E ad averne un esempio basterà costruire sullo stesso asse un caso della formola $y = \pm \frac{b(e^m + x^m)}{a^{m+1}} \sqrt{c^2 - x^2}$, preso m caffo, e $y' = \pm \frac{K}{c} \sqrt{c^2 - x^2}$, facendo $K = \frac{b c e^m}{a^{m+1}}$, e si avrà (fig. 4.ª) un ovale AGDMB, e un' Ellisse, o un cerchio, se $be^m = a^{m+1}$, che avranno comune, oltre all' asse AB, l' ordinata CD al centro. E la parte trascendente della quadratura dell' ovale essendo appunto la quadratura dell'

dell' Ellisse o del cerchio, le lunule AFDG, DOBM saranno la parte algebraica, così che DOM sarà la fluente di $\frac{b\,d\,x}{a^{m+1}} \times \frac{c^2 x^m - x^{m+2}}{\sqrt{c^2 - x^2}}$, fatto $x = \mathrm{CP}$.

Ma questo torna a quello, che ho già detto a proposito delle curve Bernoulliane, non esservi difficoltà che la differenza, o la somma di trascendenti sia algebraica, e non fa che maggiormente schiarire che tutta la trascendenza degli ovali sta in quella del cerchio. Onde solo resta a vedere se anche prescindendo dalla impossibilità di aver da un' Equazione finita il numero senza fine delle aree corrispondenti a ogni valore di $n\pi + A$, si possa dar altra dimostrazione *a priori* dell' impossibilità della quadratura del cerchio per Equazione finita.

20. Ma perciò convien ricordarci che abbiam dimostrato che se la quadratura fosse algebraica pel cerchio intiero, il sarebbe necessariamente per tutti i segmenti sottesi ad angolo, che si possa tagliare geometricamente; ed è chiaro che se fossero algebraiche l' aree di tali segmenti, il sarebbero niente meno gli spazj fra le corde loro, e la metà di questi fra i seni; onde avremmo un' infinità di spazj fra due seni il diametro e l' arco, de' quali sarebbe la quadratura algebraica. Onde mi basterà dimostrare che non v' ha alcuno di tali spazj, che non sia trascendente.

Dico adunque che la grandezza di tali spazj, e la cognizione, che ne possiamo avere, dipende da quella dei seni; onde la nostra cognizione di essi spazj non può essere più determinata e perfetta della cognizione, che abbiamo, de' seni; essendo un principio evidente che ogni cognizione ricavata da alcun' altra, dove questa sia in difetto, il sarà essa parimente. Or la cognizione de' seni ha l' imperfezione, che la relazione loro al raggio è trascendente, ogni qual volta la ragione dell' arco alla circonferenza è irrazionale. Dunque questa stessa imperfezione si ha da trovare nella cognizione delle aree, quali si cercano, relativamente allo stesso raggio. E farebbono eccezione i seni, la cui relazione al raggio è algebraica, se in alcuna parte fossero tutti tali. Ma sono frammischiati in modo che non v' ha spazio finito fra due seni algebraici, in cui non cada alcun seno trascendente; non potendosi assegnare una differenza finita fra due ragioni razionali di due archi alla periferia, che non si possa trovare una irrazionale, che ne differisca meno. Sicchè non vi può esser fra' seni intervallo finito, dove la quadratura non dipenda da' trascendenti. Dunque di niuno si potrà avere quadratura non trascendente.

Che se alcuno dicesse valer l' argomento soltanto per la cognizione diretta, che si ricavi da' seni, ma non per l' indiretta, che si traesse dal sapere che un tale spazio deve essere la tantesima parte del cerchio, osserverò primieramente che soddisferebbe sempre al mio intento di mostrare che l' impossibilità di un' Equazione finita di tanti valori, quante successivamente sono le aree corrispondenti a $n\pi + A$ non è la sola ragione della trascendenza della quadratura del cerchio. Rimanderò poscia a quanto ho già detto in più luoghi sull' assurdità del supposto d' un' Equazione, che non sia generale, aggiungendovi che il supporla unicamente per l' intiero cerchio, è un supporre che un impossibile abbia luogo in quel caso appunto, in cui, se non fosse impossibile, sarebbe men probabile. Perchè ogni lume, che abbiamo sulle vie di pervenire alla cognizione dell' area del cerchio, ci mostra che la via non è dal tutto alle parti, ma dalle parti al tutto; e dacchè ricorrendo agli evanescenti, o agli infinitamente piccoli abbiam tanta facilità di determinarla per serie, non possiam però aver il tutto, se non come somma e moltiplice di parti minori. L' intiera periferia, l' area del cerchio non dipendendo che dal raggio, agevolmente si scorge che dalla sola immediata considerazione di questo, e di quella non si può trar nulla. Mediatamente se ne conosce il rapporporto; e la conoscenza accertatissima, che se ne ha, ci conferma col fatto quello, che s' è dimostrato al n.° 13, che la ragione del cerchio al raggio, $\frac{1}{2}\pi = 3,14159$. &c. è trascendente. Poichè cercati i denominatori, che la riducono a frazione continua, 3, 7, 15, 1, 292, &c. (v. la Grange *Additions aux Elémens d'Algebre d'Euler* t. II. pag. 394) proseguendo il calcolo, quanto si voglia, si trovan senza fine le frazioni continue, e senza ritorno periodico de' medesimi denominatori; onde si scorge che il rapporto non solo non è frazione razionale, ma nemmeno irrazionale riducibile a termini finiti mediante radicali. Sicchè resta esclusa anche dalla certezza di fatto la possibilità di un' eguaglianza eziandio fortuita fra l' area del cerchio e una grandezza rettilinea, che si possa col raggio ottenere dalla geometria piana.

21. Ma già parmi aver detto più che assai per accertare la trascendenza della quadratura del cerchio, onde non potendo essa darsi con un numero finito di termini algebraici, ne segue l' impossibilità d' ogni costruzione geometrica. Mi rimane a dire alcuna cosa dell' altra parte della mia prima proposizione, cioè che faranno cosa utile i Maestri di Geometria cospirando a divolgare che la quadratura del cerchio, com' ella è possibile, è conosciutissima. Essi non ignorano i valori calcolatine a cotante figure, e ripetuti in tanti libri e tavole, onde il computo degli archi, come quello de' seni, e delle tangenti, sia naturali, sia co' logaritmi, vien ridotto a una facilità e precisione tale, che non ne può nemmeno far degno concetto chi non è molto esercitato in ogni maniera di calcoli delle mentovate funzioni trascendenti. Sanno che coi valori numerici e una buona scala di parti millesime si hanno le grandezze lineari esatte quanto in pratica s' abbiano per costruzioni geometriche. Sanno che senza libri è facile tener a memoria la ragione di 7 : 22; o più esattamente 113 : 355 del diametro alla circonferenza,

e vi si possono aggiungere quella di 11 : 14, dell'area del cerchio al quadrato del diametro, e di 11 : 21 della sfera al cubo, o più esattamente la ragione di 355 : 452 per l'area, e quella di 355 : 678 per la sfera, delle quali i termini 452, e 678 dovendo essere come 2 : 3, l' ultimo 678, facile a rammentarsi per lo seguito naturale de' numeri 5, 6, 7, 8, può servire ad accertarci dell' altro 452. Ma non è forse inutile che sappiano ancora che per operazioni da farsi senza scala vi sono molti mezzi, non pochi de' quali si possono vedere nel libro già citato di Montucla (pag. 61–64.) Io ne accennerò solo due, il primo di Huygens, che per aver il quarto della periferia, diviso un semicircolo in due parti eguali AB, AD (Fig. 5.ª) e l' altra in tre BE, EF, FD, tira le corde AE, AF, ed ha AG + GH = segante 15.° + 2 tang. 15° = 1, 571174565, posto il raggio = 1, e però AB = 1, 5707963. L'altro più esatto del P. Kolhanski, che menate ad angolo retto BD, AI, e tagliato BE di 60°, colla prolungata CE taglia in K la tangente al punto I, e fatto

$$KL = 3CI,\ \text{ha}\ AL = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = 3,\ 14158333385\ ,$$

mentre la semicirconferenza è 3, 14159265.

22. A questi aggiungerò una mia costruzione di un quadrato *proxime* uguale al cerchio col centro stesso, e i lati nella direzione, che si vuole.

Siano i due diametri AB, DE (Fig. 6.ª) in essa direzione; tirisi AE, e col raggio CA, fatto centro in A, taglinsi gli archi A*a*, A*b*, e fatto centro in E, si tagli E*m*. Si congiungano i punti *a*, *b*, con una retta *ab* prolungata bastantemente, la quale tagliando AC in *d*, col raggio A*d* si tagli A*n*, e divisa *mn* in due parti eguali in *o* portisi E*o* di *d* in *e*, e tirisi C*e*, che taglierà la circonferenza in un punto *r*, per cui facendo passare FG parallela ad AB, e menando alla stessa distanza C*s* dai diametri le parallele FH, GI, HI, si avrà il quadrato quale si domandava.

Poichè ponendo $AC = 1$, sarà $AE = \sqrt{2} = 1,4142136$ *proxime*. Dunque togliendone via $An = Ad = 0,5$, resterà $En = 0,9142136$. Ma $Em = 1$. Dunque $mn = 0,0857864$, $no = 0,0428932$, che aggiunto ad En, dà $Eo = 0,9571068$ $= de$, metà della tangente di eCA. Ora per mezzo delle tavole dalla tangente passando al seno, troverassi quello di eCA essere 0,8863417. Il lato del quadrato eguale al quarto del cerchio è 0,8862271. Si sarà dunque fatto maggiore del vero soltanto di 0,0001146. E il quadrato, che così riesce $= 0,7856014$, mentre dovrebb' essere 0,7853982, eccederà solo di 0,0002032.

Che se, dato il quadrato, si volesse il cerchio, converrebbe, tirate le rette AB, DE, che dividono i lati in due parti eguali, e danno il centro C, da esso con un raggio ad arbitrio descrivere un cerchio, in cui colle stesse operazioni, che dianzi, determinata de, si meni Ce a tagliare un lato del quadrato in un punto r; quindi col raggio Cr descrivere il cerchio, che sarà il richiesto.

23. Ma nell' esporre sì fatte pratiche è d' uopo farsi incontro a un inganno, che più ch' altro può lusingar le speranze de' meno intelligenti a ostinarsi nella ricerca d' una costruzione geometrica, che quadri il cerchio. Sembra loro che siccome si trova geometricamente un lato prossimo, il quale se tuttavia è maggiore, è pur chiaro che si può aver minore; così con alcuna delle infinite combinazioni possibili si abbia pure a poter trovare il punto vero: poichè certamente questo punto esiste, e crescendo, o scemando, vi si ha pure a dar dentro. Eglino si vogliano però avvertire non esser dubbio che può alcuno imbattersi a indovinarlo operando, e può un quadrato fatto per esempio colla costruzione data quì dianzi riuscire esattamente eguale al cerchio, quanto in pratica possa mano d' uomo fare un quadrato eguale ad altro quadrato. Ma la possibilità, che si nega, non è quella dell' eguaglianza perfetta d' un quadrato ad un cerchio, ma sibbene che tale uguaglianza possa essere la ne-

necessaria conseguenza di una costruzione. Non è l'eguaglianza pratica, ma la speculativa, che si nega. Onde poniamo il caso che alcuno trovasse una costruzione, che desse il lato vero a dieci, a venti, a cento cifre, o figure, sarebbe niente meno cosa certa che la sua costruzione non darebbe veramente la quadratura, ma sibbene un' altra grandezza, che nell' estensione è quasi la stessa, ma nel genere è diversa affatto, poichè la sua relazione al raggio non è trascendente, come quella del cerchio si è dimostrata.

Non ho sfuggito di ripeter cose notissime per ottenere il mio intento. Siccome però non potevano le più esser tali, che le intenda chi solo ha studiato i primi elementi di geometria, che dovrà fare chi, non capendo, non legga o non resti persuaso? Rivolgersi ad imparare quella parte delle matematiche, il cui scopo è per l' appunto la ricerca delle quadrature; parte bella maravigliosamente ed utilissima, nella quale qualunque tempo ei consumi, se ha fior d' ingegno, non andrà senza frutto, mentre egli dietro Newton e tanti sommi Geometri studiandosi di recarla a vie maggior perfezione, tenterà quel più, che gli possa venir fatto. Ei dee pur capire che, se la quadratura del cerchio, com' ei vuol credere, è possibile alla geometria piana, vieppiù saràllo valendosene, senza ristringervisi; e se v' è strada per giungervi, la scorgerà più facilmente chi conosca bene quella, per cui si giunge alla quadratura d' infinite altre curve. Ma forse alcuno risponderà ch' ei non vuole studiar tanto, e niente meno pretende sapere quello, che chi più ha studiato, non ispera di poter saper mai; onde converrà lasciarlo nel suo inganno, forse dolce a lui ancor più che molesto a chi abbia da esaminarne gli sbagli.

Fig. 4.

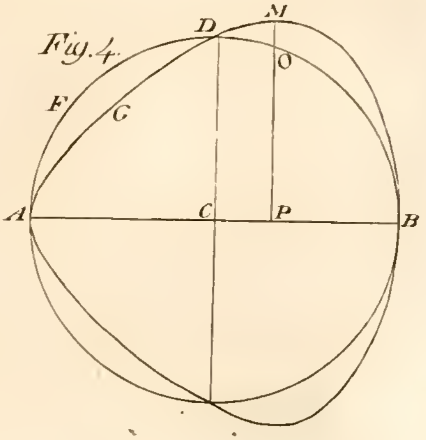


Fig. 5.

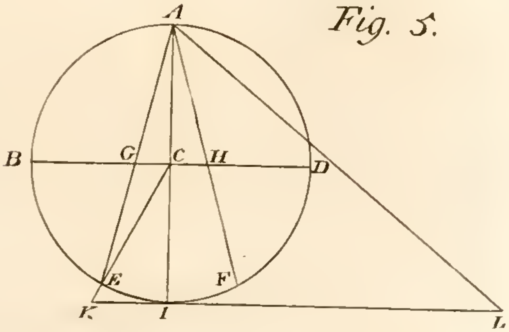

A
B
G
C
H
D
E
F
K
I
L

Fig. 6.

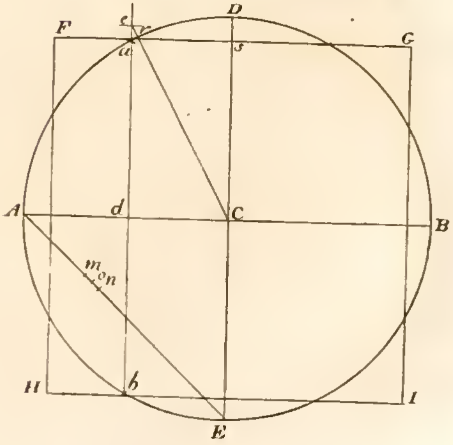

F
e
r
D
G
a
s
A
d
C
B
m
o
n
H
b
I
E

Fig. 1.

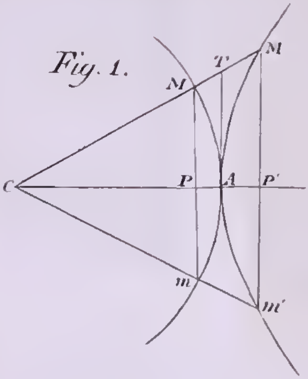


Fig. 4.

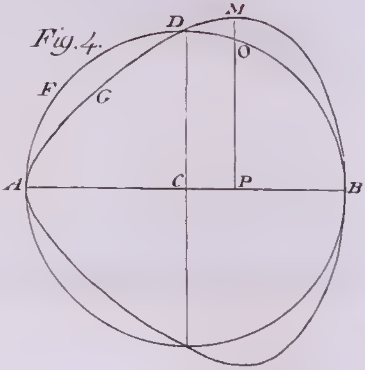


Fig. 2.

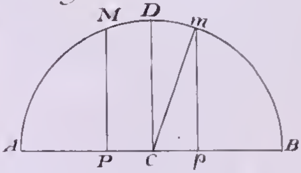


Fig. 5.

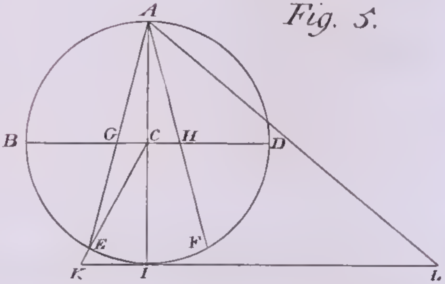

A
B
G
C
H
D
E
F
K
I
L

Fig. 3.

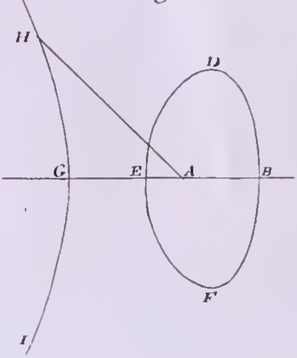
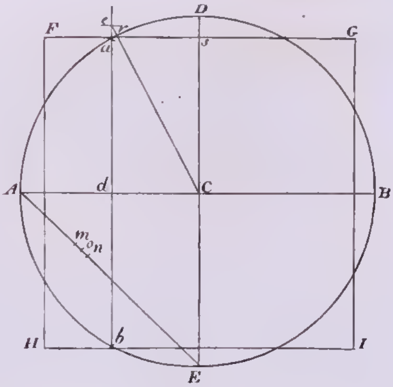


Fig. 6.


D
F
e
r
G
u
s
A
d
C
B
m
o
n
H
b
I
E

DELLA RESISTENZA E DELL' URTO
DEI FLUIDI
MEMORIA

Di Vittorio Fossombroni

Ricevuta il dì 4. *Novembre* 1801.

Avendo adesso potuto riprendere in considerazione i resultati di alcune esperienze da me instituite nell' anno 1795., e tanto essi, quanto altre analoghe idee relative al movimento dei fluidi, e al regime dei Fiumi, e dei Canali artefatti, interessando la moderna Idrometria non ho creduto doverne differire la pubblicazione.

L' Inglese Sig. Robins nel suo Trattato sull' Artiglieria è stato uno dei primi a far delle riflessioni estese in proporzione del bisogno sulla influenza che ha nella resistenza, e nell' urto dei fluidi il modo con cui le molecole di essi passano alla parte posteriore del solido che soffre l' urto, o la resistenza. Chi conosce le ipotesi, e le teorie del Commendator Juan Spagnolo seguite ultimamente con maggior cautela dall' ingegnoso e fertile Geometra Francese Prony, e le esperienze del Cav. du Buat, ed il Classico esame delle Resistenze dei fluidi fatto dai tre Luminari della Francia D' Alembert, Condorcet, e Bossut nel 1777., dalla stessa varietà, e moltitudine di vedute e di fatti resta persuaso della opportunità di appurare ulteriormente qualche elemento appartenente a questa dottrina.

Mi sembrò pregio dell' opera principiare a certificare in genere l'influenza sopraccennata della maggiore, o minor facilità con cui il fluido resistente, o urtante passa dalla parte anteriore alla posteriore del solido, e perchè le esperienze parlassero senza equivoco, credei espediente isolare l' elemento in questione, il più che fosse possibile dagli altri, che esaminati per lo più insieme anche dai più sagaci esperimentatori, ed offrendosi contemporaneamente allo sguardo contribuiscono l' un coll' altro a celarsi, ed a nascondere la desiderata verità. Immaginai pertanto una sottile, ma rigida lamina di ferro larga un braccio quadro, e situata orizzontalmente nell' acqua, attaccata per i quattro angoli ad un cordoncino che accavalciava due agilissime pulegge, e portava all' altra estremità un peso da variarsi a piacere, sicchè a misura che questo discendeva, veniva a muoversi verticalmente a traverso all' acqua la lamina parallelamente alla sua orizzontale posizion primitiva.

Considerai che se le molecole fluide si gettano dalla posteriore parte del corpo per la pressione del fluido che a ciascheduna di esse sovrasta, a misura che la lamina di ferro s' avvicinasse alla superficie dovevano diminuire le colonne prementi, e per conseguenza anche l' energia del fluido nel prender posto di dietro alla lamina sollevata, e quindi crescere la Resistenza.

Stabilii pertanto un regolo di legno verticale diviso in braccia Fiorentine prossimo alla linea che descriveva il peso motore nella sua discesa, acciò giunto il moto ad una sensibile equabilità io potessi accorgermi, se in egual tempo si descrivessero dalla lamina traversante il fluido eguali intervalli. Trovai, come vedremo, maggiore il tempo occorso per descrivere gli ultimi intervalli, e per conseguenza esservi un non equivoco aumento di Resistenza nel diminuire la distanza della lamina dalla superficie del fluido.

Ecco i resultati degli esperimenti che se non hanno tutta quella ubertà di apparato che mi son proposto nel gran piano di esperienze che ho immaginato per illustrare questa teoria, non ostante per la loro moltitudine, e conformità, sembrami che servano per ora, se non ad assegnare la legge con cui questo principio influisce, almeno a mostrare l' irrefragabilità della sua esistenza.

Nella Tavola seguente la prima colonna dimostra i numeri dei resultati, la seconda i diversi pesi motori espressi in Oncie Fiorentine; la 3.^{a}, e 4.^{a} i tempi espressi in minuti secondi impiegati a percorrere due spazi eguali, ciascheduno della lunghezza di un B.° Fiorentino, dopo aver percorso uno spazio indeterminato per giungere alla equabilità; e l' ultima le differenze dei tempi medesimi espresse in centesime di secondo. In questa, e nelle seguenti Tavole ogni resultato è il medio di cinque, di sette, e fino di dodici esperimenti. I resultati 4.°, e 5.° di questa Tavola che aberrano dalla legge degli altri furono raccolti da esperimenti riconosciuti per dubbiosi avanti di ottenere i resultati medesimi.

TAVOLA I.

Numeri dei Resultati	Pesi Motori Oncie	Tempi del primo Intervallo in $1''$	Tempi del secondo Intervallo in $1''$	Differenze
1	3	5, 56	5, 87	0, 31
2	5	4, 38	4, 97	0, 59
3	9	4, 07	4, 47	0, 40
4	14	3, 66	3, 56	— 0, 10
5	15	3, 50	3, 33	— 0, 17
6	17	3, 29	3, 52	0, 23
7	20	2, 83	3, 23	0, 40

La seguente Tavola seconda offre gli stessi resultati dipendentemente da una variazione indotta nell' apparato, consistente nel far percorrere alla lamina dopo giunta alla equabilità tre spazi in vece di due soli, e ciascheduno di essi della lunghezza di $\frac{7}{6}$ di B.° Fiorentino, e quindi cresce una colonna per le differenze tra i tempi dei secondi, e dei terzi intervalli.

TAVOLA II.

Numeri dei Resultati	Pesi Motori Oncie	Tempi del primo Intervallo in 1″	Tempi del secondo Intervallo in 1″	Tempi del Terzo Intervallo in 1″	Differenze tra i primi tempi e i secondi	Differenze tra i secondi tempi, ed i terzi
1	5	7, 38	7, 55	7, 63	0, 17	0, 08
2	15	4, 73	5, 64	5, 67	0 91	0, 03
3	20	4, 58	4, 60	5, 04	0, 02	0, 44
4	30	3, 47	4, 21	4, 42	0, 74	0, 21
5	34	3, 20	3, 36	3, 36	0, 16	0, 00
6	37	3, 18	3, 38	3, 44	0, 20	0, 06
7	39	2, 63	3, 00	3, 33	0, 37	0, 33
8	42	3, 30	3, 10	3, 30	−0, 20	0, 20
9	43	2, 25	2, 50	3, 30	0, 25	0, 80
10	47	2, 12	3, 00	3, 24	0, 88	0, 24
11	52	2, 12	2, 15	2, 30	0, 03	0, 15

I diciotto resultati raccolti da un sì gran numero di esperienze e compresi in queste due Tavole non mi permisero di porre in dubbio l' aumento che subisce la Resistenza quando il solido si muove più vicino alla superficie del fluido. Il Cav. de Borda nelle Memorie di Parigi nell' anno 1767. si incontrò in un resultato analogo che giova quì di riportare. Faceva esso muovere una sfera di 59 Linee di diametro orizzontalmente dentro all' acqua, e con un pendolo a mezzi secondi osservava in quanto tempo la sfera terminava due spazj eguali. Egli trovò come può vedersi dalla seguente Tavola, che animata dal medesimo peso la sfera impiegava sempre minor tempo a percorrere il dato spazio, quando lo percorreva 6 pollici sotto la superficie, che quando lo percorreva due Linee sotto la superficie medesima. Si osservi la Tavola seguente rilevata dalle osservazioni di questo Geometra, ed osservazioni tanto meno soggette a prevenzione in quanto che occorse all' Autore medesimo, senza che fossero il diretto oggetto delle sue ricerche.

TAVOLA III.

Pesi motori	Vibrazioni del pendolo essendo la sfera immersa 6 pollici sotto la superficie del fluido.	Vibrazioni del pendolo essendo la sfera immersa due Linee sotto la superficie del fluido
8 Oncie	$171 \frac{1}{4}$	$173 \frac{1}{2}$
2 Libbre	84	$87 \frac{1}{2}$
8 Libbre	42	$47 \frac{1}{4}$

Ma per assicurarmi che tale modificazione delle Resistenze nascesse dall' elemento in questione, cioè dalla maggiore, o minor facilità con cui il fluido passa dall' anterior parte del solido alla posteriore, credetti necessario variare le esperienze nel modo seguente. Stando fermo l' istesso apparato, variai soltanto la situazione della stessa lamina di ferro dalla orizzontale alla verticale, obbligandola ad ascendere a traverso al fluido per il suo taglio di grossezza insensibile. Immaginai che se veramente la diminuita facilità con cui il fluido si getta dalla anteriore parte del solido alla posteriore sia quella, che produce l' aumento di resistenza, qualora l' istessa lamina si muovesse verticalmente, e per taglio, non avrebbe avuto più luogo il rimpiazzo del fluido alla posterior parte del corpo, e per conseguenza il fenomeno sopra esposto, se era prodotto da questa causa, non doveva più comparire. Anzi attesa l' insensibile grossezza della lamina, in questo caso la Resistenza non poteva nascere altronde che dalla pressione, ed attrito del fluido sopra ambedue le verticali superficie della lamina, e dovendo necessariamente la pressione, e l' attrito diminuire all' avvicinarsi di essa alla superficie, era probabile che s' invertesse l' ordine delle Resistenze, e diminuissero esse a misura che la lamina si approssimava alla superficie del fluido. Ecco i resultati di questo tentativo nella seguente

TAVOLA IV.

Numero dei Resultati	Pesi Motori Oncie	Tempi del primo Intervallo in 1″	Tempi del secondo Intervallo in 1″	Tempi del terzo Intervallo in 1″	Differenze tra i primi tempi, e i secondi	Differenze tra i secondi tempi e i terzi.
1	5	2, 25	2, 10	2, 01	0, 15	0, 09
2	7	2, 80	2, 48	2, 40	0, 32	0, 08
3	10	2, 05	2, 00	1, 98	0, 05	0, 02
4	15	1, 60	1, 42	1, 36	0, 18	0, 06
5	25	1, 27	1, 00	1, 00	0, 27	0, 00

Avendo pertanto in tal guisa levata ogni sensibile influenza alla maggiore, o minor facilità con cui il fluido si getta dalla parte posteriore del corpo esposto alla resistenza (mentre la lamina non aveva grossezza considerabile a questo riguardo) resta non solo confermato ciò che suggeriscono i precedenti resultati, cioè che le resistenze crescono quando il solido è più distante dalla superficie del fluido, ma ancora è manifesto che la pressione delle colonne fluide superincombenti alle molecole aderenti al solido influisce su la Resistenza che il solido risente dalle molecole stesse. E riflettendo alla corrente del fluido che si forma dalla anterior parte del solido alla posteriore, si scorge che la sopraccennata pressione deve influire in questa corrente, la quale modifica le resistenze, e queste in conseguenza vengono a dipendere assai dalla maggiore, o minor facilità con cui il fluido si getta dalla parte posteriore del corpo; e levando questa circostanza almeno sensibilmente, mediante la nostra lamina verticale abbiamo ottenuto nell' avvicinarsi alla superficie un aumento di Resistenza, dal che l' influenza della corrente che si forma attorno ai solidi esposti alle Resistenze, cioè della facilità con cui il fluido si getta al di dietro di essi (quando non sono nel caso della nostra lamina verticale), si è venuta mirabilmente a porre in evidenza.

Ho voluto ulteriormente illustrare questa verità con una indagine fatta sulle esperienze di D' Alembert, Condorcet, e Bossut nel 1777., le quali sebbene destinate particolarmente ad altro scopo mi hanno potuto fornire delle combinazioni, onde costruire altre tre Tavole di risultati coerenti al mio divisamento, avendo così da quell' Opera eccellente potuto dedurre delle verità forse neglette dai tre celebri Autori, come si negligono dai raccoglitori delle ampie messi molte spighe che restano a profitto di chi anche da lungi gli segue.

Tra i piccoli Battelli posti a prova nell' esperienze del 1777. ve ne era uno segnato ivi di numero 3, il quale aveva la fronte rettangolare con la sua orizzontale larghezza di un piede e mezzo in circa. Questo Battello fu mosso per l'istessa lunghezza di 50 piedi in un'acqua stagnante con celerità diverse e con diverse profondità di immersione, in ciascheduna delle quali però rimaneva una parte di esso fuori della superficie dell' acqua, sicchè veniva sempre a formarsi sulla sua fronte quella elevazione, o labbro di fluido che i Francesi chiamano *Remou*, e del quale fu in ogni esperienza osservata l' altezza. È noto che questo Labbro è prodotto dalle particelle di fluido che si accumulano avanti al solido che progredisce, non potendo cedere ad esso il luogo con tanta velocità quanta sarebbe necessaria, acciò il livello del fluido stagnante non si inalzasse avanti al solido; è chiaro inoltre che questo Labbro di fluido sarà a pari circostanze del resto tanto minore, quanto sarà maggiore la facilità con cui le dette particelle lambendo i lembi del rettangolo passeranno dalla anterior parte di esso alla posteriore.

Ciò posto io considerai che qualora la pressione del fluido superincombente a ciascuna particella aderente al lembo del solido, influisca a farla passare dalla anterior parte di esso alla posteriore, è indubitabile che se il solido progredisca sempre con la stessa celerità, ma si aumenti l' immersione di esso sotto la superficie del fluido, sicchè per esempio in vece di una fronte profonda sotto la superficie un solo piede, ne abbia una di egual larghezza, ma profonda di piedi due, le molecole acquee aderenti al lembo del secondo, e più profondo piede di superficie debbono esser premute da colonne più alte di fluido, e se la pressione di queste colonne coopera al passaggio delle molecole stesse dalla anterior parte alla posteriore, la superficie anteriore esposta alla resistenza si accrescerebbe in minor proporzione di quello che si accresse la pressione delle colonne superincombenti alle molecole che incontrano il solido, e per conseguenza esse molecole si troverebbero in proporzione più disposte per questo aumento di profondità del solido a passare alla posteriore parte di esso; e quindi il loro cumulo sulla parte anteriore, ed il Labbro di fluido che indi si produce dovrebbe nell' aumentarsi la profondità del solido, almeno in proporzione diminuire. Tanto appunto riscontrai accadere effettivamente consultando le altezze di questi *Remou*, o Labbri di fluido misurati nelle esperienze del 1770. Dai paragoni che ho fatto di tali esperienze si raccolgono le tre seguenti Tavole, in ognuna delle quali la prima colonna esprime in mezzi minuti secondi il tempo impiegato dal Battello a percorrere 50 piedi; la seconda porta in testa in pollici, e linee segnata la profondità dell' immersione del Battello, e con i numeri corrispondenti verticalmente sottoposti esprime in linee l' altezza del Labbro fluido che si sollevava sulla parte anteriore del Battello; la terza colonna finalmente porta in testa descritta in pollici, e linee la maggior profondità d' immersione del Battello stesso, e con i corrispondenti numeri verticalmente sottoposti dimostra quante linee si sollevava il Labbro di fluido sulla parte anteriore del Battello in ogni corsa.

TAVOLA V.

Tempi impiegati a percorrere 50 piedi espressi in mezzi 1''	Altezza espressa in linee Parigine del Labbro di fluido camminando il Battello alla profondità di pollici 7, e linee 10.	Altezza espressa in linee Parigine del Labbro di fluido camminando il Battello alla profondità di Pollici 12, e linee 10.
51, 49	18	15
47, 00	$18\frac{1}{2}$	17
38, 53	28	24
33, 40	42	34
36, 20	35	29

TAVOLA VI.

Tempi impiegati a percorrere 50 piedi espressi in mezzi 1″	Altezza espressa in linee Parigine del Labbro di fluido camminando il Battello alla profondità di pollici 7, e linee 10	Altezza espressa in linee Parigine del Labbro di fluido camminando il Battello alla profondità di pollici 15, e linee 10
50, 75	18	15
46, 50	18 $\frac{1}{2}$	18
33, 69	42	39
38, 57	28	27 $\frac{1}{2}$

TAVOLA VII.

Tempi impiegati a percorrere 50 piedi espressi in mezzi 1″.	Altezza espressa in linee Parigine del Labbro di fluido camminando il Battello alla profondità di pollici 12, e linee 10	Altezza espressa in linee Parigine del Labbro di fluido camminando il Battello alla profondità di pollici 15, e linee 10
46, 50	17	18
38, 70	24	27 $\frac{1}{2}$
36, 50	29	33
33, 69	34	39

Dalla Tavola 5.ª, e 6.ª si scorge una effettiva diminuzione del Labbro di fluido quando il Battello è più profondo, sebbene il numero delle molecole che debbono sbarazzarsi dall' anterior parte del solido, sia per rispetto alla superficie che incontra la Resistenza cresciuto anco più della metà, come è nel caso dell' aumento d' immersione dai 7 pollici ai 15; e quindi è chiara l' influenza della pressione delle più alte colonne fluide, e se ne manifesta la preponderanza sull' aumentato numero delle molecole. Nè farà specie se nella Tavola 7.ª non si riscontra una assoluta diminuzione, mentre facendosi allora il paragone tra le due profondità di pollici 12, e linee 10 con 15 pollici, e linee 10, 3 pollici non sono relativamente a 12 un aumento capace di produrre una pressione molto maggiore, come facilmente si manifesterà a chiunque vi faccia una mediocre riflessione.

Venendo adunque da tante, e così varie esperienze convalidato il raziocinio, il quale suggerisce che la maggiore, o minore facilità con cui le molecole fluide (dipendentemente dalla pressione delle superincombenti ad esse) passano dall' anterior parte del solido alla posteriore, influisce significantemente nelle intensità delle Resistenze, o degli urti dei fluidi, la spiegazione di vari fenomeni, ed il tentativo di istituire qualche calcolo meno lontano dall' esattezza vengono a facilitarsi.

Primieramente il repentino e quasi saltuario aumento eccessivo di resistenza osservato da Robins, quando le palle delle armi da fuoco traversano con una grandissima celerità l' Atmosfera, si conferma non altronde dipendere (come altri sospettò) che dall' esser maggiore la celerità con cui la palla si muove, di quello che sia in quel caso la celerità con cui l' aria si getta dalla parte posteriore della palla a rimpiazzarne il posto, e per conseguenza restar la palla medesima esposta a tutta l' azione anteriore dell' aria senza alcuna forza che di dietro la contrabbilanci. In seguito resta egualmente spiegato il fenomeno sopraccennato occorso al

Cav. de Borda, e riferito da lui senza fermarsi ad indagarne la causa. La sua sfera alla profondità di 6 pollici doveva più facilmente sbarazzarsi dalle molecole fluide, e per conseguenza soffrirne Resistenza minore che alla profondità di due sole linee. In simil guisa, e per l' istessa ragione, si vedono i pesci ammaestrati dalla Natura, che volendo passare rapidamente da un punto all' altro dell' acqua preferiscono alla linea retta una curva più lunga, ma che offre minori difficoltà al loro passaggio, profondandosi sotto lo strato d' acqua a cui si trovano; e non mancano Nuotatori i quali hanno sperimentato, che il passaggio di qualche corrente veniva loro facilitato profondandosi sotto la superficie dell' acqua.

Parimente i tre celebri Autori delle esperienze dell' anno 1777. nel cap. V. sezione II. della loro eccellente Opera sopra citata, esaminando le Resistenze alle diverse ampiezze di superficie mosse con velocità costanti, trovarono che quando l' ampiezza cresce orizzontalmente, le Resistenze crescono in maggior proporzione che le superficie, ed in proporzione minore quando cresce l' ampiezza della superficie verticalmente. Ambedue questi fatti discordano (sebbene in senso opposto) dalla comune teoria. Spiegano il primo caso quei dottissimi Uomini facendo una general riflessione sulla difficoltà maggiore colla quale il fluido può liberarsi dalla maggior superficie che l' urta ,, car plus la surface est ,, grande, plus l'eau qu'elle pousse continuellement devant ,, elle a de peine à se detourner, et à se remettre de ,, niveau avec le reste du fluide ,, con che sembra abbiano voluto intendere la maggior difficoltà con cui il fluido può portarsi alle dilatate estremità laterali, altrimenti ,, *la Surface* ,, *est plus grande* ancora quando cresce verticalmente; eppure accade precisamente l' opposto, come essi rilevano al §. 19. ove accennano il secondo caso senza altrimenti fermarsi a discuterlo. Inerendo però alle vedute fino ad ora da me esposte, e considerando che le molecole fluide nel passare più facilmente dalla parte anteriore del solido alla posteriore, re, non solo diminuiscono la Resistenza con liberare la strada che il solido deve percorrere, ma ancora con gettarsi a contrabbilanciare dalla parte posteriore una porzione dell' azione che il solido stesso subisce sulla anteriore, ne segue che l' ampiezza di superficie aumentata verticalmente favorisce questi due elementi, e perciò deve scemare in proporzione la Resistenza, al contrario appunto di ciò che per l' istesse cause deve succedere quando l' ampiezza di superficie cresce orizzontalmente.

Sembra a prima vista che contrasti con questa teoria l' autorità del celebre Commendator D. Giorgio Juan, allorquando asserisce che una tavola rettangolare mossa con il suo lato maggiore orizzontale soffre minor Resistenza, che posto il lato medesimo verticale, ma bisogna riflettere ad una diversità sostanzialissima che vi è tra il caso fino ad ora da me contemplato, e quello avuto in mira dal citato Geometra.

Io ho considerato finora una porzione del corpo immerso sempre fuori della superficie dell' acqua, come portano le esperienze Parigine del 1777, laddove il Geometra Spagnolo sottintende dovere in ambedue i casi il suo rettangolo essere totalmente immerso sotto la superficie, e che o sia orizzontale, o verticale il maggior lato, il centro del rettangolo resti sempre ad una egual distanza dalla superficie del fluido in cui si muove.

Con questa condizione, lungi dall' opporsi, combina a meraviglia il fenomeno da lui esposto, e viene anzi all' appoggio della considerazione del passaggio del fluido dai lembi del rettangolo, dipendentemente dalle colonne fluide superincombenti. Infatti assumendo una ipotesi delle velocità che queste colonne posson produrre sulle sottoposte molecole, l' analisi somministra facilmente un' espressione approssimata della somma delle celerità con cui le molecole fluide passeranno dai lembi del rettangolo al didietro di esso, e questa somma si troverà maggiore nel caso del maggior lato orizzontale, che nel caso del maggior lato verticale.

Discendono ancora da questi miei stessi modi di vedere le Resistenze, e gli urti dei fluidi altre conseguenze, della novità ed importanza delle quali giudicheranno gli Idraulici. Non sono molti anni che non si ripete più esser l' istessa cosa, o che un solido si muova dentro un fluido con una data celerità, o che con la celerità medesima il fluido incontri egualmente il solido. Si è appreso in una parola da poco in quà esservi una differenza tra la Resistenza, e l' Urto de' fluidi indefiniti; ben inteso che si conosceva ancor prima che le vene fluide urtanti i solidi osservavano delle leggi particolari. Ignorasi però tuttora un principio onde dedurre questa differenza, ed assegnarne la misura con il calcolo, come sembrami tentabile per mezzo delle precedenti mie considerazioni nel modo seguente.

Nel caso in cui un piano rettangolo di insensibile grossezza si muova in una situazione verticale orizzontalmente in un fluido stagnante, restandone una porzione fuori della superficie, si eleva il Labbro dalla parte anteriore, come si escava una concavità dalla posteriore, e si forma una corrente di fluido dalla anteriore alla posterior parte del solido, la qual corrente ha la pendenza del suo pelo limitata tra la massima altezza del Labbro, e la minima della concavità. I lembi del rettangolo sono continuamente lambiti dalle molecole fluide che contribuiscono a questa corrente. Consideriamo una di tali molecole, e converremo che la primaria causa del suo moto consiste nel moto progressivo del rettangolo, il quale dislivella il fluido, e dà luogo all' azione della colonna fluida che ad essa molecola sovrasta, la quale colonna premente eccita nella molecola una celerità con cui essa si getta nel senso della corrente; cioè dalla parte posteriore del corpo strisciando presso la superficie posteriore, ove l' abbassamento del fluido si rende più sensibile.

Stando così le cose nel caso della resistenza del fluido consideriamo la molecola stessa, (nelle stesse circostanze quanto al resto) ma nel caso dell' urto del Fluido, cioè quando il rettangolo stà fermo, ed esposto all' urto perpendicolare della corrente. Allora si forma parimente il Labbro, e la concavità, e la corrente limitata tra la massima altezza del Labbro, e la minima della concavità non è più l' unica dislivellazione che esista nel fluido, il quale già ne aveva una, perchè il fluido non era stagnante, ma corrente. E per conseguenza venendo in questo caso la molecola eccitata al moto dalla corrente che si forma attorno al rettangolo, essa non resta unicamente affetta di quella celerità che quindi puo venirgli impressa, perchè ne aveva già un' altra dependente da quella comune alla corrente di tutto il fluido, all' urto del quale è esposto il rettangolo.

Per brevità chiamerò corrente parziale quella che si forma attorno al corpo nell' urto, o nella Resistenza, corrente totale quella di tutto il fluido in mezzo al quale stà fermo il solido urtato, e supponendo che il Lettore possa da sè per ajuto della immaginazione formarsi una figura, mi dispenso dal descriverla nello spiegare il mio concetto.

La celerità impressa dalla corrente parziale sarà diretta come nel caso della Resistenza nel senso della corrente stessa, cioè prossimamente nel piano del rettangolo, e quella impressa dalla corrente totale sarà pressochè normale al piano medesimo, l' intensità poi di ciascheduna di queste due celerità verrà a regolarsi sulla pendenza respettiva del pelo delle correnti onde nascono, dal che può inferirsi che la prima sarà per lo più non poco maggiore della seconda. Dunque la celerità con cui effettivamente la molecola passerà alla posterior parte del rettangolo sarà composta di queste due, e la direzione di essa divergerà dal piano del rettangolo, mentre nel caso della Resistenza era prossimamente nel piano stesso.

Riflettendo pertanto che le molecole fluide che si gettano dalla parte posteriore del rettangolo vengono con la loro ro presenza a contrabbilanciare da quella parte porzione dell' azione che il solido soffre dall' altra, o sia, come altri dicono, a diminuire la non pressione, ne seguirà che nel caso dell' urto le molecole fluide si accumuleranno sulla posterior parte del rettangolo con minor facilità, che nel caso della Resistenza, e così l' azione esercitata dal fluido sulla parte anteriore resterà men energica nel caso delle Resistenze, che nel caso dell' urto; e questa sembrami che sia la caratteristica e non osservata differenza tra un caso, e l' altro.

Essendo le celerità dependenti dalla corrente parziale assai variabili corrispondentemente ai lembi verticali del rettangolo, e quelle dipendenti dalla corrente totale (che ordinariamente non è rapida) volendosi in questo caso supporre costanti, le direzioni delle celerità risultanti in ogni molecola che è su i lembi formeranno una superficie, della quale il calcolo può facilmente dare l' Equazione. I differenziali di questa superficie apparterranno ai differenziali di un solido, dall' integrazione dei quali potrà prendersi regola per modellare la figura da darsi alla poppa dei Bastimenti, e specialmente di quelli destinati a rimontare contro le correnti dei Fiumi, o Canali, e mi pare che per mancanza di questa teoria le prescrizioni a tal oggetto suggerite dai Professori sieno suscettibili di ulteriore perfezione.

Introducendo questo elemento per calcolare la differenza tra l' urto, e la Resistenza dei fluidi, non comparisce più sproporzionata la forza necessaria a condurre i Battelli contro le correnti, specialmente nei Canali stretti.

Finalmente anco il fenomeno dei galleggianti, i quali acquistano nell' andare a seconda delle correnti velocità maggiori delle correnti medesime, sembrami che con questo principio possa spiegarsi, e forse con maggiore evidenza di quella che trovasi nel Cav. du Buat (§. 220 della sua opera intitolata *Principes d'Idraulique &c.*) Infatti tostochè un corpo galleggi, è chiaro che la velocità prodotta dalla corrente totale farà sempre divergere le molecole che per la velocità prodotta dalla corrente parziale anderebbero ad accumularsi dalla parte opposta a quella che soffre l'urto della corrente, la quale adunque aumenterà la velocità del galleggiante fino a tanto, che esso per corrispondente Resistenza corregga l'eccesso della velocità concepita, e pervenga al moto equabile.

Passerò attualmente ad esporre la corrispondenza che mi pare vi sia tra le precedenti speculazioni, e la scala delle velocità nelle acque correnti per i Fiumi, o Canali. Modernamente si sostiene che tale scala sia prescindendo dalle Resistenze o costante, o decrescente, andando dalla superficie verso il fondo, da' molti rispettabili Autori dai quali mi stimerò onorato, se vorranno gettare uno sguardo sugli argomenti che io sono per addurre in contrario, e se con candidezza pari a quella con cui oso proporli si degneranno di rettificargli.

La scala decrescente dalla superficie al fondo, oltre ad alcune teorie affette della dubbiezza indivisibile da siffatta materia, si appoggia ancora a degli esperimenti. Tra i più seducenti sono le Sfere di Mariotte, le Aste Ritrometriche del meritissimo Sig. Bonati, e molte dirette osservazioni del Cav. du Buat riportate nell' Opera sopraccitata. A me sembra che dovendo la Sfera che indica la celerità degli strati inferiori esser di gravità specifica maggiore dell' acqua, come di gravità specifica minore quella che segna le celerità della superficie, possono gli strati inferiori eccedere in velocità i superiori in ragione minore di quella, che ha la gravità specifica della inferiore Sfera a quella della superiore, ed in tal caso resta equivoco se la Sfera inferiore rimane indietro, perchè gli strati inferiori abbiano minor celerità dei superiori, o perchè le forze motrici degli strati, che si paragonano non sieno proporzionate alle masse che devono spingere. Il dubbio prende maggior vigore dal rilievo fatto dallo stesso Mariotte, il quale dice, che sotto il Ponte Reale della Senna (cioè dove per la strettezza degli archi il pelo d' acqua prendeva maggior declive, e la corrente maggior rapidità) la Sfera inferiore precedeva la superiore, dal che si presenta a me l'idea, che ove le celerità erano tanto energiche da rendere meno sensibile la differenza tra le due gravità specifiche delle due Sfere, e da variare l'influenza delle Resistenze del fondo, si manifestava la scala delle celerità non decrescente dalla superficie al fondo, ma crescente, come in ogni corrente non alterata credo che sia.

Le Aste Ritrometriche dovendo nell' estremità inferiore essere impiombate, e perciò cadendo assai prossimo ad essa estremità il centro di gravità della parte immersa, sembrami che soggiacciano, per ragioni analoghe all' istesso dubbio promosso sulle Sfere, e quanto agli esperimenti del Cav. du Buat questi sono fatti in Canali di così poca profondità, che le Resistenze del fondo era impossibile che non si facessero risentire negli strati inferiori.

Infatti a pag. 85 e seg. del Vol. II dei suoi principj d' Idraulica, trovansi i resultati delle sue esperienze, e vedonsi fatte in Canali non più profondi di pollici 10, e la maggior parte di 7, di 4, e per fino di due soli pollici di profondità. Egli in tali Canali esperimentò delle Sfere, e dei Mulinetti, e trovò sempre le velocità della superficie maggiori di quelle degli strati sottoposti. Ma non solo si può, come ho avvertito, sospettare la Resistenza del fondo, ma la stessa analisi della sua Tavola offre il fondamento ad un tal sospetto. Si vede ogni volta che il Canale è più profondo, o la corrente è più rapida, ravvicinarsi le velocità degli strati superiori a quella degli inferiori, e questo resultato è così vistoso che lo stesso Autore nelle successive osservazioni principia dal dire = Plus les vitesses à la surface sont petites, plus les vitesses au fond sont avec elles en petit rapport; & au contraire plus les vitesses à la surface sont grandes, plus celles au fond approchent de les égaler. = Dal che parmi che sia naturale l' indurre che continuando la progressione, le celerità degli strati inferiori supereranno quelle dei superiori, lo che combina con il caso osservato sotto il Ponte Reale da Mariotte, l' esperimento del quale fu in un Canale di tre piedi e 6 pollici di profondità ripetuto dal Cav. du Buat.

Mentre compariscono a me soggetti a gravissimi dubbj questi esperimenti, ai quali possono almeno contrapporsi gli esperimenti istituiti con altri metodi da molti antichi e moderni, fra i quali oso citare quelli che io ho fatti con l' Istrumento da me proposto nelle mie Memorie Idrauliche, e che indicano il contrario, credo che le Resistenze dei fluidi provate minori nelle maggiori immersioni conducano ad opinare, che nelle correnti libere, la scala delle celerità debba essere crescente dalla superficie verso il fondo.

Considero la corrente parziale che si forma attorno al solido, il quale restando con una parte di sè fuori dell' acqua, soffre la Resistenza, vedo tale corrente combinata con una pendenza della respettiva sua superficie, e rilevo che quando il solido s' immerge d' avvantaggio, cioè quando la corrente si fa più profonda, evidentemente passa in egual tempo con tal corrente una quantità d' acqua, che alla quantità che passava prima ha una maggior proporzione che quella della seconda profondità alla prima; dunque ho motivo di concludere che gli strati inferiori di tale corrente aggiunti colla più grande immersione del solido si accelerano con maggior proporzione che i superiori, ed in conseguenza di dedurre che questa sia la naturale economia delle correnti non alterate da Resistenze, e regolate sulla pendenza della superficie.

Che se voglia valutarsi tutto a disvantaggio delle precedenti tre Tavole 5ª, 6ª, e 7ª ciò che avvertono gli Autori delle esperienze Parigine del 1777 nel loro rapporto, cioè che l' osservazione dell' altezza del *Remou*, ossia Labbro di fluido è soggetta a qualche equivoco, e se voglia negarsi fiducia all' indizio di maggior rapidità della corrente parziale dedotto dal proporzionale decrescimento di questo Labbro, non credo almeno sarà da negligersi il prospetto offerto dagli stessi Autori, delle Resistenze cresciute in proporzione delle superficie aumentate orizzontalmente, e scemate in proporzione delle superficie aumentate verticalmente, e che a differenza delle tre sopraddette Tavole è senza equivoco, come giova quì il porre sott' occhio, lasciando ciò che non interessa la questione

TAVOLA VIII.

Rapporto delle Resistenze dirette per superficie presso che egualmente immerse, ed inegualmente larghe.		Rapporto delle Resistenze dirette per superficie egualmente larghe, ed inegualmente immerse.	
Pesi calcolati.	**Pesi sperimentati.**	**Pesi calcolati.**	**Pesi sperimentati.**
23, 33	24	21, 15	20
27, 24	28	25, 12	24
30, 83	32	29, 96	28
35, 04	36	34, 15	32
38, 95	40	39, 47	36
40, 74	44	43, 37	40
46, 93	48	46, 64	44
		50, 24	48
Variate le	**dimensioni.**	**Variate le**	**dimensioni.**
20, 15	22	16, 44	16
24, 12	25	18, 86	18
27, 08	28	21, 69	20
29, 80	30	25, 54	24
32, 56	32	27, 89	26
26, 01	38	30, 20	28
		34, 06	30
		36, 37	32

Le Resistenze calcolate nel caso dell' eguaglianza d' immersione sono sempre minori di quelle effettive, e nel caso della disuguaglianza sempre maggiori, ed è notabile che in questo secondo caso l' eccesso è quasi sempre maggiore di quello che sia il difetto nel primo.

Riflettendo adunque che una causa molto energica deve concorrere a produrre questo proporzionale decremento di Resistenza, e che le molecole fluide col passare più facilmente alla parte posteriore del solido non solo scemano il carico alla anteriore, ma ancora tendono ad equilibrarne una porzione accumulandosi dalla parte opposta a quella che soffre la Resistenza, e considerando inoltre che non comparisce altra cagione di questo fatto, altronde innegabile, credo dover persuadermi che gli strati inferiormente aumentati alla corrente parziale hanno maggior celerità dei superiori come fu proposto di provare, e come con qualche piccola varietà di raziocinio, anco dalla Resistenza che scema per i solidi totalmente immersi quando cresce la distanza di essi dalla superficie del fluido, può venire a confermarsi.

Apprendo le differenze che possono rilevarsi tra la precitata corrente parziale, e le stabilite correnti dei Fiumi, e Canali, e non ignoro che quelli i quali negano la scala delle celerità crescente dalla superficie verso il fondo, ed opinano che sia decrescente, ovvero costante, sicchè tutti gli strati abbiano l' istessa celerità (s' intende sempre prescindendo dalle Resistenze), sono appoggiati, oltre agli esperimenti sopraccennati, ancora a delle teorie, tra le quali una delle più applaudite è la seguente.

Si fa pertanto l' Ipotesi che ogni molecola fluida sia animata al moto da una quantità eguale per tutte, e tal quantità si suppone essere la differenza tra due colonne prossime, che sono necessariamente ineguali attesa la pendenza del pelo della corrente; quindi si conclude che ogni molecola a qualunque distanza sia dalla superficie, subisce l' azione d' una egual pressione della detta differenza tra le due prossime colonne, e con questi principj il raziocinio conduce facilmente alle indicate conseguenze.

Io comprendo bene che dati due Tubi comunicanti, nei quali l' acqua sia tenuta forzatamente ad ineguale altezza, ogni molecola compresa tra il fondo, e la minore delle due altezze, sarà esposta a subire l' azione della differenza tra le due altezze del fluido, ma sia prevenzione per antichi insegnamenti, sia limitazione di talenti, non giungo a comprendere, come questo possa realizzarsi quando tutte le molecole componenti tanto la più alta, quanto la meno alta delle due prossime colonne, sono non in equilibrio ma in moto.

Aggiungo che quando osservo le onde, e le increspature della sola superficie di un Fiume, mi si presentano le molecole delle correnti come mosse con direzioni sì varie, ed intralciate che non so come ammettere per unica e costante forza motrice quella risultante dal peso della differenza tra le due prossime colonne.

Nella difficoltà di tracciare i moti particolari delle molecole credo, che prescindendo da ciò che i fatti sieno direttamente o indirettamente per suggerire, faccia d' uopo partirsi, e prender lume, ove possibil sia, da qualche principio generale. A me sembra che tale ne sia uno, il quale io chiamerò *Tendenza del fluido a spianarsi*. E' chiaro che ogni fluido, prescindendo dagli ostacoli solidi, e dalle chimiche affinità e respettive particolari attrazioni dei suoi componenti, abbandonato sopra una porzione di quella superficie che le leggi della gravità assegnano al Globo terraqueo, vi si spianerebbe sopra distendendovisi fino all' ultima sottigliezza competente alle sue componenti molecole.

Io penso che sebbene l' attualità di tale spianamento non accada, sia però indivisibile dal fluido la tendenza a spianarsi, e questo principio abbracciando il moto e l' equilibrio, comprende il principio statico dell' eguaglianza di pressione in tutti i sensi, e se ne deducono molte altre proprietà generali, che dimostrerò in altra occasione, in cui mi propongo di esporre come possa esprimersi analiticamente .

Frattanto inerendo a questo, io considero un Vaso cubico pieno d' acqua in equilibrio , e suppongo che momentaneamente si tolgano le verticali pareti del Vaso, sicchè la tendenza allo spianarsi si metta in attività . Ciò posto , io considero due molecole fluide situate in una superficie verticale , ed in una istessa verticale colonna del fluido a qualunque distanza l' una dall' altra . Nel momento in cui la tendenza allo spianarsi principia ad agire, la molecola inferiore concepisco che non può spingere la superiore verso la parte, ove per la tolta parete del Vaso è libero il movimento, ma la superiore concepisco che per mezzo di tutta la porzione di colonna intercetta tra le due, può bensì contribuire a sì fatto movimento dell' inferiore . Lo stesso dicasi di due molecole situate in una qualunque delle interne verticali colonne del fluido .

Sì fatto discorso sembrami che non resti alterato, se suppongasi che tolgasi momentaneamente una sola delle pareti verticali, e nemmeno se in vece di una forma cubica abbia la figura di un lunghissimo e stretto parallelepipedo , a cui si tolga momentaneamente una delle due più strette verticali pareti, nel qual caso mi si presenta una corrente con le molecole degli strati inferiori più disposte al moto di quello che lo sieno le superiori .

Qualunque sia il valore che si accordi a questo raziocinio , io sono convinto che i teoremi generali adattabili alla pratica Idrometria si riducono a quello del Castelli, cioè che nelle correnti stabilite l' ampiezza delle sezioni è in ragione inversa delle velocità . Con esso credo che sia degno di andar del pari un altro non abbastanza valutato , e che sebbene non tanto preciso, è in genere egualmente sicuro , cioè , che le velocità delle correnti dipendono e si regolano dalla pendenza del pelo della superficie con una legge , che delle esperienze ben fatte sarebbe utile che determinassero . Ve ne è finalmente un terzo che bisogna convenire aver luogo almeno in molti casi, e consiste negli aumenti, e decrementi delle velocità in ragione maggiore degli aumenti, e decrementi delle portate dei Fiumi, al che si riduce la famosa Teoria di Gennetè. Sono noti gli esperimenti instituiti per illustrarla in canali artefatti, e nei Fiumi specialmente tra la Samoggia, ed il Reno di Bologna; ma offrendo l' Arno per una singolare circostanza un argomento a favore di questa teoria, non voglio lasciare di riportarlo. La Chiana essendo per la maggior parte paludosa nei tre secoli trapassati, con lentezza somma tributava le sue acque all' Arno; da circa 30 anni in quà si principiarono a rendere molto sensibili i bonificamenti della Val di Chiana, ed oltre a nuovi incanalamenti delle sue acque, si tolsero loro degli ostacoli che soffrivano dalle pile di un Ponte che fu ridotto ad un solo arco, e furono in varie maniere animate al corso in guisa, che laddove nei tempi più remoti ingombrata d' acqua tutta quella paludosa Provincia non se ne liberava, cioè non la scaricava nell' Arno in meno di 10, o 15 giorni, modernamente ve la scarica in due, o tre giorni al più. Aggiungasi che dopo un concordato stabilito tra i Governi di Firenze, e di Roma, è molto più esteso di quello che fosse avanti il Paese, che scarica le sue acque nell' Arno; di maniera che può dirsi all' ingrosso che laddove prima l' acqua tributata da un Territorio lungo 20 miglia entrava in Arno in 10 giorni, adesso l' acqua tributata dallo stesso Territorio ridotto alla lunghezza di miglia 30, entra nello stesso Arno in tre giorni soli. Ad onta però di questo respettivo aumento sensibilissimo d' acqua si contano nell' Arno dal principio del secolo decimoquinto fino al 1761 trentuna grossissime piene, e da quest' epoca in poi non si conta più una piena insigne dell' Arno, sebbene non sia osservabile veruna perdita degli altri suoi Influenti.

SULL' APPLICAZIONE DELLA MATEMATICA ALLA MUSICA

MEMORIA

Di Giambatista Dall' Olio

Presentata il dì 25 Ottobre 1801

DA POMPILIO POZZETTI.

> *Chiunque abbia qualche lume della volgar Aritmetica coll' ajuto de' termini matematici QUI' spiegati, vedrà benissimo in generale che la Scienza de' numeri armonici inventata da Pitagora, e coltivata insino a' tempi nostri, è una pura fallacia.* Eximeno: Dell' Origine e delle Regole della Musica: pag. 21.

Mille Autori hanno versato a larga mano sopra la Musica i tesori della Matematica; ma la Musica orgogliosa ha detto: Tenetevi le vostre cifre e le vostre proporzioni, se da esse non ne ricavo nessun vantaggio.

Guido Aretino, son già quasi otto secoli, ha fatto fra noi risorgere la Musica, che il lungo soggiorno de' Barbari in Italia aveva pressocchè estinta: nessuno per altro è sin quì arrivato a fissare colla verità e colla ragione i giusti confini del *temperamento*, che è quanto dire che nessuno sin quì ha saputo ridurre alla pratica l' accordo sicuro di quegli intervalli che sono oggigiorno l' elemento della Musica. Se il mio amor proprio non m'inganna, mi lusingo d' esservi io stesso finalmente riuscito. Nel darne con questo scritto la pruova, maneggierò la materia in modo che m' intendano anche i meno versati nell' arte.

Convien premettere che parlando io di Musica intendo di parlare di quella sola che si usa oggigiorno, la quale sebbene può chiamarsi moderna, tuttavolta conta parecchi secoli d' antichità. Questa modernità però non riguarda nè lo stile, nè il gusto, nè l' estensione delle regole pratiche, nè alcune qualità di moda, nè (diciamlo pur anche senza taccia di vanità) quella perfezione, a cui trovasi arrivata da mezzo secolo in quà; ma riguarda soltanto gli elementi, de' quali presentemente è composta, cioè quella serie di voci che forma la nostra melodia non menocchè la nostra armonia, e che con nome spirante pedantesca dottrina vien detta genere *Diatonico-Cromatico-Partecipato*. Io dunque non farò quì parola del greco genere *Diatonico puro*, perchè la nostra Musica non è ristretta in sì angusti confini. Non del genere *Cromatico puro*, non già perchè Macrobio lo chiami infame per mollezza, ma perchè ad onta de' molti tentativi fatti da diversi Dilettanti e Professori non è stato loro possibile non dico di farlo risorgere stabilmente, ma neppure di far sentire un pezzo di canto, o suono di vero genere *Cromatico*. Meno poi parlerò del genere *Enarmonico*, il quale secondo la testimonianza dello stesso Macrobio andò in disuso per la troppa sua difficoltà, ben inteso che l' *Enarmonico* d' oggigiorno è tutt' altra cosa, non essendo questo, come l' antico, un genere, ossia una serie di voci continuata enarmonicamente, cioè a quarti di tuono; ma è una certa progressione d' armonia, che nell' andamento delle Parti produce intervalli enarmonici per supposizione. Lasciamo dunque la Musica greca fra le sue tenebre. Lasciamo che l' abate Requeno si affatichi a farci credere che si possa ristabilire l' Arte Armonica de' Greci e de' Romani Cantori, prendendo le mosse da una folla di proporzioni d' intervalli tratte dagli antichi Scrittori di Musica, particolarmente da quelli che dal greco ha tradotti Meibomio: proporzioni le quali, quand' anche si potessero ridurre alla pratica, sarebbero frustranee, perchè ci manca l' arte di maneggiarle, e sarebbe lo stesso che se alcuno, sapendoci dire come gli antichi stemperassero i colori, si vantasse di voler far risorgere la pittura di Zeusi e di Apelle. La Musica greca sarà sempre per noi un enimma affatto inesplicabile: ed ognuno che sia veramente versato nella nostra dirà col Padre Martini esser assolutamente impossibile il dimostrare quali fossero i modi grechi in esecuzione, senza la viva voce de' Cantori, e il suono de' Sonatori di que' tempi.

Mi restringo dunque a parlare della moderna Musica la quale è apparenza che sia di gran lunga diversa dall' antica, sì perchè noi non usiamo nella sua precisione nessuno dei tre grechi generi, sì perchè non abbiamo nessun istromento, che per modulare non sia costretto ad avere o molto o poco temperati gl' intervalli (del qual temperamento non fa parola nessun antico Scrittore di Musica,) sì perchè le nostre frasi musicali non hanno il fondamento de' grechi tetracordi, considerati come una sola serie, la quale formi l' Ottava, ossia gamma con una sola fondamentale, e sì perchè era agli antichi ignoto il principio armonico, scoperto già da Tartini, o, se altri lo voglia, da Rameau. Il nostro genere di musica, come ho detto, è *Diatonico*, quello cioè, il cui minor intervallo è d' un grado congiunto: la qual cosa non impedisce che le Parti non possano procedere per intervalli più grandi, purchè questi sieno presi tutti sopra gradi diatonici. Quel genere che procedeva per semituoni era dai greci chiamato *Cromatico*: quindi siccome i moderni dividono i tuoni del loro genere diatonico in semituoni, gli hanno aggiunta la denominazione di *Cromatico*. (Spiegherò più avanti la ragione, per cui è stata fatta una tal divisione.) E siccome pure, per la ragione che spiegherò, fu necessario temperare, o, come dicesi ancora, partecipare i semituoni, il nostro genere chiamasi ancora *Partecipato*, o *Temperato*.

La nostra Musica ha dunque per fondamento una scala composta di suoni o note procedenti per intervalli di *tuoni* e *semituoni*, che si dividono in *Ottave* (*), ognuna di sette suoni, non già nel senso di Virgilio (*Est mihi disparibus septem compacta cicutis Fistula*) perchè generalmente i Poeti non si piccano molto (nè il potrebbero) di esattezza in tali materie. Una fistola, se deve essere di qualche uso convien che sia di otto canne, cioè che abbia, oltre le sette voci dell' *Ottava*, anche quella che costituisce l' intervallo dell' ottava: e se avendo l' ottava, fosse di sole sette canne, avrebbe una voce intermedia di meno, per il che non vi si potrebbero eseguire che piccoli pezzi di musica, combinati a bella posta e adattati a tale imperfezione. *L' Ottava* dunque si considera di sette suoni, come la settimana di sette giorni: procedesi per altro più oltre d' assai, ma sempre colle stesse note che si replicano, proseguendo dal basso all' alto in ragione dimidiata: e nella guisa che un mese è di quattro settimane e due giorni, replicando sempre la stessa serie settimanale, così l' estensione per esempio d' un moderno cembalo o piano-forte è di cinque *Ottave* e una voce, replicando sempre le stesse sette. (Altri istromenti hanno una diversa estensione secondo la loro particolar natura). Soglionsi chiamare in oggi coi seguenti nomi. *UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, ut, re, mi, fa, sol, la, si*, e così proseguendo (**): con avvertenza però che i detti istromenti, sono circa quarant' anni, incominciano da un *FA* bassissimo, e ter-

---

(*) La parola *Ottava* ha un doppio significato: ora vuol dinotare una serie di otto suoni compreso il primo della susseguente, ora un intervallo che ha relazione alla fondamentale. Nel primo caso mi servirò di *Ottava* colla prima lettera majuscola, nel secondo di *ottava* con lettera minuscola.

(**) I nomi delle sette note ridotti ad una sola sillaba sono una maniera introdotta già dai Francesi, ed usata presentemente anche dagli Italiani. *UT* chiamavasi *cesolfaut*, *RE delasolre*, *MI elami*, *FA fefaut*, *SOL gesolreut*, *LA alamire*, *SI bemi*.

e terminano dopo cinque ottave con un *fa* acutissimo in grazia dell' estensione ampliata d' un' ottava, metà dalla parte dei bassi, e metà dalla parte degli acuti. Questi suoni, o voci, o note, si distinguono anche con un nome, il quale ha relazione all' intervallo, considerato l'*UT* per base, cioè :

UT fondamentale :
RE seconda :
MI terza :
FA quarta :
SOL quinta :
LA sesta :
SI settima :
ut ottava :
re nona :
mi decima :
fa undecima :
sol duodecima :
la decima terza :
si decima quarta : e così proseguendo .

Siccome però la nona non è che una seconda all' ottava più alta, la decima una terza, l' undecima una quarta ec. ec., così ordinariamente non si suol parlare che delle prime otto, giacchè tutto ciò che si dice di queste note, che formano la prima *Ottava*, è comune anche con quelle che formano le successive *Ottave* . Io mi atterrò a questa pratica, e limiterò il mio discorso ad una sola *Ottava*, il quale però sarà applicabile a tutte le altre .

L' intervallo che passa fra una nota e l' altra non è in tutte lo stesso . Fra la terza (*) e la quarta (fra *MI* e *FA*) e fra la settima (*) e l' ottava (fra *SI* o *ut*) vi è un inter-

---

(*) Quando dico *terza*, e *settima* intendo dire *terza maggiore*, e *settima maggiore*, il cui significato si comprenderà mediante ciò che dirò avanti.

tervallo all' incirca la metà di quello che si trova fra tutte le altre note. L' intervallo dimidiato si chiama *semituono*, o *mezzavoce*, l' altro *tuono*, o *voce*. Questa particolarità non è fattura dell' arte, non è un capriccio di qualche uomo: è opera della natura.

Se voglio poi considerare il *RE* per base, la relazione numerica sarà la seguente:

RE fondamentale:
MI seconda:
FA terza:
SOL quarta:
LA quinta:
SI sesta:
ut settima:
re ottava.

Ma poichè, come ho detto, dalla terza alla quarta, e dalla settima all' ottava vi deve essere l' intervallo di *semituono*, e fra le altre note l' intervallo d' un *tuono*, ne segue che conviene alzare d' un *semituono* il *FA* e l' *ut*, affinchè dal *FA* al *SOL*, e dall' *ut* al *re* vi sia l' intervallo voluto dalla natura. L' arte ha inventato il segno chiamato *diesis*, il quale significa che la nota a cui esso è apposto deve essere alzata d' un *semituono* o *mezzavoce*.

Similmente se voglio considerare il *FA* per base, la relazione numerica sarà la seguente:

FA fondamentale:
SOL seconda:
LA terza:
SI quarta:
ut quinta:
re sesta:
mi settima:
fa ottava.

E giacchè dalla terza alla quarta vi deve essere l' intervallo d' un *semituono*, e giacchè pure dal *LA* al *SI* vi è naturalmenmente quello d' un tuono, conviene abbassare d' un *semituono* il *SI*, affinchè fra queste due note vi sia l' intervallo voluto dalla natura. L' arte ha inventato il segno chiamato *bimmolle*, il quale denota che la nota, a cui è apposto, deve essere abbassata d' un *semituono* o *mezzavoce*.

A misura che si vuol far servire di base o l'uno o l'altro de' restanti suoni o note, conviene o alzare o abbassare d' un semituono or questa or quella nota, cosicchè alla fine è forza che l' *Ottava* non sia di soli sette intervalli, ma di quanti ne abbisognano per poter cangiar tuono. (La voce *tuono* non è quì presa in senso d' intervallo, ma di serie o scala avente per base una determinata nota: così si dice il tuono di *ut*, il tuono di *re*, quando l' *ut* o il *re* sono la fondamentale della serie o scala.) Questa è la ragione per cui dai Moderni i *tuoni* sono stati divisi in *semituoni*.

Conviene però riflettere che un *tuono* non si divide realmente in due precisi *semituoni*: che aumentando d' un *semituono* una nota non si monta al punto stesso in cui discende la seguente nota abbassata d' un *semituono*: e che una medesima nota, rispetto alle altre, non ha una costante relazione, la quale la fissi in un punto stabile. Per esempio l' intervallo, che è fra *UT* e *UT* diesis, non è il medesimo che quello che è fra *UT* diesis, e *RE*: *UT* diesis non è lo stesso che *RE* bimmolle: il *LA* che è sesta di *UT* non è quel *LA* che forma quinta perfetta di *RE*. Quindi risulta che per poter avere tanti diversi suoni quanti sarebbero necessarii per *modulare* in tutti i tuoni (cioè per poter fissare per fondamentale della scala ognuno dei semituoni dell' Ottava) converrebbe dividere l' Ottava in un numero esorbitante di note. Molti tentativi sono stati fatti in questo proposito. Trovasi quì in Modena un cembalo lavorato in Ferrara dal rinomato Celestino nell' anno 1539 per quel Duca Alfonso IV, nel quale l' *Ottava* è divisa in quindici tasti per ritrovarvisi spartiti in due trasversalmente i tasti corti che sono fra il *RE* e il *MI*, fra il *SOL* e il *LA*, e fra il *LA* e il *SI*, cosicchè questi sono doppii dovecchè nei moderni cembali comunali sono semplici. Questa giunta ossia divisione fu fatta affinchè i tuoni che sono caricati di bimmolli, e che a que' tempi erano ordinariamente tre, potessero avere gl' intervalli meglio accordati. Una tal giunta non fu giudicata bastante dal Zarlino, e perciò nell' anno 1548 ne fece fabbricare uno dal celebre Pesarese coll' Ottava divisa in diciannove tasti, coll' essere spartiti longitudinalmente in due tutti gli ordinarii cinque tasti corti, e coll' aggiunta di due altri tasti corti, cioè uno fra il *MI* e il *FA*, e un altro fra il *SI* e l' *ut*: e questo medesimo cembalo fu veduto trent' anni fa in Firenze presso la Vedova del Maestro di Cappella Pescetti dal Dott. di Musica Burney. Egli per altro non dice d' averlo sonato, o d' averlo udito sonare: ed io sono di fermissima opinione che i tasti aggiunti se ne rimanessero oziosi, non solo per la difficoltà di accordarli, ma molto più per la (quasi direi) impossibilità di farli entrare convenientemente nelle modulazioni, e nelle varie scale de' tuoni. Giambatista Doni, Galeazzo Sabbatini, e Niccolò Ramarino moltiplicarono prodigiosamente le divisioni dell' Ottava: e Niccolò Vicentino per rimetter in uso la musica enarmonica fabbricò un cembalo con sei tastature. Ma tutti i tentativi in questo proposito sono stati inutili, mentre per poter sonare tali istromenti converrebbe farvi una particolar pratica, e quel ch' è peggio ne risulterebbe il grave inconveniente che non si saprebbero sonare i cembali di tastatura comunale, o almeno non si sonerebbero che a grave stento.

Ma limitando la divisione dell' Ottava al numero de' suoni di cui ordinariamente si fa uso scrivendo la musica, converrebbe che essa fosse di diciassette, come vedesi nella figura prima. Gl' istromenti di accordatura mobile, come il violino, la viola, e simili, possono eseguirli tutti: e in fatti i sonatori di tali istromenti che hanno studiata bene la posizione della mano, eseguiscono tutte le medesime diciassette note; ma gl' istromenti di accordatura stabile, come l' organo, no, il cembalo, il salterio ec. hanno limitata l'Ottava a soli dodici *semituoni*, sopprimendone cinque, o per parlare con più precisione, di due facendone un solo (come si vede eseguito cinque volte nella citata figura prima) accordandolo in modo che la voce sia media fra le due che sarebbero convenienti ai due diversi tasti. Così, per esempio, dove il violino esprime con due diversi suoni *ut* diesis, e *re* bimmolle, il cembalo moderno comunale non ha che un tasto solo che serve per tutte e due le dette note.

I Matematici hanno ridotto a ragioni numeriche gl' intervalli tutti dell' *Ottava*. E poichè un suono stà all' altro in ragione composta della lunghezza, della grossezza, e della tensione della corda, per eseguire i loro calcoli hanno supposto che due delle dette tre dimensioni sieno le stesse, ed hanno sottoposta l' altra al rapporto. (Una consimile supposizione è stata fatta per la colonna d' aria contenuta in una canna di organo, o in un flauto.) Per esempio hanno preso due corde eguali in grossezza e tensione, ed hanno fatto base delle ricerche la lunghezza: oppure (che è la stessa cosa) hanno divisa una sola corda in due parti mediante un ponticello o scrannello sottoposto. Hanno rilevato che sottoposto lo scrannello nel luogo in cui la corda resti da una parte la metà precisa di quella che è dall' altra, ossia qualora le due parti stanno fra di loro come 1 a 2, le medesime si corrispondono in ottava: quando stanno come 2 a 3, si corrrispondono in quinta: quando stanno come 3 a 4 si corrispondono in quarta. Procedendo colle loro ricerche i Matematici, alla testa de' quali si vuol collocato Pitagora, hanno fissato i rapporti di tutti gl' intervalli, secondocchè si trovano indicati nella citata figura: e poichè per esser essi enunziati con diversi denominatori, la nostra mente non può con facilità concepire qual relazione abbiano fra di loro, ho ridotto tutti i diciassette rapporti ad un comune denominatore, cioè al 180: numero che parmi assai acconcio a non generar confusione nella mente: per altro si può far uso di altri de-

denominatori, secondocchè sarà altrui più di piacere o di comodo.

Ma *in materia di musica*, dice il D' Alembert, *i fondamenti del calcolo sono ipotetici sino ad un certo punto, e non possono neppur essere che ipotetici. Il rapporto dell' ottava come* 1 *a* 2, *quello della quinta come* 2 *a* 3, *quello della terza maggiore come* 4 *a* 5 *ec. forse non sono i veri rapporti della natura; ma solamente rapporti approssimati, e tali quali l' esperienza li ha potuto conoscere.* Eximeno non si esprime così timidamente con un *forse*, come il D'Alembert, ma con quella nobile franchezza, che è propria di chi è nunzio d' una verità incontrastabile, dice che *in pratica non vi è intervallo alcuno, eccetta l' ottava, fondato in quelle ragioni* (cioè nelle ragioni numeriche insegnate dai Matematici) ; *di modo che per ridurre a pratica gl' intervalli, bisogna guastar le ragioni che insegna la teorica. E quale sciocchezza non è questa, supporre la Musica fondata in certe ragioni che bisogna guastare per ridurre la Musica ad esecuzione? Almeno insegnasse la Matematica a far questo guastamento; ma dopo un grand' apparato di ragioni matematiche, ciascun le guasta per la pratica a modo suo. I Francesi hanno fatto per il temperamento del cembalo diffusissimi calcoli; ma tutti egualmente capricciosi che inutili.*

Convien dunque di assoluta necessità temperare le ragioni, ossieno i rapporti dei Matematici non solo per ridurre negl' istromenti stabili a soli cinque suoni le dieci note alterate con diesis e bimmolle; ma anche perchè negl' istromenti mobili gli altri suoni non possono in pratica eseguirsi tutti coi fissati rapporti. Per esempio: se un violino eseguisce *UT MI*, *MI SOL* diesis, *SOL* diesis *ut*, che sono tre terze maggiori, le eseguisce in modo che il secondo *ut* forma ottava giusta col primo: eppure è indubitabile che conviene che una almeno delle dette terze sia alterata, giacchè se non fosse così, il secondo *ut* calerebbe, per la ragione che essendo il rapporto della terza maggiore come 5 a 4, le dette le tre terze maggiori starebbero come 180 a 144, 144 a $115\frac{1}{5}$, e $115\frac{1}{5}$ a $92\frac{4}{25}$, e così questo numero ultimo che dovrebbe essere 90, riuscendo $92\frac{4}{25}$, non darebbe l' ottava giusta, e per conseguenza sarebbe insoffribile. Così pure se un violino eseguisce *UT MI* bimmolle, *MI* bimmolle *SOL* bimmolle, *SOL* bimmolle *LA*, *LA ut*, che sono quattro terze minori, le eseguisce in modo che il secondo *ut* forma anch' esso ottava giusta col primo: eppure è indubitabile che conviene che una almeno delle dette terze sia alterata, altrimenti il secondo *ut* crescerebbe, mentre essendo il rapporto della terza minore come 6 a 5, le dette quattro terze minori starebbero come 180 a 150, 150 a 125, 125 a $104\frac{1}{6}$, $104\frac{1}{6}$ a $86\frac{29}{36}$, e per conseguenza quest' ultimo numero, che dovrebbe essere 90, riuscendo $86\frac{29}{36}$, darebbe anch' esso un' ottava scordatissima, e perciò insoffribile. Se un Sonatore volesse eseguire gl' intervalli tutti secondo le precise ragioni matematiche, dovrebbe dividere l'Ottava in più di sessanta suoni: il cembalo l' ha divisa in dodici: il violino poco più poco meno in venti (semprecchè il Sonatore sia esperto): altri istromenti in altri numeri di suoni; ma tutte queste rispettive alterazioni sono così tenui che non arrivano ad offender l' orecchio. La quinta stà in ragione di 3 a 2, che è lo stesso che di 180 a 120; ma in pratica vi sono delle quinte giuste, come 180 a 120, delle quinte deboli come 180 a 121, delle quinte forti come 180 a 119: e in una numerosa orchestra, dove la diversità degl' istromenti ha pure in diverso modo temperati gl' intervalli, tutte queste quinte s' impastano, dirò così, insieme, e formano un tutto che appaga l'orecchio: anzi ne risulta un certo sbattimento ossia piccante che dà maggior brio all' armonia. Cosa è in un organo quel registro che si chiama *voce umana*? Altro non è che un suono formato da due canne accordate fra loro in ottava non perfetta. Da tutto ciò si ricava che ogni intervallo, qual più qual meno, è suscettibile di forte e di debole, ossia è suscettibile di qualche alterazione sia in crescere sia in calare: anzi il bravo Sonatore d' istromento mobile, e il bravo Cantante mettono a profitto una tale alterazione secondo il vario carattere della sonata e del canto, giacchè l' effetto d' un' alterazione in crescere è diverso da quello d' un' alterazione in calare. Questa alterazione però non deve giammai esser tale che arrivi alla *stonatura*: una quinta, per esempio, in ragione di 125 a 180 calerebbe insoffribilmente, e crescerebbe insoffribilmente se fosse in ragione di 116 a 180.

Ma la Musica dimanda alla Matematica, per bocca di Eximeno, che le insegni di fare il *guastamento* delle ragioni numeriche degl' intervalli, ossia un calcolo per il temperamento del cembalo che non sia *capriccioso* nè *inutile*.

Ad evitare che il dimandato calcolo sia capriccioso richiedesi che abbia per base una progressione regolare e uniforme, la quale temperi, ossia alteri le ragioni numeriche in modo che nessun intervallo riesca o troppo forte o troppo debole, per cui cada nella stonatura. Il calcolo A della quì unita Tavola prima, il quale compone la *Serie Temperata*, ha appunto per base una progressione regolare, il cui *Rapporto* si vede spiegato in B della figura medesima: ed ecco trovato il dimandato guastamento.

Ma è esso poi regolare in modo, che considerato sotto tutti i convenienti aspetti sia immune da eccezioni? Chiamiamolo ad esame. Primieramente dovendo nel cembalo cinque tasti dell' Ottava supplire a dieci intervalli, che è lo stesso che dover un tasto solo servire per due, è necessario che quel suono, che serve per due, sia medio quasi precisamenmente : la qual qualità si trova nella mia *Serie Temperata*. Secondariamente nessuno degli altri intervalli soffre alterazione maggiore d' un comma, che stà come 80 a 81, anzi vi è di gran lunga distante : e per conseguenza non ne risulta *stonatura*. In terzo luogo la terza maggiore che, come dice Rousseau, è l' anima dell' armonia, non vi è alterata che quasi di nulla, ma però in crescere, come soffre la di lei natura : e la terza minore che è intervallo tenero e melanconico, vi si vede appunto indebolito, seguendo anche in ciò la di lei natura. In quarto luogo la sesta maggiore e la settima maggiore sono rinforzate, perchè appunto ciò torna in vantaggio della melodia, come altresì la quarta e la quinta sono indebolite, in modo però che non si toglie loro l'effetto che debbono produrre impiegate nell' armonia. In somma trovo che in questa mia *Serie Temperata* ogni intervallo dà un completo libero campo alla modulazione, la qual cosa non può avvenire in un temperamento capriccioso, e peggio poi in quello che era in uso ottant' anni sono. Gli accordatori d' organo e di cembalo di allora temperavano con troppa ineguaglianza gl' intervalli, favorendo quelli, i quali entravano ne' tuoni che più erano in uso. Perciò Fux avvertì gli Organisti a non andar vagando per gl' intervalli cromatici, onde in vece d' un grato e ameno concento non venga a ferir l' orecchio un urlo asprissimo e del tutto spiacevole. In oggi però che gl' intervalli cromatici sono venuti d' uso comunale, ad imitazione singolarmente degli armonisti tedeschi (vaglia per mille il celebratissimo Haydn) seguitati poscia dalle altre nazioni tutte, l' accordatura dell' organo e del cembalo si deve fare in maniera che vi si possa modulare con piena libertà, cioè sonare in qualunque tuono sia più in piacere. La mia *Serie Temperata* guida ad una tale accordatura : e questa mi sembra essere una qualità che la renda preferibile a qualunque altra.

Ma forse mi si dirà esser bensì vero che la mia *Serie Temperata* non è un guastamento capriccioso, ma che però è inutile, perchè non si può mettere in pratica. L' accordatore ha per guida l' orecchio: alza e abbassa il suono secondocchè il senso dell' udito guidato da una ragione di pratica gl' indica che può correre con la tale o la tal altra alterazione. Conviene dunque guidare l' accordatore onde possa metter in pratica il mio *Temperamento:* ed ecco come se ne può avere l' intento bramato.

Si costruisca, come io l' ho già costrutto, un piccolo istromento, che chiamo *Monocordo Temperatore*, nel quale vi sia una corda sola, o al più due, ma accordate in unisono. Non ne do le dimensioni, perchè ogni fabbricatore di cembali o piano-forti sa di qual lunghezza e grossezza debbe essere una corda per dare con una giusta tensione una data voce: e sia questa il *Cesolfaut*, o come anche dicesi l' *ut*, e quello precisamente che trovasi nel mezzo d' una moderna tastatura: una tal corda nella mia Tavola seconda vedesi marcata AB. Sienvi al di sotto, a guisa di tastatura, tredici regoletti moventisi come gli ordinarii tasti, ed in capo d' ognuno di essi sia conficcato un pezzetto di lastra d' ottone lungo poco più di mezzo pollice del piede di Parigi, grosso circa mezza linea, e largo due, il quale serve per batter la corda, alla guisa medesima che si pratica nelle così dette *Sordine*, delle quali ne ho una lavorata in Berlino nel 1791 da Oesterlein, uguale interamente ad un' altra che trovasi presso la celebre cantatrice Billington. Il primo regoletto batte la corda in C, e l' ultimo in D, il qual punto D esser deve perfettamente la metà della lunghezza che nella corda si trova fra i due punti C e B, per la ragione che dovendo l' ultimo tasto formare l' intervallo di ottava col primo, conviene che batta la corda nella detta metà precisa. La stessa corda da C a B dividasi in 180 parti: dal che ne risulterà che il primo regoletto o tasto la batterà nel luogo appunto ove cade il 180, e l' ultimo la batterà in 90: gli altri regoletti intermedii la batteranno ne' diversi luoghi, ne' quali cade la divisione indicata dalla *Serie Temperata*, e coe come già si vede marcato nella Tavola. Dalla parte di A, e di B vi saranno due banconcetti per sostenere la corda: lo spazio che resta fra D e B servirà per il corpo dell' istromento, affinchè la corda abbia una competente voce: il vano che resta fra A e D servirà per sostenere i tredici regoletti ossia la tastatura, la quale poserà sopra un fondo, che terrà unito e forte l' istromento.

Volendosi far uso di questo *Monocordo Temperatore* si accorda la corda in UT secondo quel corista che più piace: ciò fatto i regoletti disposti a norma della Tavola danno le voci tutte dell' Ottava temperate secondo la Serie: e perciò colla guida di un tale istromento si può accordare precisamente un organo o un cembalo secondo la proposta ragione, nulla lasciando all' arbitrio dell' orecchio. L' istromento somministra i tredici intervalli d' un' Ottava sola; ma si comprende bene che ciò basta, attesocchè le altre voci tutte, sia al di sopra negli acuti, sia al di sotto ne' bassi, si accordano in ottava, la qual cosa si effettua con facilità da qualunque Accordatore.

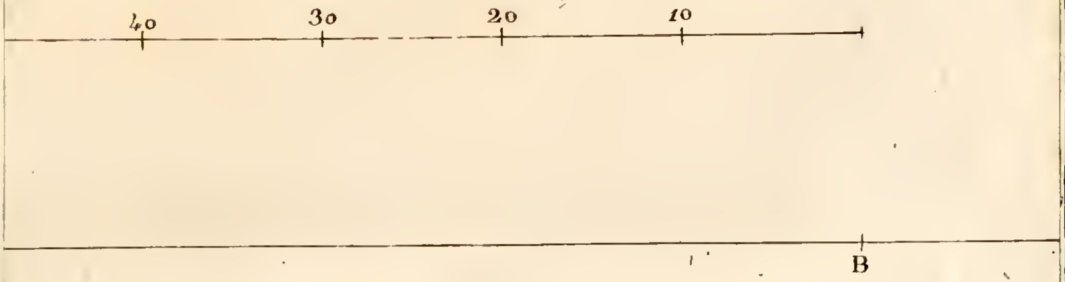
Conviene però avvertire che se la corda deve dare la voce giusta, è necessario che sia sempre assordita dalla parte sinistra, e precisamente nel sito vicinissimo al punto, in cui la piccola lastra d' ottone batte la corda; anzi non la deve solamente battere, ma vi si deve tenere ben aderente premendo con forza il regoletto, perchè in tal maniera la corda rende un suono marcato e netto: e questo però dalla parte destra che è in libertà, giacchè per essere assordita dalla parte sinistra non ne risulta verun suono. Per assordire la corda si adopra una piccola lista di dante o di pelle grossa ma morbida, mettendola a cavallo della corda, e premendola soavemente: così volendosi avere la prima voce cioè UT, si metterà il dante a cavallo della corda nello spazio a sinistra, che resta dal punto di divisione 180 verso A: volendosi avere la voce di RE, si metterà il dante di quà dalla divisione $160 + \frac{70}{78}$ verso A : e così proseguendo, mentre la corda darà la voce che corrisponde, come si è detto, alla parte non assordita.

Potrebbesi anche costruire un Temperatore d'acciajo, prendendone l'idea da quell'istromento biforcuto, che venutoci, diversi anni sono, dall' Inghilterra, ha fatto deporre quasi generalmente l'uso di quella piccola canna di legno, chiamata *Corista*, di cui si servivano già gli Accordatori per metter in tuono un istromento; ma forse sarebbe di assai difficile esecuzione il combinare tredici di simili istromenti, perfettamente accordati secondo la proposta Serie.

Dal sin quì detto si rileva qual parte aver possa la Matematica e la Fisica nella Musica. A parlare però con verità e precisione, le loro teorie non riguardano la Musica, ma soltanto i Suoni individuali, che non sono propriamente Musica, ma che bensì sono, come dice Chabanon, materiali freddi e senza vita, che l'Arte Musicale anima e vivifica. La Pittura non deve nulla alle scoperte di Neuton: e il nostro Correggio era stato pittor sommo senza sapere che la luce si divide in sette colori primitivi. Così pure la Musica nulla deve a Pitagora per l'invenzione delle proporzioni de' suoni, giacchè il nostro Bononcini, il quale, al dir di Rousseau, fu de' primi a far della musica, dove avanti di lui non si faceva che dello strepito, non ebbe nessun ajuto dalle proporzioni pitagoriche per comporre que' sentimentali duetti che lottarono vittoriosamente con quelli del celebre Handel. In questo secolo che spunta, sieno le Scienze e le Arti scevre da ogni ombra di fasto, e non mettano gli Scrittori importanza veruna dove in realtà non ve n'è.

Potrei estendermi a dimostrare gli errori commessi dagli Eruditi ed ancora dagli Scienziati nello scrivere intorno la Musica, e non avrei a tale oggetto se non che a confrontare coi principii di questa le asserzioni di alquanti Scrittori che

Soc. Ital. Tom. IX. pag. 624.



Monocordo Temperatore.

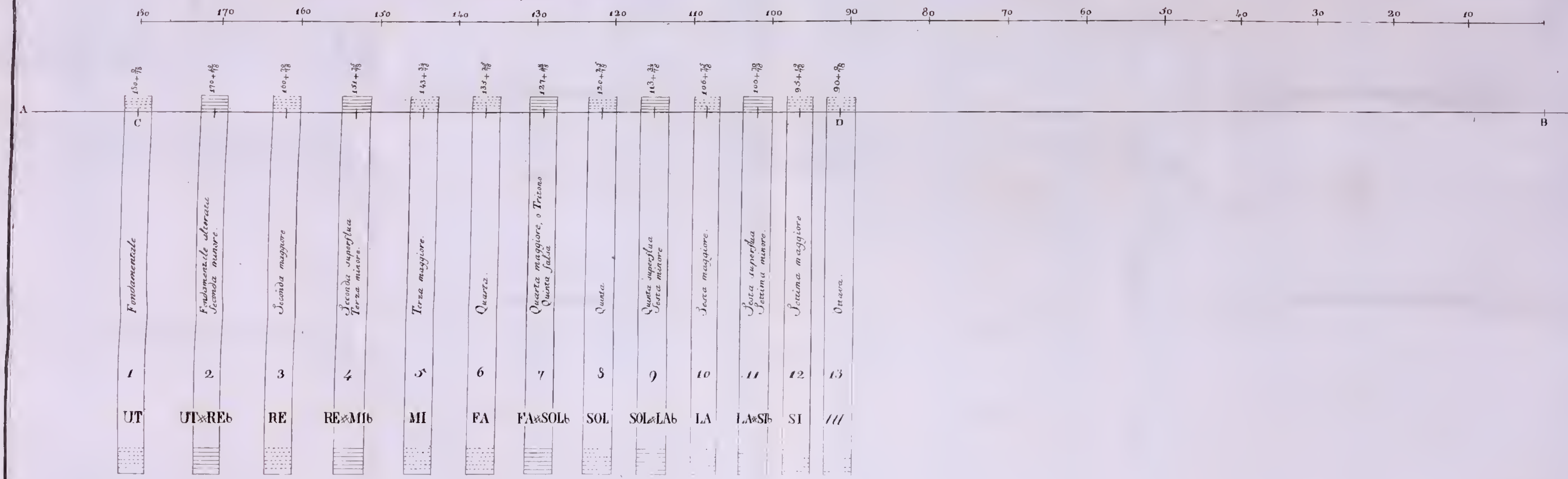

180
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
A
B
C
D
180 + 9/78
170 + 62/78
160 + 78/78
151 + 75/78
143 + 33/78
135 + 25/78
127 + 48/78
120 + 25/78
113 + 34/78
106 + 73/78
100 + 39/78
95 + 13/78
90 + 9/78
Fondamentale
Fondamentale alterata
Seconda minore
Seconda maggiore
Seconda superflua
Terza minore
Terza maggiore
Quarta
Quarta maggiore, o Tritono
Quinta falsa
Quinta
Quinta superflua
Sesta minore
Sesta maggiore
Sesta superflua
Settima minore
Settima maggiore
Ottava
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
UT
UT✻RE♭
RE
RE✻MI♭
MI
FA
FA✻SOL♭
SOL
SOL✻LA♭
LA
LA✻SI♭
SI
///

Tavola prima

pag. 625.

	Rapporto ad un comune Denominatore.	A. Serie Temperata.	B. Rapporto della Serie Temperata.
	180.	$180 + \frac{0}{78}$	0.
=	$175\frac{25}{32}$: 180.)	$170 + \frac{19}{78}$	1. $4 + \frac{65}{78} + \frac{360}{78} = 9 + \frac{59}{78}$
=	$168\frac{3}{4}$: 180.)		
=	160 : 180	$160 + \frac{70}{78}$	2. $4 + \frac{65}{78} + \frac{330}{78} = 9 + \frac{27}{78}$
=	$153\frac{3}{5}$: 180)	$151 + \frac{75}{78}$	3. $4 + \frac{65}{78} + \frac{300}{78} = 8 + \frac{73}{78}$
=	150 : 180)		
=	144 : 180	$143 + \frac{34}{78}$	4. $4 + \frac{65}{78} + \frac{270}{78} = 8 + \frac{41}{78}$
=	135 : 180	$135 + \frac{25}{78}$	5. $4 + \frac{65}{78} + \frac{240}{78} = 8 + \frac{9}{78}$
=	128 : 180.)	$127 + \frac{48}{78}$	6. $4 + \frac{65}{78} + \frac{210}{78} = 7 + \frac{55}{78}$
=	$126\frac{9}{16}$: 180.)		
=	120 : 180	$120 + \frac{25}{78}$	7. $4 + \frac{65}{78} + \frac{180}{78} = 7 + \frac{23}{78}$
=	$115\frac{1}{5}$: 180.)	$113 + \frac{34}{78}$	8. $4 + \frac{65}{78} + \frac{150}{78} = 6 + \frac{69}{78}$
=	$112\frac{1}{2}$: 180.)		
=	108 : 180	$106 + \frac{75}{78}$	9. $4 + \frac{65}{78} + \frac{120}{78} = 6 + \frac{37}{78}$
=	$103\frac{17}{25}$: 180.)	$100 + \frac{70}{78}$	10. $4 + \frac{65}{78} + \frac{90}{78} = 6 + \frac{5}{78}$
=	100 : 180.)		
=	96 : 180	$95 + \frac{19}{78}$	11. $4 + \frac{65}{78} + \frac{60}{78} = 5 + \frac{51}{78}$
=	90 : 180.	$90 + \frac{0}{78}$	12. $4 + \frac{65}{78} + \frac{30}{78} = 5 + \frac{19}{78}$

Tavola prima
pag. 625.

				A.	B.
Nomi degl' Intervalli	Intervalli espressi in note.	Rapporto in numeri.	Rapporto ad un comune Denominatore.	Serie Temperata.	Rapporto della Serie Temperata.
1. Fondamentale	ut		180. . . .	$180 + \frac{0}{78}$	. . 0. . . . .
2. Fondamentale alterata . .	(ut diesis .	375 : 384 =	$175\frac{25}{32}$: 180.)	$170 + \frac{19}{78}$	. . 1. $4 + \frac{65}{78} + \frac{360}{78} = 9 + \frac{59}{78}$
3. Seconda minore	(re bimolle . .	15 : 16 =	$168\frac{3}{4}$: 180.)		
4. Seconda maggiore . . .	re	8 : 9 =	160 : 180 . . .	$160 + \frac{70}{78}$	2. $4 + \frac{65}{78} + \frac{330}{78} = 9 + \frac{27}{78}$
5. Seconda superflua . . .	(re diesis . .	64 : 75 =	$153\frac{3}{5}$: 180)	$151 + \frac{75}{78}$	3. $4 + \frac{65}{78} + \frac{300}{78} = 8 + \frac{73}{78}$
6. Terza minore	(mi bimolle .	5 : 6 =	150 : 180)		
7. Terza maggiore	mi	4 : 5 =	144 : 180 . . .	$143 + \frac{34}{78}$	4. $4 + \frac{65}{78} + \frac{270}{78} = 8 + \frac{41}{78}$
8. Quarta	fa	3 : 4 =	135 : 180 . . .	$135 + \frac{25}{78}$	5. $4 + \frac{65}{78} + \frac{240}{78} = 8 + \frac{9}{78}$
9. Quarta maggiore o Tritono	(fa diesis . .	32 : 45 =	128 : 180.)	$127 + \frac{48}{78}$	6. $4 + \frac{65}{78} + \frac{210}{78} = 7 + \frac{55}{78}$
10. Quinta falsa	(sol bimolle .	45 : 64 =	$126\frac{9}{16}$: 180.)		
11. Quinta	sol	2 : 3 =	120 : 180 . . .	$120 + \frac{25}{78}$	7. $4 + \frac{65}{78} + \frac{180}{78} = 7 + \frac{23}{78}$
12. Quinta superflua	(sol diesis . .	16 : 25 =	$115\frac{1}{5}$: 180.)	$113 + \frac{34}{78}$	8. $4 + \frac{65}{78} + \frac{150}{78} = 6 + \frac{69}{78}$
13. Sesta minore	(la bimolle .	5 : 8 =	$112\frac{1}{2}$: 180.)		
14. Sesta maggiore	la	3 : 5 =	108 : 180 . . .	$106 + \frac{75}{78}$	9. $4 + \frac{65}{78} + \frac{120}{78} = 6 + \frac{37}{78}$
15. Sesta superflua	(la diesis . .	72 : 125 =	$103\frac{17}{25}$: 180.)	$100 + \frac{70}{78}$	10. $4 + \frac{65}{78} + \frac{90}{78} = 6 + \frac{5}{78}$
16. Settima minore	(si bimolle .	5 : 9 =	100 : 180.)		
17. Settima maggiore	si	8 : 15 =	96 : 180 . . .	$95 + \frac{19}{78}$	11. $4 + \frac{65}{78} + \frac{60}{78} = 5 + \frac{51}{78}$
Ottava	ut	1 : 2 =	90 : 180.	$90 + \frac{0}{78}$	12. $4 + \frac{65}{78} + \frac{30}{78} = 5 + \frac{19}{78}$

che tengo davanti; ma per non entrare in controversie d' alcuna sorta, mi astengo in questo luogo dal farlo, e son pago che la dotta Società, cui vengono ora presentate le mie osservazioni sopra un importante musicale argomento, le onori dell' autorevole sua approvazione.

NUOVA SOLUZIONE D' UN PROBLEMA STATICO EULERIANO

Di Gregorio Fontana

Ricevuta il dì 25. Novembre 1801.

L' Eulero nella sua profonda Dissertazione sopra *l' armonia fra i principii generali di quiete e di moto del Sig. de Maupertuis*, inserita nel tomo VI degli Atti dell' Accademia di Berlino, fa un' ingegnosa applicazione di que' principj a molti problemi meccanici, che egli scioglie con impareggiabile semplicità ed eleganza, e fra gli altri egli intraprende la soluzione del seguente problema, che egli dice essergli stato altra volta proposto.

Problema.

Contro un muro immobile DC (fig. I) trattasi di appoggiare la verga AB in maniera, che essendo sostenuta sopra un punto fisso O, e sollecitata all' estremo A da un peso P, essa rimanga in tal posizione in equilibrio.

L' Eulero scioglie il Problema con supporre la verga priva di gravità, ed il muro perfettamente levigato, sicchè la verga possa strisciare senza ostacolo di sfregamento; indi avverte, che esso non sarebbe *sì facile a sciogliersi co' principj ordinarj della Meccanica*. Ma fatto sta, che senza alcun bisogno di ricorrere al principio un poco precario di Maupertuis, il Problema si scioglie mediante le comuni nozioni della Meccanica nel modo più semplice e facile, che si possa bramare, e ciò anche nel supposto che voglia tenersi conto della gravità della verga, e dello sfregamento del muro. Eccone pertanto la soluzione, e primieramente nel caso contemtemplato da Eulero dello sfregamento nullo, e della verga non grave; poi nell' altro caso della verga pesante, e del muro dotato di sfregamento.

Soluzione del 1.° caso *in cui si prescinde dal peso della verga, e dallo sfregamento.*

Suppongo trovarsi la verga nella posizione richiesta per l' equilibrio, e risolvo la forza del peso P rappresentata dalla retta verticale AF nella forza FG perpendicolare alla verga, e nella AG in direzione della verga, la prima delle quali tende a far girare la verga attorno al sostegno O, e la seconda a farla strisciare sul sostegno a seconda della sua stessa direzione.

Si rappresenti colla retta BM perpendicolare al muro la reazione o resistenza, che quivi incontra la verga, e si risolva anche la forza BM nelle due MN, e BN, quella normale alla verga, questa in direzione di lei, quella tendente a rivolgerla intorno all' appoggio O, questa a farla correre sull' appoggio nella direzione BA. Guido dal sostegno O al muro la perpendicolare $OE = b$, e faccio l' angolo $BOE = \varphi$, tutta la verga $BA = a$; la sua parte $OB = x$, l' altra $OA = a - x$, il peso $P = p$, e la forza $BM = f$. Ora lo stato di equilibrio della verga esige queste due condizioni; 1.ª che non ci sia moto rettilineo di strisciamento sul sostegno O; 2.ª che non ci sia moto rotatorio intorno ad O; le quali condizioni importano 1.°. l' eguaglianza delle forze opposte AG, BN; 2.° l' eguaglianza de' momenti delle forze GF, NM. Ma $AG = p\,\text{sen.}\varphi$, $BN = f\cos.\varphi$, $GF = p\cos.\varphi$, $NM = f\,\text{sen.}\varphi$. Si avranno dunque le due seguenti equazioni dell' equilibrio I.ª $p\,\text{sen.}\varphi = f\cos.\varphi$. II.ª $p\,(a - x)\cos.\varphi = fx\,\text{sen.}\varphi$; dalle quali, cacciando f, si avrà tosto $p\,(a - x)\cos.\varphi = \dfrac{px\,\text{sen.}\varphi^2}{\cos.\varphi}$, e quindi $(a - x)\cos.\varphi^2 = x\,\text{sen.}\varphi^2$, e per ultimo $x = a\cos.\varphi^2 = \dfrac{ab^2}{x^2}$, e conseguentemente $x = \sqrt[3]{abb}$. Il che &c.

Questo Problema, come riflette Eulero, è rimarchevole per questa circostanza singolare, che è di potersene far uso per ritrovare due medie proporzionali fra due linee date, essendo in fatti la parte OB della verga la prima delle due medie proporzionali fra le linee OE distanza del sostegno dal muro, ed AB lunghezza della verga.

Soluzione del 2.° caso, *in cui si tien conto dello sfregamento e del peso della verga*.

Ritenuta la costruzione precedente dai punti di mezzo K ed R (fig. II) ossia dai centri di gravità delle due porzioni AO, ed OB della verga si abbassino le rette verticali KH, RS che ne esprimano il loro rispettivo peso; indi si risolvano queste forze nelle HI, ST normali alla verga, e KI, RT in direzione della medesima. Siccome poi dalla forza BM originata dalla pressione della verga contro il muro risulta uno sfregamento nella direzione BC contraria alla direzione BE, secondo cui la verga tende a strisciare sul muro in virtù dello sforzo del peso P, si risolva anche questa forza BQ nelle due QL normale alla verga, e BL in direzione della verga. Ciò fatto, egli è manifesto, che le quattro forze AG, KI, RT, e BL si esercitano a far correre la verga sul sostegno nella direzione AB, e che la quinta forza BN agisce in verso contrario e spinge la verga da B in A; ond'è che l'ipotesi dell'equilibrio darà la prima equazione tra quest' ultima forza e la somma di quelle quattro. Oltracciò le due forze GF, ed IH tendono a far girare la verga intorno all'appoggio O per un verso, e le tre altre TS, NM, ed LQ, si adoprano a farla girare in verso contrario; e conseguentemente per la natura dell' equilibrio la somma de' momenti di quelle dovrà uguagliarsi alla somma de' momenti di queste. Presentemente ritengo le denominazioni di prima; e pongo $= ma$ il peso della verga, come proporzionale alla sua lunghezza, essendo m un dato coefficiente, e così pure stabilisco $= nf$ la forza di sfregamento BQ, come quella che è una data parte della pressione f, essendo n la frazione espriprimente la detta parte . Ciò supposto , trovasi AG $= p\,\mathrm{sen}.\varphi$, GF $= p\cos.\varphi$; KI $= m(a-x)\,\mathrm{sen}.\varphi$; IH $= m(a-x)\cos.\varphi$; RT $= mx\,\mathrm{sen}.\varphi$; TS $= mx\cos.\varphi$; BN $= f\cos.\varphi$; NM $= f\,\mathrm{sen}.\varphi$; BL $= nf\,\mathrm{sen}.\varphi$; LQ $= nf\cos.\varphi$. Perlocchè l' ipotesi dell' equilibrio , che rende nullo così il moto rettilineo della verga , come il rotatorio , ci offre le due equazioni I.ª $p\,\mathrm{sen}.\varphi + m(a-x)\,\mathrm{sen}.\varphi + mx\,\mathrm{sen}.\varphi + nf\,\mathrm{sen}\,\varphi = f\cos.\varphi$, cioè I.ª $p\,\mathrm{sen}.\varphi + ma\,\mathrm{sen}.\varphi = f(\cos.\varphi - n\,\mathrm{sen}.\varphi)$; II.ª $p(a-x)\cos.\varphi + \frac{1}{2}m(a-x)^2\cos.\varphi = \frac{1}{2}mx^2\cos.\varphi + fx\,\mathrm{sen}.\varphi + nfx\cos.\varphi$, ovvero II.ª $p(a-x)\cos.\varphi + \frac{1}{2}m(a^2 - 2ax)\cos.\varphi = fx(\mathrm{sen}.\varphi + n\cos.\varphi)$. Dalla prima equazione deduco $f = \frac{p\,\mathrm{sen}.\varphi + ma\,\mathrm{sen}.\varphi}{\cos.\varphi - n\,\mathrm{sen}.\varphi}$, che sostituito nella seconda mi dà $p(a-x)\cos.\varphi + \frac{1}{2}m(a^2 - 2ax)\cos.\varphi = \frac{\mathrm{sen}.\varphi(\mathrm{sen}.\varphi + n\cos.\varphi)(p+ma)x}{\cos.\varphi - n\,\mathrm{sen}\cdot\varphi}$, oppure $pa + \frac{1}{2}ma^2 - (p+ma)x = \frac{(\mathrm{sen}.\varphi^2 + n\,\mathrm{sen}.\varphi\cos.\varphi)(p+ma)x}{\cos.\varphi^2 - n\,\mathrm{sen}.\varphi\cos.\varphi} = -(p+ma)x + \frac{(p+ma)x}{\cos.\varphi^2 - n\,\mathrm{sen}.\varphi\cos.\varphi}$, che si riduce semplicemente ad $a(p + \frac{1}{2}ma) = \frac{(p+ma)x}{\cos.\varphi^2 - n\,\mathrm{sen}.\varphi\cos.\varphi}$. Laonde per essere $\cos.\varphi = \frac{b}{x}$, $\mathrm{sen}.\varphi = \frac{\sqrt{(x^2 - b^2)}}{x}$, si ha finalmente $a(p + \frac{1}{2}ma) = \frac{(p+ma)x^3}{b^2 - nb\sqrt{(x^2 - b^2)}}$, e quindi $ab^2(p + \frac{1}{2}ma) - (p+ma)x^3 = nba(p + \frac{1}{2}ma)\sqrt{(x^2 - b^2)}$; e quadrando, $(p+ma)^2x^6 - 2ab^2 \times (p+ma)(p + \frac{1}{2}ma)x^3$

+

$$+ a^2 b^4 \left(p + \frac{1}{2} ma\right)^2 = n^2 b^2 a^2 \left(p + \frac{1}{2} ma\right)^2 \times (x^2 - b^2);$$

e per fine ordinando

$$x^6 * * - \frac{2ab^2\left(p + \frac{1}{2} ma\right)}{p + ma} x^3 - n^2 b^2 a^2 \left(\frac{p + \frac{1}{2} ma}{p + ma}\right)^2 x^2$$

$$* + (n^2 + 1) a^2 b^4 \times \left(\frac{p + \frac{1}{2} ma}{p + ma}\right)^2 = 0.$$

La radice di quest' equazione di sesto grado darà quanto si addimanda. Il che &c.

Cor. 1.° Se si vuol prescindere dallo sfregamento, e dal peso della verga, facendo $n = 0$, ed $m = 0$, l' equazione ritrovata diventa $x^6 - 2ab^2 x^3 + a^2 b^4 = 0$, ovveramente $(x^3 - ab^2)^2 = 0$, dalla quale si ottiene $x = \sqrt[3]{ab^2}$, come appunto nel primo caso.

Cor. 2.° Se si vuol prescindere dal solo sfregamento, e tener conto del peso della verga, l'equazione si cangia in questa

$$x^6 - \frac{2ab^2\left(p + \frac{1}{2} ma\right)}{p + ma} x^3 + a^2 b^4 \left(\frac{p + \frac{1}{2} ma}{p + ma}\right)^2 = 0$$

cioè $\left(x^3 - \frac{ab^2\left(p + \frac{1}{2} ma\right)}{p + ma}\right)^2 = 0$, la quale dà

$$x = \sqrt[3]{\frac{ab^2\left(p + \frac{1}{2} ma\right)}{p + ma}};$$

Cor. 3.° Qualora non si voglia tener conto del peso della verga, ma bensì dello sfregamento, l' equazione trovata si riduce a questa $x^6 * * - 2ab^2 x^3 - n^2 b^2 a^2 x^2 * + (n^2 + 1) a^2 b^4 = 0$.

Scolio. Quì ci si presenta una specie di paradosso, ed è, che nel supposto della verga non grave tanto se si con-

Soc. Ital. Tom. IX. pag. 631.

Fig. I.

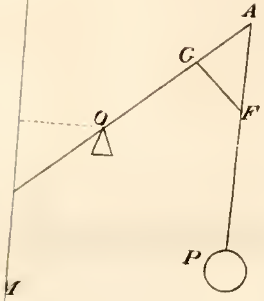


Fig. II.

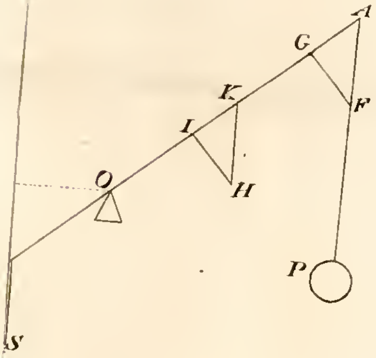


Fig. I.

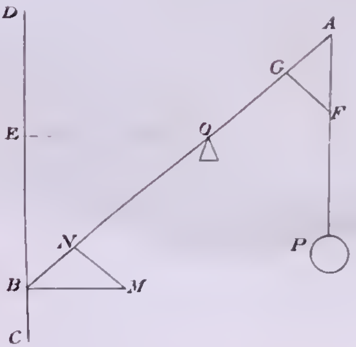
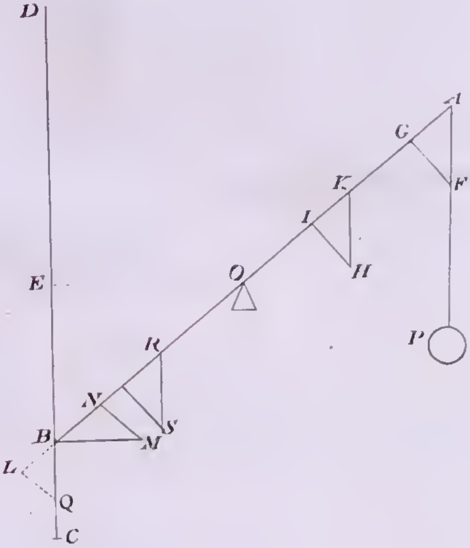

D
A
G
F
E
O
N
P
B
M
C

Fig. II.


D
A
G
K
F
I
H
O
E
R
P
N
S
B
M
L
Q
C

sidera, quanto se si trascura lo sfregamento, si scorge uscire dal calcolo la quantità p, cioè il peso attaccato all'estremità della verga; il che mostra ad evidenza che qualunque sia questo peso, e quand'anco fosse infinitamente grande o infinitamente piccolo, la situazione della verga per l'equilibrio riman sempre la stessa. Ma ciò che vi ha di più singolare e memorabile, si è che quì il peso infinitamente picciolo non si può in verun conto riguardare come nullo; perchè riguardandosi come nullo il peso annesso alla verga, ed inoltre supponendosi la verga non grave, questa dee rimanere equilibrata ed immobile in tutte le possibili situazioni, laddove essendo comunque infinitamente picciolo il peso attaccato all'estremità della verga, la posizione di equilibrio è una sola, cioè quella, in cui posto nullo lo sfregamento, la parte della verga fra il muro e il sostegno riesce eguale alla prima di due medie proporzionali fra la distanza del sostegno dal muro e la lunghezza della verga.

Quì è anco da notarsi, che supposta la verga pesante, ma senza alcun peso estrinseco attaccato alla sua estremità, la sua situazione per l'equilibrio esige, che la parte della verga fra l'appoggio e il muro sia la prima di due medie proporzionali fra la distanza dell'appoggio dal muro, e la metà della lunghezza della verga, il che si deduce dall'equazione del Cor. 2.°, la quale diventa in quest'ipotesi $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} a b^2}$. Ed anche quì scorgesi uscire dal calcolo la lettera m, il che vale quanto il dire, essere sempre unica ed inalterabile la posizione di equilibrio della verga pesante, comunque voglia supporsi svariato il suo peso.

DELLA FERMEZZA O RESISTENZA DE' CANALI CONTRO LO SFORZO DELL' ACQUA

MEMORIA

Di Gregorio Fontana

Ricevuta il dì 25. Novembre 1801.

TEOREMA I.°

1. SE ad una conserva piena d' acqua si adatta un canale cilindrico esteriormente chiuso, e di pareti puramente superficiali, la pressione del fluido contro la superficie interna del canale produce in ciascun elemento della periferia d' una qualunque sezione circolare del canale una tensione o distrazione, la quale ha per misura il prodotto del suo semidiametro per la distanza del centro di quella sezione dalla superficie dell' acqua della conserva.

Dim.

Rappresenti il cerchio GPR (fig. 1.ª) la sezione circolare del canale; e poichè l' acqua preme tutti i punti della circonferenza circolare nella direzione dei raggi, piglisi sul prolungamento del raggio CO la retta OB, la quale esprima la pressione contro il punto O, e prodotti egualmente i due elementi o latercoli eguali GO, OP della circonferenza, formisi intorno alla diagonale OB il rombo NM, i di cui lati ON, OM denoteranno le tensioni generate negli elementi OP, OG della forza premente OB risoluta nelle due ON, OM. Starà dunque la pressione del fluido nel punto O alla tensione dell' elemento OP come sta OB ad ON, ovvero per la similitudine de' triangoli NBO, CPO come sta OP a CP; e va-

valendo questo discorso per tutti i punti della circonferenza GPR, ne viene in conseguenza, che la pressione contro tutta la circonferenza sta alla tensione di essa in ciascun de' suoi elementi, come sta la circonferenza GPR al raggio CP. Ma dagli ordinarj principj Idrostatici si raccoglie che la pressione contro la circonferenza GPR viene rappresentata con moltiplicare la stessa circonferenza per la distanza del suo centro dalla superficie dell' acqua del recipiente; perciò la tensione di ciascun elemento della circonferenza sarà espressa dal prodotto del semidiametro CP per la distanza del centro C dal livello dell' acqua della conserva. Il che era &c.

La dimostrazione di questo Teorema è del Sig. Ab. Bossut nella sua Idrodinamica §. 40, ed è la più semplice e rigorosa di quante finora sieno state prodotte.

2. Chiamata A l' altezza dell' acqua del recipiente sopra il centro della sezione circolare del canale, R il raggio della stessa sezione, sarà AR l' espressione della forza tutta impiegata a tendere le fibre della sua circonferenza, cioè della forza, che tutta si esercita a fendere o spaccare il canale. Di quì si scopre il grossolano errore di chi suppone, che tutta la pressione del fluido sia impiegata a produrre la rottura del canale, mentre non è che una parte di tal pressione quella che tende a spezzarlo, cioè una parte simile dell' intera pressione, come è il raggio della circonferenza del cerchio, vale a dire meno di un sesto.

3. Non si è quì tenuto conto della grossezza del canale, la quale si è assunta infinitesima, ma se questa nella pratica in paragone del raggio R riuscirà sensibile, allora nominando R il semidiametro della superficie interna, R' quello dell'esterna, per ottenere lo sforzo diretto a fendere l'anello converrà prendere il medio aritmetico $\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R'$, e questo moltiplicato per A ne somministrerà assai davvicino il valore.

PROBLEMA I.°

4. Conoscendo con un esperimento immediato l' altezza del fluido sopra una data sezione d' un canale, e il diametro dello stesso canale che è sul punto di fendersi nella data sezione, ritrovare per ogni altro canale della stessa materia e grossezza del precedente l' altezza del fluido, e il diametro che dovrà avere per resistere alla pressione senza spezzarsi.

Sol.

Egli è evidente, che ne' canali fatti della stessa materia e forniti di pareti della stessa grossezza gli anelli dell'uno opporranno uguale resistenza ad essere spezzati che gli anelli dell' altro. Ora se A indica l' altezza nota dell' acqua sopra il centro d' un dato anello nel canale dell' esperimento, R il semidiametro noto del canale, ovvero dell' anello, supposta assai picciola la grossezza delle pareti in confronto della larghezza del tubo, si ha RA = allo sforzo dell' acqua per rompere l' anello, e nello stato di equilibrio RA = alla resistenza dell' anello: e così nell' altro tubo, dove a, r denotano l' altezza dell' acqua, e il semidiametro, trovasi nello stato di equilibrio ar = alla resistenza dell' anello contro lo sforzo che tende a distaccare le pareti. Essendo pertanto uguale una siffatta resistenza così in un canale come nell'altro, nasce quindi AR $= ar$, e però 1.° $a = \frac{AR}{r}$, 2.° $r = \frac{AR}{a}$. Il che era &c.

5. Se la grossezza delle pareti del tubo non sarà molto picciola per rapporto alla sua larghezza, allora R, r nella formola precedente denoteranno (§. 3) i medj aritmetici fra i semidiametri della superficie interna ed esterna del tubo.

6. Es. Un tamburo di piombo d' un piede di diametro, e di $2\frac{1}{2}$ linee di grossezza presso Mariotte (Mem. des Eaux Part. V. Dis. II.) portò l' acqua a 100 piedi di altezza senza rompersi, s' ingobbò però un tal poco all' infuori. Fatto radere il piombo nella gobba fino a che si riducesse a un poco meno d' una linea di grossezza, si spaccò con una fessura lunga tre pollici. Perciò posto $R = \frac{1}{2}$ piede, $A = 100$, si ha $RA = 50$. Se ora si cerca a quale altezza sosterrà l'acqua un tubo di piombo di egual grossezza, cioè d' un pò meno d' una linea, e che ha un pollice di semidiametro, fatto $r = \frac{1}{12}$, si troverà $a = \frac{RA}{r} = 50.12 = 600$ piedi. E parimenti cercandosi qual raggio dovrà avere un tubo di piombo di questa stessa grossezza per resistere alla pressione dell' acqua alta 1000 piedi sopra il centro d' un dato anello del tubo, si farà $a = 1000$, e si otterrà

$$r = \frac{RA}{a} = \frac{50}{1000} = \frac{1}{20} \text{ piede} = 7\frac{1}{5} \text{ lin.}$$

TEOREMA II.°

7. La forza di tenacità o aderenza assoluta dei solidi in ciascuna fibra o in ciascun punto fisico, colla qual forza resistono a quella che tende a strapparli perpendicolarmente alla sezione di rottura, seguita la ragione composta della diretta del peso massimo che possono sostenere senza rompersi, e dell' inversa della sezione di rottura.

Dim.

Supponendosi uniforme l' adesione in ciascuna fibra o particella costitutiva del solido, senza la qual supposizione non potrebbe stabilirsi alcuna teoria intorno all' adesione de corpi, chiaramente apparisce, che se richiedesi una certa forza per distaccare una particella dall' altra nella sezione di rottura, la forza intera che le distacca e schianta tutte, sarà come il numero di esse, cioè come la sezione di rottura.

Chiaminsi dunque P, p i pesi massimi, che possono reggersi dai solidi senza schiantarsi, S, s le sezioni di rottura nell' ipotesi che le adesioni o tenacità T, t sieno eguali in un solido e nell'altro, si avrà $P : p :: S : s$; e supposte uguali le sezioni di rottura, e diseguali le adesioni, egli è evidente, che sarà $P : p :: T : t$. Perciò assunte ineguali le sezioni, e le tenacità, nasce $P : p :: ST : st$, e di quì si deduce immediatamente $T : t :: \frac{P}{S} : \frac{p}{s}$. Il che era &c.

Più brevemente così: La forza necessaria per rompere una sola fibra è appunto la misura della tenacità; dunque la forza necessaria per romperle tutte non è altro che la tenacità moltiplicata pel numero di quelle, cioè $P = TS$, e quindi $T = \frac{P}{S}$. Il che era &c.

8. Coll' ajuto di questo Teorema si viene in cognizione della tenacità delle diverse sostanze, qualora siasi esplorato con un esperimento il massimo peso che possono sostenere, ovvero il minimo peso schiantante.

9. Es. Il Sig. Dan. Bernoulli (Hydrodyn. p. 28.) ridusse un filo rotondo di bronzo di $\frac{2}{11}$ lin. di diametro all' estremo di schiantarsi col peso di 18 libbre di Norimberga, ed una lastra rettangola di piombo larga $\frac{5}{4}$ lin. e grossa $\frac{1}{131}$ lin. col peso di $\frac{7}{32}$ libbre. Cercasi il rapporto delle tenacità del bronzo e del piombo. Nel filo di bronzo la sezione di rottura è un cerchio, che ha per diametro $\frac{2}{11}$ lin., e conseguentemen-

mente per circonferenza $\frac{2}{11} \times 3,14$; e però $= \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} \cdot 3,14 = \frac{1}{121} \cdot 3,14$; e $P = 18$. Laonde $T = \frac{P}{S} = \frac{18 \,.\, 121}{3,14}$.

Nella lastra di piombo la sezione di rottura è $s = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{131}$, $p = \frac{7}{32}$. Dunque $t = \frac{p}{s} = \frac{7.4.131}{32\,.\,5} = \frac{7.131}{40} = \frac{917}{40}$. Perciò $T : t :: \frac{18.121}{3,14} : \frac{917}{40} :: \frac{18.121.40}{917.3,14} : 1 :: 30,25 : 1$. Di quì si scorge, che la tenacità del bronzo è più di trenta volte maggiore che non quella del piombo.

10. E' quì necessario avvertire, che ne' corpi arrendevoli, come sono appunto i metalli, le fibre si stirano e dilatano prima di rompersi, e quindi si muta sensibilmente la loro figura nel tempo dell' esperienza, e la grossezza del solido diventa minore nel sito della rottura. Nasce adunque la quistione se in questi casi debba aversi riguardo alla sezione di rottura dopo l' assottigliamento del solido per la distensione delle sue fibre, o piuttosto alla sezione da concepirsi nello stesso luogo avanti lo stiramento. Gli sperimenti di Musschenbroek lasciano la cosa indecisa accordandosi altri colla prima, altri colla seconda sezione (Musschen. Introd. ad Cohaer. Corpor. Firm. Exper. 51.) Stando al puro ragionamento pare che la seconda non basti, avvegnachè il peso schiantante non agisce solamente strappando le fibre nella sezione di rottura, ma ancora stirandole e distendendole.

PROBLEMA II.°

11. Fissare ne' canali il rapporto delle loro grossezze, diametri, tenacità, e delle altezze dell' acqua premente, nel caso dell' equilibrio tra la forza fendente dell' acqua, e la resistenza del canale.

Sol.

Ritenute le precedenti denominazioni, e chiamate G, g le grossezze dei canali si osservi, che la sezione di rottura d' un dato anello del canale non è altro che la linea, la quale rappresenta la grossezza dello stesso canale. Moltiplicando adunque la tenacità per la grossezza, il prodotto TG esprimerà (§. 7.) la resistenza, che oppone il tubo alla forza sfiancante dell' acqua; e questa essendo = AR (§. 1), si ha nello stato di equilibrio TG = AR, e $tg = ar$. Laonde

1.°

$$T : t :: \frac{AR}{G} : \frac{ar}{g}$$

2.°

$$G : g :: \frac{AR}{T} : \frac{ar}{t}$$

3.°

$$A : a :: \frac{TG}{R} : \frac{tg}{r}$$

4.°

$$R : r :: \frac{TG}{A} : \frac{tg}{a}$$

Il che era &c.

12. Avuto riguardo alle diverse specifiche gravità de'fluidi prementi, e chiamate queste M, m, è manifesto che nascerà TG = ARM, $tg = arm$, e quindi cinque differenti teoremi espressi da cinque analogie.

13. Intorno ai valori di R, r si osservi la cautela prescritta al §. 5.

14. Es. I.° Si cerca la grossezza da darsi ad un tubo di piombo di 6 pollici di diametro per sostenere senza rompersi lo sforzo d' una colonna d' acqua di 100 piedi di altezza. Convien partire da un' esperienza nota: ora Parent ha sperimentato che un tubo di piombo di un piede di diametro e di 60 piedi di altezza aver dee 6 linee di grossezza per sostenere verticalmente senza crepare lo sforzo dell' acqua. Fatto adunque nel tubo di Parent $R = \frac{1}{2}$ pi., $G = 6$ lin., $A = 60$ pi., e nel tubo proposto $r = \frac{1}{4}$ pi., $a = 100$ pi., e $T = t = 1$, si ha l' analogia $\frac{AR}{T} : \frac{ar}{t} :: G : g$, cioè

$$\frac{1}{2} \cdot 60^{\text{pi.}} : \frac{1}{4} \cdot 100^{\text{pi.}} :: 6^{\text{lin.}} : g = \frac{25^{\text{pi}} \cdot 6^{\text{lin.}}}{30^{\text{pi.}}} = \frac{25 \cdot 6^{\text{lin.}}}{30} = 5 \text{ lin.}$$

15. Es. II.° Si vuol sapere qual grossezza aver debba un canale di bronzo di 4 pollici di diametro per reggere senza fendersi al peso d' una colonna di mercurio di 30 piedi di altezza. Dall' analogia (§. 12) $\frac{ARM}{T} : \frac{arm}{t} :: G : g$ se ne dedurrà la risposta: imperciocchè supposto lo stesso esperimento di Parent, e però preso $G = 6$ lin., $R = 6$ poll., $A = 60$ pi., $M = 1$, $m = 14$ per essere la gravità specifica dell' acqua a quella del mercurio come $1 : 14$; e $T = 1$, $t = 30$, tale essendo il rapporto della tenacità del piombo e del bronzo (§. 9), e nel tubo proposto facendo $a = 30$ pi., $r = 2$ poll., la precedente analogia diventa $60^{\text{pi.}} \cdot 6^{\text{poll.}} :$

$$\frac{30^{\text{pi.}} \cdot 2^{\text{poll.}} \cdot 14}{30} :: 6^{\text{lin}} : g = \frac{14 \cdot 30^{\text{pi.}} \cdot 2^{\text{poll.}} \cdot 6^{\text{lin.}}}{30 \cdot 60^{\text{pi.}} \cdot 6^{\text{poll.}}} = \frac{14 \cdot 30 \cdot 2 \cdot 6^{\text{lin.}}}{30 \cdot 60 \cdot 6}$$

$$= \frac{7}{15} \text{ lin.}$$

PRO-

PROBLEMA III.°

16. Ritrovato con un esperimento immediato il peso che riduce all' estremo di schiantarsi un solido cilindrico d' una data materia, determinare in un canale della stessa materia la grossezza, il diametro, e l' altezza dell' acqua nello stato di equilibrio fra la resistenza del canale e lo sforzo sfiancante del fluido.

Sol.

Sia S la sezione di rottura del solido cilindrico, P il peso schiantante, e si concepisca una lastra della stessa materia, che abbia una larghezza $= l$, ed una grossezza $= g$. Dal Teor. II.° si raccoglie che il peso, da cui questa lastra sarà ridotta all' estremo di rompersi, sarà $\frac{Plg}{S}$ essendo lg la sezione di rottura di essa lastra. Incurvisi ora questa lastra medesima in un canale del semidiametro r, della grossezza g, e della lunghezza l, e chiamata a l' altezza dell' acqua sopra l' asse orizzontale del canale, si ha ra per l' espressione della forza impiegata a spezzare un anello qualunque del canale. Se pertanto si suppone, che la fessura del tubo si stenda per tutta la lunghezza l, converrà moltiplicare la forza ra per tutti i punti di questa lunghezza per avere l' espressione della forza operante in tutta la lunghezza. Sarà dunque ral un volume di fluido, il di cui peso rappresenta un tale sforzo, e però chiamando m la gravità specifica del fluido, il detto sforzo sarà $mral$. Ora dalla dimostrazione del Teor. I.° si fa palese che questo sforzo agisce in direzione perpendicolare alla fessura, cioè alla sezione di rottura; ed è altronde evidente, che la lastra o diritta, o incurvata in cilindro oppone la medesima resistenza alla forza operante in direzione perpendicolare alla sezione di rottura. Dunque lo sforzo, che spezza la lastra diritta, debb' essere uguale a quello, che la spacca incurvata, cioè $\frac{lgP}{S} = mral$, ovvero $\frac{P}{S} = \frac{mra}{g}$, e perciò

1.°

$$a = \frac{gP}{mrS}$$

2.°

$$r = \frac{gP}{maS}$$

3.°

$$g = \frac{mraS}{P}$$

4.°

$$m = \frac{gP}{raS}$$

Il che era &c.

17. Es. I.° Cercasi a qual' altezza può sostener l' acqua senza crepare un tubo di bronzo di 1 piede di diametro, e $\frac{2}{11}$ lin. di grossezza.

Nell' esperienza del Sig. Bernoulli (§. 9) trovasi $S = \frac{3,14}{121}$ lin. quadr. $= \frac{3,14}{121 \cdot 144^2}$ pi. quadr., $P = 18$ libb., e per le condizioni si ha $r = \frac{1}{2}$ pi., $g = \frac{2}{11}$ lin. $= \frac{2}{11 \cdot 144}$ pi., $m = 70$ libb. per un piede cubico d' acqua. Perciò $a = \frac{2 \cdot 18 \cdot 2 \cdot 121 \cdot 144^2}{11 \cdot 70 \cdot 3,14 \cdot 144} = \frac{4 \cdot 18 \cdot 11 \cdot 144}{70 \cdot 3,14} = 518,9$ pi. Dunque il tubo può portar l' acqua a più di 518 piedi d' altezza senza crepare.

18. Es. II.° Si domanda a qual' altezza può sostenere l' acqua senza spezzarsi un cannone di 3 pollici di calibro e 3 di grossezza. In questo caso, siccome la grossezza è considerabile, ed uguaglia il diametro della superficie interna, dee pigliarsi r medio proporzionale aritmetico fra il semidiametro della superficie interna e il semidiametro dell' esterna; però si fa $r = \frac{1\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}}{2}$ poll. $=$ 3 poll. $= \frac{1}{4}$ pi. Conseguentemente essendo anche $g = \frac{1}{4}$ pi., sarà $a = \frac{gP}{mrS} = \frac{18 \,.\, 121 \,.\, 144^2}{70 \,.\, 3,14} = \frac{9 \,.\, 121 \,.\, 144^2}{35 \,.\, 3,14} = \frac{22581504}{109,9} = 205473,2$ pi.. Laonde potrà il cannone reggere a tanti piedi d' acqua senza crepare, cioè a più di 6421 volte la pressione dell' atmosfera, e perciò la forza espansiva e sfiancante della polvere nell' atto dell' accensione può sorpassare più di 6421 volte la pressione dell' atmosfera senza far crepare il cannone.

19. Es. III.° Si vuol sapere la grossezza, che aver debbe un canale di piombo di 1 piede di diametro per resistere allo sforzo dell' acqua alta 95 piedi. Nell' esperienza fatta dal Sig. Bernoulli sulla lastra di piombo (§. 9) si ha $S = \frac{5}{4} \,.\, \frac{1}{131}$ lin. quadr., $P = \frac{7}{32}$ libb. Si faccia dunque $r = \frac{1}{2}$ pi. $=$ 72 lin., $a = 95$ pi. $= 95 \,.\, 144$ lin. e si ponga mente, che m dee sempre esprimere il peso diviso per un dato volume, cioè per 1 piede cubico, cioè per 144^3 linee cubiche, e che però essendosi quì ridotte le misure a linee conviene prendere $m = \frac{70}{144^3}$. In conseguenza risulta $g = \frac{70 \,.\, 72 \,.\, 95 \,.\, 144 \,.\, 5 \,.\, 32}{144^3 \,.\, 7 \,.\, 4 \,.\, 131} = \frac{160 \,.\, 180 \,.\, 95}{144^2 \,.\, 131} = \frac{2736000}{2716416}$ lin. $=$ 1,01 lin. vale a dire il

tubo resisterà alla pressione dell' acqua senza spezzarsi purchè abbia 1 linea e $\frac{1}{100}$ di grossezza.

20. Il Musschenbroek nella cit. Dissert. Prop. 119. Schol. pretende che nelle lastre fatte dello stesso metallo, e dotato della stessa larghezza, ma di differente grossezza la resistenza alla rottura seguiti la ragione duplicata delle loro grossezze. Si fonda egli sopra il seguente unico esperimento. Una lastra di piombo larga $\frac{7}{36}$ poll., grossa $\frac{9}{200}$ poll. non si ruppe nel mezzo se non dopo aver sostenuto il peso di 10 libb., 6 onc., 2 dram., ed un'altra pure di piombo egualmente larga, ma due volte più grossa, cioè $\frac{9}{100}$ poll. non si ruppe che al peso di libbre 45; *adeoque*, conchiude Musschenbroek, *fuit firmitas hujus laminae in ratione duplicata crassitiei, quam proportionem Romerus etiam assumsit*. Ma oltrecchè questa esperienza non prova a rigore una tal proporzione, poichè la seconda lastra con doppia grossezza portò un peso notabilmente più che quadruplo della prima, non pare che un solo esperimento possa bastare per stabilire un Canone e piantare una regola generale.

21. Tre sono le regole, che per proporzionare le grossezze dei canali allo sforzo dell' acqua premente deduce quest' Autore da quell' unica esperienza: eccole colle sue stesse parole.

Regula Prima

Si manente altitudine aquae eadem, mutanda est tuborum diameter, ut firmitas maneat, sumenda est crassities metalli in ratione subduplicata diametri.

Regula Secunda

Si immutetur tuborum altitudo, manente diametro, etiam metallica crassities requiritur in ratione subduplicata altitudinum, ut maneat proporzionalis firmitas.

Regula Tertia

Hinc mutata tuborum altitudine et diametro, requiritur metallica crassities in ratione composita ex subduplicata diametrorum et subduplicata altitudinum ratione.

Queste regole vengono comprese nella seguente analogia

$$G : g : : \sqrt{AD} : \sqrt{ad}$$

dove D, *d* rappresentano i diametri dei tubi. Ma una tale analogia non si accorda punto colla ritrovata al §. 11, $G : g : : \frac{AR}{T} : \frac{ar}{t}$, la quale per essere ne' tubi della stessa materia $T = t$, e il rapporto de' raggi uguale a quello de' diametri, diventa $G : g : : AD : ad$; e quest' ultima proporzione essendosi ricavata con raziocinio diretto non può bastare un esperimento unico ed isolato per distruggerla.

22. Ma il più singolare si è che questo celebre Sperimentatore volendo calcolare una laboriosa Tavola per regolare nella pratica la grossezza de' Condotti di piombo, inciampa contro i suoi stessi principj, ed urta in un paralogismo, che falsificando tutti i risultati rende inutile anzi pericolosa la fatica intrapresa. Stabilisce egli pertanto le due analogie

1.ª

$$G : g : : \sqrt{A} : \sqrt{a}$$

2.ª

$$G : g : : \sqrt{D} : \sqrt{d}$$

e da queste, mediante la moltiplicazione, pretende di poter inferire la terza

3.ª

$$G^2 : g^2 : : \sqrt{AD} : \sqrt{ad}$$

cioè $$G : g : : \sqrt[4]{AD} : \sqrt[4]{ad},$$

la quale espressamente contraddice alla terza regola (§. 21) di questo medesimo Autore. È poi per se chiaro e palese, che dalla moltiplicazione delle due prime analogie non possono risultare i quadrati G^2, g^2, perchè le grandezze G, g della prima analogia non sono punto le medesime che quelle della seconda, fuorchè nell'unico caso che stia $A : a :: D : d$.

Parte pertanto Musschenbroek dal noto esperimento di Mariotte (§. 6.), supponendo che il tamburo di piombo d'un piede di diametro incominci a soffrire e alterarsi quando l'acqua giugne all'altezza di 100 piedi, essendo di $2 \frac{1}{2}$ linee la grossezza del tubo. Riduce queste linee in 0, 2 poll., e dà il nome di linea alla decima parte del pollice, ed in tali linee immaginarie calcola la grossezza dei tubi da 1 sino a 9 pollici di diametro, e da 10 sino a 100 piedi di altezza; ma siccome tutti que' calcoli sono fondati sulla patentemente erronea proporzione $G : g :: \sqrt[4]{AD} : \sqrt[4]{ad}$, bisognerà ben guardarsi dal far uso nella pratica de' risultati della Tavola di quel celebre Fisico.

23. Potendo però essere di uso grandissimo in molti casi l'avere alla mano una tavola delle varie grossezze da darsi ai Canali di piombo per resistere allo sforzo dell' acqua senza restar danneggiati, credo opportuno di dar quì la rettificazione della Tavola erronea di Musschenbroek, e ciò tanto nell' ipotesi sperimentale, che le grossezze sieno come le radici delle altezze dell' acqua e de' diametri de' tubi, quanto nell' ipotesi teorica, che le grossezze sieno come le altezze e i diametri semplicemente. Preso adunque per base l' esperimento di Mariotte, nel quale un tubo d' un piede di diametro, e di due linee *immaginarie* di grossezza cominciò a risentirsi, e far gobba all' altezza di 100 piedi d' acqua, si fa $A = 100$ pi., $D = 1$ pi., $G = 2$ lin. immag. Quindi si passa tosto al maneggio delle tre formole seguenti

1.ª

Formola erronea di Musschenbroek

$$g = \mathrm{G}\sqrt[4]{\frac{a\,d}{\mathrm{A\,D}}} = 2\sqrt[4]{\frac{a\,d}{100}}\ \text{lin.}$$

2.ª

Formola sperimentale, ma non ben certa

$$g = \mathrm{G}\sqrt{\frac{a\,d}{\mathrm{A\,D}}} = \frac{1}{5}\sqrt{ad}\ \text{lin.}$$

3.ª

Formola puramente teoretica

$$g = \frac{\mathrm{G}\,a\,d}{\mathrm{A\,D}} = \frac{a\,d}{50}\ \text{lin.}$$

Tavola delle Grossezze de' Canali di Piombo

Per il diametro di un pollice.

Altezze dell'acqua in Piedi	Grossezze del Tubo in linee immaginarie calcolate da Musschen. sulla formola erronea	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola sperimentale, ma non ben certa	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola puramente teoretica
	$g=G\sqrt[4]{\frac{ad}{AD}}=2\sqrt[4]{\frac{ad}{100}}$ lin.	$g=G\sqrt{\frac{ad}{AD}}=\frac{1}{5}\sqrt{ad}$ lin.	$g=\frac{ad}{50}$ lin.
10	0,6042	0,1826	0,0166
15	0,6687	0,2236	0,0250
20	0,7186	0,2582	0,0333
25	0,7598	0,2887	0,0416
30	0,7953	0,3162	0,0500
35	0,8060	0,3416	0,0583
40	0,8545	0,3651	0,0666
45	0,8801	0,3873	0,0750
50	0,9036	0,4083	0,0833
55	0,9253	0,4282	0,0916
60	0,9457	0,4472	0,1000
65	0,9648	0,4655	0,1083
70	0,9829	0,4830	0,1166
75	1,0000	0,5000	0,1250
80	1,0163	0,5164	0,1333
85	1,0315	0,5323	0,1416
90	1,0467	0,5477	0,1500
95	1,0633	0,5627	0,1583
100	1,0745	0,5774	0,1666

Tavola delle Grossezze de' Canali di Piombo

Per il diametro di 2 pollici.

Altezze dell'acqua in Piedi	Grossezze del Tubo in linee immaginarie calcolate da Musschen. sulla formola erronea	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola sperimentale ma non ben certa	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola puramente teoretica
	$g=G\sqrt[4]{\frac{ad}{AD}}=2\sqrt[4]{\frac{ad}{100}}$ lin.	$g=G\sqrt{\frac{ad}{AD}}=\frac{1}{5}\sqrt{ad}$ lin.	$g=\frac{ad}{50}$ lin.
10	0,7186	0,2582	0,0333
15	0,7953	0,3162	0,0500
20	0,8545	0,3651	0,0666
25	0,9036	0,4083	0,0833
30	0,9457	0,4472	0,1000
35	0,9829	0,4830	0,1166
40	1,0163	0,5164	0,1333
45	1,0467	0,5477	0,1500
50	1,0745	0,5774	0,1666
55	1,1004	0,6055	0,1833
60	1,1246	0,6325	0,2000
65	1,1474	0,6583	0,2166
70	1,1688	0,6831	0,2333
75	1,1892	0,7071	0,2500
80	1,2085	0,7303	0,2666
85	1,2270	0,7528	0,2833
90	1,2446	0,7746	0,3000
95	1,2615	0,7958	0,3166
100	1,2799	0,8165	0,3333

Ta-

Tavola delle Grossezze dei Canali di Piombo

Per il diametro di 3. pollici.

Altezze dell'acqua in Piedi	Grossezze del Tubo in linee immaginarie calcolate da Musschen. sulla formola erronea	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola sperimentale ma non ben certa	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola puramente teoretica
	$g=G\sqrt[4]{\frac{ad}{AD}}=2\sqrt[4]{\frac{ad}{100}}$ lin.	$g=G\sqrt{\frac{ad}{AD}}=\frac{1}{5}\sqrt{ad}$ lin.	$g=\frac{ad}{50}$ lin.
10	0,7952	0,3162	0,0500
15	0,8361	0,3873	0,0750
20	0,9457	0,4472	0,1000
25	1,0000	0,5000	0,1250
30	1,0467	0,5477	0,1500
35	1,0877	0,5916	0,1750
40	1,1247	0,6325	0,2000
45	1,1582	0,6708	0,2250
50	1,1892	0,7071	0,2500
55	1,2178	0,7416	0,2750
60	1,2446	0,7746	0,3000
65	1,2701	0,8062	0,3250
70	1,2935	0,8367	0,3500
75	1,3160	0,8660	0,3750
80	1,3374	0,8944	0,4000
85	1,3582	0,9220	0,4250
90	1,3774	0,9487	0,4500
95	1,3961	0,9747	0,4750
100	1,4142	1,0000	0,5000

Tavola delle Grossezze de' Canali di Piombo

Per il diametro di 4 pollici.

Altezze dell'acqua in Piedi	Grossezze del Tubo in linee immaginarie calcolate da Musschen. sulla formola erronea	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola sperimentale ma non ben certa	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola puramente teoretica
	$g=C\sqrt[4]{\frac{ad}{AD}}=2\sqrt[4]{\frac{ad}{100}}$ lin.	$g=C\sqrt{\frac{ad}{AD}}=\frac{1}{5}\sqrt{ad}$ lin.	$g=\frac{ad}{50}$ lin.
10	0,8304	0,3651	0,0666
15	0,9457	0,4472	0,1000
20	1,0163	0,5164	0,1333
25	1,0745	0,5774	0,1666
30	1,1247	0,6325	0,2000
35	1,1688	0,6831	0,2333
40	1,2085	0,7303	0,2666
45	1,2423	0,7746	0,3000
50	1,2778	0,8165	0,3333
55	1,3087	0,8563	0,3666
60	1,3374	0,8944	0,4000
65	1,3645	0,9309	0,4333
70	1,3900	0,9661	0,4666
75	1,4142	1,0000	0,5000
80	1,4372	1,0328	0,5333
85	1,4659	1,0646	0,5666
90	1,4802	1,0955	0,6000
95	1,5003	1,1255	0,6333
100	1,5196	1,1548	0,6666

Ta-

Tavola delle Grossezze de' Canali di Piombo

Per il diametro di 5 pollici

Altezze dell'acqua in Piedi	Grossezze del Tubo in linee immaginarie calcolate da Musschen. sulla formola erronea	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola sperimentale ma non ben certa	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola puramente teoretica
	$g=G\sqrt[4]{\frac{ad}{AD}}=2\sqrt[4]{\frac{ad}{100}}$ lin.	$g=G\sqrt{\frac{ad}{AD}}=\frac{1}{5}\sqrt{ad}$ lin.	$g=\frac{ad}{50}$ lin.
10	0,9036	0,4083	0,0833
15	0,9858	0,5000	0,1250
20	1,0745	0,5774	0,1666
25	1,1362	0,6455	0,2083
30	1,1892	0,7071	0,2500
35	1,2359	0,7638	0,2916
40	1,2778	0,8165	0,3333
45	1,3160	0,8660	0,3750
50	1,3514	0,9129	0,4166
55	1,3837	0,9574	0,4583
60	1,4142	1,0000	0,5000
65	1,4437	1,0409	0,5416
70	1,4690	1,0801	0,5833
75	1,4953	1,1180	0,6250
80	1,5196	1,1547	0,6666
85	1,5428	1,1902	0,7083
90	1,5650	1,2247	0,7500
95	1,5863	1,2583	0,7916
100	1,6068	1,2910	0,8333

Tavola delle Grossezze de' Canali di Piombo

Per il diametro di 6 pollici

Altezze dell'acqua in Piedi	Grossezze del Tubo in linee immaginarie calcolate da Musschen. sulla formola erronea	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola sperimentale ma non ben certa	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola puramente teoretica
	$g=G\sqrt[4]{\frac{ad}{AD}}=2\sqrt[4]{\frac{ad}{100}}$ lin.	$g=G\sqrt{\frac{ad}{AD}}=\frac{1}{5}\sqrt{ad}$ lin.	$g=\frac{ad}{50}$ lin.
10	0,9457	0,4472	0, 1000
15	1,0466	0,5477	0, 1500
20	1,1287	0,6325	0, 2000
25	1,1891	0,7071	0, 2500
30	1,2449	0,7746	0, 3000
35	1,2935	0,8367	0, 3500
40	1,3374	0,8944	0, 4000
45	1,3773	0,9487	0, 4500
50	1,4142	1,0000	0, 5000
55	1,4483	1,0488	0, 5500
60	1,4801	1,0954	0, 6000
65	1,5101	1,1402	0, 6500
70	1,5383	1,1832	0, 7000
75	1,5650	1,2247	0, 7500
80	1,5904	1,2649	0, 8000
85	1,6150	1,3038	0, 8500
90	1,6380	1,3417	0, 9000
95	1,6603	1,3784	0, 9500
100	1,6817	1,4142	1, 0000

Tavola delle Grossezze de' Canali di Piombo

Per il diametro di 7 pollici

Altezze dell'acqua in Piedi	Grossezze del Tubo in linee immaginarie calcolate da Musschen. sulla formola erronea $g=G\sqrt[4]{\frac{ad}{AD}}=2\sqrt[4]{\frac{ad}{100}}$ lin.	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola sperimentale ma non ben certa $g=G\sqrt{\frac{ad}{AD}}=\frac{1}{5}\sqrt{ad}$ lin.	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola puramente teoretica $g=\frac{ad}{50}$ lin.
10	0, 9829	0, 4830	0, 1166
15	1, 0877	0, 5916	0, 1750
20	1, 1688	0, 6831	0, 2333
25	1, 2359	0, 7638	0, 2916
30	1, 2934	0, 8367	0, 3500
35	1, 3444	0, 9037	0, 4083
40	1, 3900	0, 9661	0, 4666
45	1, 4315	1, 0247	0, 5250
50	1, 4698	1, 0801	0, 5833
55	1, 5052	1, 1328	0, 6416
60	1, 5383	1, 1832	0, 7000
65	1, 5693	1, 2315	0, 7583
70	1, 5987	1, 2780	0, 8166
75	1, 6265	1, 3229	0, 8750
80	1, 6530	1, 3694	0, 9333
85	1, 6783	1, 4083	0, 9916
90	1, 7022	1, 4491	1, 0500
95	1, 7251	1, 4888	1, 1083
100	1, 7478	1, 5275	1, 1666

Tavola delle Grossezze de' Canali di Piombo

Per il diametro di 8 pollici

Altezze dell'acqua in Piedi	Grossezze del Tubo in linee immaginarie calcolate da Musschen. sulla formola erronea	Grossezze del Tubo calcolate da noi sul'a forn ola sperimentale n a non ben certa	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola puramente teoretica
	$g=G\sqrt[4]{\frac{ad}{AD}}=2\sqrt[4]{\frac{ad}{100}}$ lin.	$g=G\sqrt{\frac{ad}{AD}}=\frac{1}{5}\sqrt{ad}$ lin.	$g=\frac{ad}{100}$ lin.
10	1,0163	0,5164	0,1333
15	1,1277	0,6325	0,2000
20	1,2084	0,7303	0,2666
25	1,2777	0,8164	0,3333
30	1,3373	0,8944	0,4000
35	1,3900	0,9661	0,4666
40	1,4372	1,0328	0,5333
45	1,4853	1,0955	0,6000
50	1,5195	1,1548	0,6666
55	1,5560	1,2110	0,7333
60	1,5919	1,2649	0,8000
65	1,6226	1,3165	0,8666
70	1,6530	1,3662	0,9333
75	1,6818	1,4142	1,0000
80	1,7091	1,4606	1,0666
85	1,7312	1,5055	1,1333
90	1,7602	1,5492	1,2000
95	1,7841	1,5917	1,2666
100	1,8080	1,6330	1,3333

Ta-

Tavola delle Grossezze de' Canali di Piombo

Per il diametro di 9 pollici

Altezze dell'acqua in Piedi	Grossezze del Tubo in linee immaginarie calcolate da Musschen. sulla formola erronea $g=G\sqrt[4]{\frac{ad}{AD}}=2\sqrt[4]{\frac{ad}{100}}$ lin.	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola sperimentale ma non ben certa $g=G\sqrt{\frac{ad}{AD}}=\frac{1}{5}\sqrt{ad}$ lin.	Grossezze del Tubo calcolate da noi sulla formola puramente teoretica $g=\frac{ad}{50}$ lin.
10	1,0466	0,5477	0,1500
15	1,1582	0,6708	0,2250
20	1,2446	0,7746	0,3000
25	1,3161	0,8660	0,3750
30	1,3774	0,9487	0,4500
35	1,4315	1,0247	0,5250
40	1,4802	1,0954	0,6000
45	1,5240	1,1619	0,6750
50	1,5650	1,2247	0,7500
55	1,6028	1,2845	0,8250
60	1,6380	1,3417	0,9000
65	1,6712	1,3974	0,9750
70	1,7024	1,4492	1,0500
75	1,7320	1,5000	1,1250
80	1,7600	1,5492	1,2000
85	1,7871	1,5969	1,2750
90	1,8128	1,6432	1,3500
95	1,8417	1,6881	1,4250
100	1,8612	1,7320	1,5000

Del Medesimo.

DELLA PRESSIONE DELL' ACQUA IN MOTO CONTRO I VASI E TUBI PE' QUALI SCORRE

MEMORIA

Ricevuta il dì 25 *Novembre* 1801.

1.° L' acqua che esce dall' apertura di un vaso, o di un tubo può escire con velocità costante, o con velocità variabile. Quand' anco però la velocità dell' uscita sia costante, tale non sarà quella con cui scorrerà lungo il vaso o il tubo, se non nell' ipotesi che questo sia di egual larghezza in ogni sua parte; imperciocchè nel caso contrario varia la velocità al variare delle sezioni, e sempre in una ragione inversa di quelle. Ora egli è noto che la velocità non può variare senza l' azione di una forza acceleratrice, e questa forza è il risultato del peso di ciascuna particella, e quindi delle pressioni scambievoli delle une contro le altre, le quali forze, se si fanno tutte equilibrio nel fluido stagnante o nello stato di quiete, non lo conservano più nello stato di moto. Nell' investigare pertanto le leggi, secondo le quali il moto dell' acqua si accelera, è necessario farsi una giusta idea della pressione che l' acqua soffre in ciascun luogo del canale. Osservisi adunque, che se l' acqua precedente (Fig. 2) NPFT si avanzasse con tanta celerità, con quanta viene inseguita dall' acqua posteriore NTBA, per modo che l' acqua, che in questo momento è passata per NT non recasse il minimo impedimento all' acqua immediatamente seguente, non potrebbe quindi risultarne alcuna pressione. Ma se all' opposto l' acqua che in questo istante passa per

NT, più lentamente si avanza di quello che sia inseguita dall' acqua posteriore, sicchè sfuggir non possa l' incontro e l' urto di questa, nasce allora una pressione dell' acqua posteriore contro NT in direzione perpendicolare ad NT, ed una contropressione dell' acqua anteriore contro la stessa NT, come pure per la natura del fluido una pressione contro le pareti del tubo in quel luogo in direzione ancor essa perpendicolare al luogo premuto delle pareti. Passiam dunque al

PROBLEMA I.°

2. Cercasi la forza acceleratrice dell' elemento d' acqua $NntT$ compreso fra le due sezioni NT, nt infinitamente prossime, e normali alla linea centrale (*a*).

SOL.

Pongasi la porzione indefinita IC della linea centrale $= s$; l' area della sezione $NT = z$, la quale sarà una funzione di s; la massa d' acqua $ANTB = M$; e il tempo trascorso dal principio del moto dell' acqua $= t$. Suppongasi che l' elemento d' acqua $NntT = dM$ nel tempuscolo infinitesimo dt scorra uno spazietto $= Cc = ds$, movendosi tutte le particelle d' acqua di detto elemento con uguali velocità nella direzione della tangente CH. La forza acceleratrice che fa variare la velocità dell' elemento nel giugnere da C in c, risulta in parte dal peso di lui, in parte dalla pressione contro di esso esercitata dall' acqua, che gli sta davanti e di dietro. Considerandosi in fatti come un tutto da se la massa elementare $NntT$ si vede assai chiaro, che preme sopra NT la massa d' acqua posteriore ANTB, e sopra nt

---

(*a*) Per linea centrale intendo quella che passa per tutti i centri di gravità delle infinite falde, in cui s' immagina diviso il vaso o tubo.

in direzione contraria preme la massa d' acqua anteriore $n$PF$t$. Se ora la pressione contro NT si concepisce uguale al peso d' una colonna d' acqua, che ha per base NT $= z$, e per altezza p, sicchè posta $= 1$ la gravità specifica dell' acqua, pz rappresenti una tal pressione, questa si trasmette ad nt, e diventa $= p \cdot nt = p(z + dz)$. Per tal modo dalla pressione sopra NT risulta in nt una pressione rappresentata da $p(z + dz)$. Inoltre il peso dell' elemento N$nt$T, cioè dM preme ancor esso sopra nt, e perchè preme verticalmente all' ingiù, se si risolve questa pressione verticale in due, una perpendicolare ad nt, l' altra parallela e inoperosa, trovasi la prima $= d\mathrm{M} \cdot \cos.\varphi$, chiamando φ l' angolo composto dalla tangente CH, e dalla retta verticale CO. Tutta adunque la pressione perpendicolare, che soffre nt pel medesimo verso da C in c è $= p(z + dz) + d\mathrm{M} \cos.\varphi$. Avvertasi ora, che la stessa nt soffre, come si è detto, un' altra pressione contraria dall' acqua, che le sta innanzi $n$PF$t$; e riguardandosi l' elemento N$nt$T come una massa solida immersa nell' acqua, la sua superficie inferiore nt viene premuta perpendicolarmente da c in C con una forza $= pz + d.pz$, avvegnachè se la superficie superiore NT è premuta da una forza $= pz$, l' inferiore infinitamente prossima nt dee soggiacere ad una pressione $= pz + d.pz = pz + pdz + zdp$ diretta da c verso C. Di qui apparisce che nt si trova fra due pressioni opposte, una $= pz + pdz + d\mathrm{M}.\cos\varphi$, e tendente da C in c, l' altra $= pz + pdz + zdp$ e diretta da c verso C, onde sottratta questa da quella resta $d\mathrm{M}.\cos.\varphi - zdp$ per la pressione della superficie nt esercitata in direzione di Cc. Laonde tutte le forze motrici, che agiscono sull' elemento N$nt$T si riducono alla pressione $d\mathrm{M} \cos.\varphi - z\,dp$, che si concepisce come applicata al suo centro di gravità, e spinge l' elemento da C in c facendogli descrivere nell' istante dt lo spazietto C$c = ds$. Quindi nominando v la velocità, di ciascuna particella di quell'

quell' elemento, dal principio delle forze acceleratrici si ha $\frac{dM\cos\varphi - zdp}{dM} = \frac{vdv}{ds}$. Il che era &c.

Problema II.

3. Data un' equazione per la linea centrale ICE fra le coordinate ortogonali $IL = x$, $LC = y$, e date tutte le dimensioni del canale, e riguardando la pressione contro qualunque sezione NT come una funzione di s, ovvero IC, cercasi un' espressione generale per l' accelerazione di ciascun elemento N$ut$T.

Sol.

Si scorge tantosto, essere $dM = zds$ (posta cioè $= 1$ la forza acceleratrice della gravità terrestre), $\cos.\varphi = \frac{dx}{ds}$, $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Che però sostituendo questi valori nell' espressione generale della forza acceleratrice (Probl. prec.), questa si cambia in $\frac{dx - dp}{ds} = \frac{vdv}{ds}$. Il che era &c.

Problema III.

4. Nello stesso tubo ANPFB giugne l' acqua da principio sino in AB, ed egli va continuamente vuotandosi per l' efflusso dell' acqua dal foro PF: cercasi la velocità dell' acqua dopo che se ne sarà smaltita tanta, quanta riempiva lo spazio AKVB, anche nel supposto che una data forza, come sarebbe l' azione di uno stantuffo, premesse sopra la superficie suprema KV dell' acqua, che va abbassandosi.

Sol.

Ritenute le precedenti denominazioni, prendasi una sezione nota $Q\beta = n$, e la velocità dell' acqua che passa per es-

essa, facciasi $= u$; onde la velocità di quella che passa per la sezione indeterminata NT, sarà $= \frac{nu}{z}$ che abbiamo posto $= v$. Mà si è trovato precedentemente $dx - dp = vdv$; dunque poichè nell' ipotesi presente varia, come è chiaro, la u non meno della z, preso il valore di $vdv = \frac{n^2udu}{z^2} - \frac{n^2u^2dz}{z^3}$, si otterrà $dx - dp = \frac{n^2udu}{z^2} - \frac{n^2u^2dz}{z^3}$. Osservisi ora, che nell' istante dt, mentre la sezione NT progredisce in nt, la sezione KV si avanza in kv, e l' elemento N$nt$T resta $=$ K$kv$V, cioè chiamata r la porzione Ii della linea centrale, e q la sezione KV, nasce $qdr = zds$; essendo IC $= s$; cioè $z = \frac{qdr}{ds}$, e però $\frac{n^2udu}{z^2} = \frac{n^2udu}{qdr} \cdot \frac{ds}{z}$. Laonde si avrà $dx - dp = \frac{n^2udu}{qdr} \cdot \frac{ds}{z} - \frac{n^2u^2dz}{z^3}$, ovvero $dp = dx - \frac{n^2udu}{qdr} \cdot \frac{ds}{z} + \frac{n^2u^2dz}{z^3}$. Passando ad integrare quest' equazione deesi aver riguardo, che, siccome si cerca il valore di p per un dato istante, conviene considerare come date in quell' istante le quantità u, du, q, dr, e soltanto come variabili quelle che dipendono dal luogo NT del tubo cioè z, s, p. Perciò si ottiene $p = x - \frac{n^2udu}{qdr}\int\frac{ds}{z} - \frac{n^2u^2}{2z^2} + \text{Cost.}$ Posta tutta la linea centrale ICE $= \Delta$, si determina il valore della Cost., se si fa $x =$ IG $= b$, $z =$ PF $= f$, $s =$ ICE $= \Delta$, prendendo l' integrale $\int\frac{ds}{z}$ in modo, che si annulli allorchè diviene $s = \Delta$: in tal caso l' orifizio PF soffre la pressione dell' atmosfera, cioè il peso d' una colonna d' acqua di altezza A. Quindi l' equazione diventa A $= b - \frac{n^2u^2}{2f^2} + \text{Cost.}$, cioè Cost. $= A - b + \frac{n^2u^2}{2f^2}$; e conseguentemente $p = A - b + x + \frac{n^2u^2}{2f^2} - \frac{n^2u^2}{2z^2} - \frac{n^2udu}{qdr}\cdot\int\frac{ds}{z}$ prendendo talmente l' integrale $\int\frac{ds}{z}$, che svanisca al diventare $s = \Delta$. Dicasi ora P la forza premente sulla superiore superficie KV; e sarà $p = P$ allorchè diverrà $x = I\gamma = \omega$, $s = r$, $z = q$; d' onde nasce $P = A - b + \omega + \frac{n^2u^2}{2f^2} - \frac{n^2u^2}{2q^2} - \frac{n^2udu}{qdr}\cdot\int\frac{ds}{z}$. Ma poichè nota esser dee non meno la figura del tubo, che la natura della linea centrale, saranno espresse con funzioni di r tanto l' ascissa $\omega = I\gamma$, quanto la sezione KV $= q$, ed essendo inoltre P o costante, o una funzione ancor essa di r, oppure di x, ne risulterà un' equazione differenziale fra r, ed u, dalla quale mercè l' integrazione si troverà u dato per r. Il che era &c.

Notisi quì, che P dee rappresentare l' altezza della colonna d' acqua, il di cui peso uguaglia non solo la pressione d' uno stantuffo applicato alla superior superficie KV, ma ancora la pressione dell' atmosfera, per modo che nel supposto che KV sia di pochi piedi più alta dell' apertura PF, e che non siavi altra forza premente in KV fuori di quella dell' atmosfera, fatto $\int\frac{ds}{z} = M$, si ha

$$Mudu + \frac{(b-\omega)qdr}{n^2} + \left(\frac{n^2}{2q^2} - \frac{u^2}{2f^2}\right)qdr = 0.$$

PROBLEMA IV.

5. Supposte le sezioni dell' acqua normali alla linea centrale, oppure l' equivalente, cioè che il moto di ciascuna falda o strato elementare d' acqua si faccia in direzione della linea centrale: si dimanda la pressione dell' acqua contro le pareti del vaso o tubo per cui trascorre.

Sol.

Sol.

L' equazione del Probl. precedente maneggiata a dovere, vale a dire $p = \mathrm{A} - b + x + \frac{n^2u^2}{2f^2} - \frac{n^2u^2}{2z^2} - \frac{n^2udu}{qdr} \cdot \int \frac{ds}{z}$ dà ciò che si cerca. Imperciocchè ritrovata u pel Probl. medesimo, e sostituito il suo valore in quest' equazione, indi preso l' integrale $\int \frac{ds}{z}$ in modo che svanisca quando s è $=$ alla linea centrale di tutto il corpo d' acqua, cioè $= \Delta$, ne risulterà p dato per una funzione di s, oppure z, o anche x, cioè per una funzione di quantità relative al luogo del tubo, dove si vuol conoscere la pressione. Il che era &c.

6. Cor. Chiamata w la lunghezza del prisma d' acqua, che si slancia dall' apertura nel dato tempo, v la velocità in detta apertura, si ha $n^2u^2 = f^2v^2$, $qdr = fdw$; onde l' equazione precedente diventa
$p = \mathrm{A} - b + x + \frac{1}{2}v^2 - \frac{f^2v^2}{2z^2} - \frac{fvdv}{dw}\int\frac{ds}{z}$, dove basterà sostituire il valore di v noto precedentemente per ottenere quello di p.

7. Allorchè il tubo AOLB (Fig. 3) ha una larghezza notabile, e l' acqua in esso contenuta si getta per l' apertura OL per la sola sua gravità; la superficie superiore AB durante il moto dell' acqua si mantiene orizzontale, tanto se la perdita dell' acqua viene con altr' acqua risarcita, quanto se il tubo si va successivamente vuotando. In tal caso tutte le particelle di un medesimo *strato orizzontale* discendono con uguale celerità, e di quì è chiaro, che le precedenti formole non potranno più aver luogo in questo caso se non quando la linea centrale sia verticale. Si può però senza difficoltà anche in questa nuova ipotesi degli strati sempre orizzontali ritrovare un' equazione fondamentale con un artifizio molto analogo al già praticato nel Probl. III., avendo so-

solo riguardo, che laddove nelle precedenti ipotesi tutti gli strati d'acqua avevano la medesima situazione relativamente alla linea centrale, e conseguentemente cambiavano insieme colla linea centrale la situazione verso la linea orizzontale e verticale, quì per l'opposto, essendo tutti gli strati orizzontali, conservano la stessa posizione verso la linea orizzontale e verticale, e la cambiano solo per rispetto alla linea centrale. Che però è necessario d'introdurre nel calcolo l'angolo, che fa la linea centrale colla corrispondente sezione orizzontale, giacchè la velocità dell'acqua in ciascuna sezione orizzontale dipende da un tal angolo, siccome vedrassi nel seguente

PROBLEMA V.

8. Nel tubo AOLB arriva l'acqua da principio colla suprema superficie orizzontale in AB, ed esce per l'inferiore apertura OL. Nel tempo t si avanza AB in CD, rimanendo sempre orizzontale durante il movimento: cercasi per l'istante presente la velocità, con cui l'acqua passa per una data sezione orizzontale FG del tubo.

SOL.

Sia IEPQT la linea che passa pe' centri di gravità di tutti gli strati orizzontali d'acqua, cioè la così detta *linea centrale*, e facciansi le sezioni orizzontali $AB = h$, $CD = q$, $FG = n$, $MN = z$, $LO = f$. Inoltre pe' centri I, T delle sezioni suprema ed infima si guidino la verticale IK, e l'orizzontale KO, e si ponga $IK = b$. Prolungata la sezione indeterminata MN, sicchè incontri in g la linea verticale IK, sia $Ig = x$, $IEQ = s$, $IE = r$, $Il = \omega$. Tirata da Q la tangente QR alla linea centrale, si chiami ϕ l'angolo NQR; e parimente condotte per P, E le tangenti PS, EH, dicansi μ l'angolo CPS, Ψ l'angolo DEH; e finalmente guidate le tangenti IV, TΠ alla linea stessa centrale ne' punti estremi I, T, si faccia l' angolo BIV $= \beta$, e l' angolo OTΠ $= \alpha$. Ora chiamisi u la velocità dell' acqua per la sezione data FG secondo la direzione della tangente PS, e risulterà la velocità secondo la direzione verticale $= u \operatorname{sen} \mu$. Perlocchè la velocità dell' acqua per la sezione indeterminata MN secondo la direzione verticale sarà $= \frac{nu \operatorname{sen} \mu}{z}$, e secondo la direzione della tangente QR sarà $= \frac{nu \operatorname{sen}.\mu}{z \operatorname{sen}.\varphi}$. Fissato questo si rifletta, che l' elemento d' acqua M$mn$N viene accelerato così dal proprio peso, come dalla pressione prodotta dall' azione mutua delle particelle dell' acqua. Il suo peso è $= zdx$ (chiamata 1 la gravità terrestre acceleratrice); e se la pressione contro la superficie MN si fa uguale ad una colonna d'acqua avente MN per base, e p per altezza, una tal pressione si trova $= pz$; e col ragionamento già usato ne' Problemi I.° e II.° si scopre la forza acceleratrice di detto elemento secondo la direzione verticale all' ingiù $= \frac{zdx - zdp}{zdx} = \frac{dx - dp}{dx}$. Quindi risolvendo questa forza acceleratrice in due altre, una in direzione della tangente QR, l'altra in direzione normale a QR, si trova la prima $= \frac{dx - dp}{dx} \operatorname{sen}.\varphi = \frac{dx - dp}{ds}$.

Sarà dunque pel principio delle forze acceleratrici $\frac{dx - dp}{ds} ds =$

$$\frac{nu \operatorname{sen} \mu}{z \operatorname{sen}.\varphi} \times \frac{nzdu \operatorname{sen}.\varphi \operatorname{sen}.\mu - nudz \operatorname{sen}.\varphi \operatorname{sen}.\mu - nuzd\varphi \cos.\varphi \operatorname{sen}.\mu}{z^2 \operatorname{sen}.\varphi^2}$$

$$= \frac{n^2 udu \operatorname{sen}.\mu^2}{z^2 \operatorname{sen}.\varphi^2} - \frac{(n^2 u^2 dz \operatorname{sen}.\varphi \operatorname{sen}.\mu^2 + n^2 u^2 zd\varphi \cos.\varphi \operatorname{sen}.\mu^2)}{z^3 \operatorname{sen}.\varphi^3}.$$

Ma perchè nell' istante che MN s' innoltra in mn, CD si avanza in cd, ed è perciò l' elemento C$cd$D = M$mn$N, cioè $qdr \operatorname{sen}.\Psi = zds \operatorname{sen}.\varphi$, ovvero

zsen.

$z\,\text{sen.}\,\varphi = \dfrac{q\,dr\,\text{sen.}\,\Psi}{ds}$; nascerà $dx - dp = \dfrac{n^2 u\,du\,ds\,\text{sen.}\,\mu^2}{q\,dr\,\text{sen.}\,\Psi z\,\text{sen.}\,\varphi}$ $- \dfrac{(n^2u^2\,dz\,\text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\mu^2 + n^2u^2z\,d\varphi\,\text{cos.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\mu^2)}{z^3\,\text{sen.}\,\varphi^3}$, vale a dire

$$dp = dx + \frac{n^2u^2\,dz\,\text{sen.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\mu^2 + n^2u^2\,z\,d\varphi\,\text{cos.}\,\varphi\,\text{sen.}\,\mu^2}{z^3\,\text{sen.}\,\varphi^3}$$

$- \dfrac{n^2u\,du\,ds\,\text{sen.}\,\mu^2}{q\,dr\,\text{sen.}\,\Psi z\,\text{sen.}\,\varphi}$. Si pigli l' integrale di questa equazione considerando come variabili le z, x, s, φ, e come costanti u, r, q, &c., le quali essendo date per quell' istante, in cui cercasi la pressione p, non possono variare. Si otterrà dunque $p = x - \dfrac{n^2u^2\,\text{sen.}\,\mu^2}{2z^2\,\text{sen.}\,\varphi^2} - \dfrac{n^2u\,du\,\text{sen.}\,\mu^2}{q\,dr\,\text{sen:}\,\Psi} \times \displaystyle\int \dfrac{ds}{z\,\text{sen.}\,\varphi} + \text{Cost.}$

Preso pertanto l' integrale $\displaystyle\int \dfrac{ds}{z\,\text{sen.}\,\varphi}$ in modo, che svanisca quando $s = \Delta = \text{IQT}$; siccome allora diventa $x = b$; $z = f$; $\varphi = \alpha$; $p = \text{A} =$ all' altezza d' una colonna d' acqua, il di cui peso uguagli la pressione dell' atmosfera; quindi si ricava $\text{Cost.} = \dfrac{n^2u^2\,\text{sen.}\,\mu^2}{2f^2\,\text{sen.}\,\alpha^2} - b + \text{A}$. Laonde

$$p = \text{A} - b + x + \frac{n^2u^2\,\text{sen.}\,\mu^2}{2f^2\,\text{sen.}\,\alpha^2} - \frac{n^2u^2\,\text{sen}\,\mu^2}{2z^2\,\text{sen.}\,\varphi^2} - \frac{n^2u\,du\,\text{sen.}\,\mu^2}{q\,dr\,\text{sen.}\,\Psi}\int \frac{ds}{z\,\text{sen.}\,\varphi}.$$

Poichè inoltre si è supposto, che nel tempo t la suprema sezione AB siasi abbassata in CD, e CD non soffre altra pressione che quella dell' atmosfera equivalente al peso di una colonna d' acqua di altezza P (sebbene potrà P rappresentare anche qualunque altra forza esterna combinata con quella dell' atmosfera); diventerà perciò $p = \text{P}$ allorchè sarà $x = \omega$, $s = r$, $z = q$, $\varphi = \Psi$. Perlocchè nascerà

$$\text{P} = \text{A} - b + \omega + \frac{n^2u^2\,\text{sen}\,\mu^2}{2f^2\,\text{sen.}\,\alpha^2} - \frac{n^2u^2\,\text{sen.}\,\mu^2}{2q^2\,\text{sen.}\,\Psi^2} - \frac{n^2u\,du\,\text{sen}\,\mu^2}{q\,dr\,\text{sen.}\,\Psi} \times \int \frac{ds}{z\,\text{sen.}\,\varphi}.$$

Quindi essendo ω, q, sen.Ψ funzioni di r, mediante l' integrazione di questa formola si troverà un' equazione, la quale esprimerà il rapporto fra u, ed r, come si ricercava. Il che era ec.

PROBLEMA VI.

9. Se si suppone che ne' vasi e tubi assai larghi si mantenga l' orizzontalità degli strati d' acqua anche nell' attual movimento; determinare la pressione dell' acqua contro qualunque luogo del tubo dentro il quale si muove.

SOL.

L' equazione relativa a quest' ipotesi è quella del Problema precedente, cioè $p = \mathrm{A} - b + x + \frac{n^2 u^2 \,\mathrm{sen.}\pi^2}{2f^2 \,\mathrm{sen.}\alpha^2} - \frac{n^2 u^2 \,\mathrm{sen}\,\pi^2}{2z^2 \,\mathrm{sen.}\varphi^2}$ $- \frac{n^2 u du \,\mathrm{sen.}\pi^2.}{q dr \,\mathrm{sen.}\Psi} \int \frac{ds}{z \,\mathrm{sen.}\varphi}$, nella quale sostituendo il valore di u, che si troverà pel Probl. medesimo, e preso poscia a dovere l' integrale $\int \frac{ds}{z \,\mathrm{sen.}\varphi}$, si otterrà il valore di p dato per una funzione di x &c. Il che era &c.

10. Cor. Perchè si ha $n^2 u^2 \mathrm{sen.}\pi^2 = f^2 v^2 \mathrm{sen.}\alpha^2$, $q dr \,\mathrm{sen.}\Psi = f dw \,\mathrm{sen}\alpha$, in luogo della predetta equazione si può far uso della seguente

$$p = \mathrm{A} - b + x + \frac{1}{2} v^2 - \frac{f^2 v^2 \,\mathrm{sen.}\alpha^2}{2z^2 \,\mathrm{sen.}\varphi^2} - \frac{f v dv \,\mathrm{sen.}\alpha}{dw} \int \frac{ds^2}{z dx},$$

ed in questa surrogato il valore di v, che si potrà sempre trovare cogli artificj dianzi divisati, si otterrà il valor di p che si cerca.

PROBLEMA VII.

11. Scorre l' acqua per l' apertura LO del tubo, o vaso assai largo AOLB, il quale mercè l' afflusso di altr' acqua, che accorre superiormente in AB si mantiene costantemente pieno: si dimanda la pressione dell' acqua contro qualunque luogo del tubo per qualunque data velocità.

SOL.

Sol.

Richiamata l' equazione $p = \mathrm{A} - b + x + \frac{1}{2} v^2 - \frac{f^2 v^2 \,\mathrm{sen}\, \alpha^2}{2 z^2 \,\mathrm{sen}.\varphi^2} - \frac{f v dv \,\mathrm{sen}.\alpha}{dw} \int \frac{ds^2}{z dx}$, basta trovare il valore dell' ultimo termine del secondo membro per conseguire il valore di p che si cerca. Ora è noto, che se si fa $x = 0$; $z = \mathrm{AB} = h$, $\varphi = \mathrm{BIV} = \beta$, e si prende l' integrale $\int \frac{ds^2}{z dx}$ per modo che sparisca quando $s = \mathrm{ICE} = \Delta$, e quindi nella di lui espressione si mette $x = 0$, onde ne risulti una quantità costante $= \mathrm{M}$, si deduce $\mathrm{P} = \mathrm{A} - b + \frac{1}{2} v^2 - \frac{f^2 u^2 \,\mathrm{sen}.\alpha^2}{2 h^2 \,\mathrm{sen}.\beta^2} - \frac{f \mathrm{M} v dv \,\mathrm{sen}.\alpha}{dw}$, cioè $2 h^2 \mathrm{P} \,\mathrm{sen}.\beta^2 = 2 h^2 \mathrm{A} \,\mathrm{sen}.\beta^2 - 2 h^2 b \,\mathrm{sen}.\beta^2 + (h^2 \,\mathrm{sen}.\beta^2 - f^2 \,\mathrm{sen}.\alpha^2) v^2 - \frac{2 h^2 f \mathrm{M} v dv \,\mathrm{sen}.\alpha \,\mathrm{sen}.\beta^2}{dw}$; e quindi $\frac{2 v dv}{dw} = \frac{2 h^2 \,\mathrm{sen}.\beta^2 (\mathrm{A} - \mathrm{P} - b) + (h^2 \,\mathrm{sen}.\beta^2 f^2 \,\mathrm{sen}.\alpha^2) v^2}{h^2 f \mathrm{M} \,\mathrm{sen}.\alpha \,\mathrm{sen}.\beta^2}$. Se pertanto si suppone come in tutti i casi ordinarj $\mathrm{P} = \mathrm{A}$, nasce $\frac{f v dv \,\mathrm{sen}.\alpha}{dw} = \frac{(h^2 \,\mathrm{sen}.\beta^2 - f^2 \,\mathrm{sen}.\alpha^2) v^2 - 2 h^2 b \,\mathrm{sen}.\beta^2}{2 h^2 \mathrm{M} \,\mathrm{sen}.\beta^2}$; e se questo valore viene sostituito nella prima equazione, questa si cangia in

$$p = \mathrm{A} - b + x + \frac{1}{2} v^2 - \frac{f^2 v^2 \,\mathrm{sen}.\alpha^2}{2 z^2 \,\mathrm{sen}.\varphi^2} + \frac{[\,2 h^2 b \,\mathrm{sen}.\beta^2 - (h^2 \,\mathrm{sen}.\beta^2 - f^2 \,\mathrm{sen}.\alpha^2) v^2\,]}{2 h^2 \mathrm{M} \,\mathrm{sen}.\beta^2} \int \frac{ds^2}{z dx} =$$

$$\mathrm{A} - b + x + \frac{(z^2 \,\mathrm{sen}.\varphi^2 - f^2 \,\mathrm{sen}.\alpha^2) v^2}{2 z^2 \,\mathrm{sen}.\varphi^2} + \frac{[\,2 h^2 b \,\mathrm{sen}.\beta^2 - (h^2 \,\mathrm{sen}.\beta^2 - f^2 \,\mathrm{sen}.\alpha^2) v^2\,]}{2 h^2 \mathrm{M} \,\mathrm{sen}.\beta^2} \int \frac{ds^2}{z dx}$$

. Ora è palese dall' indole della primitiva equazione differenziale che l' integrale $\int \frac{ds^2}{z\,dx}$ ha da pigliarsi talmente, che esso si annulli allorchè si fa $s = \Delta$, perchè in tale ipotesi è stata integrata quella equazione. Un tale integrale, il quale sarà presentemente variabile come dato per s, sia nominato N, ed avremo per ultimo $p = A - b + x + \frac{(z^2 \text{sen.}\varphi^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2)v^2}{2z^2 \text{sen.}\varphi^2}$ $+ \frac{[2h^2 b\, \text{sen.}\beta^2 - (h^2 \text{sen.}\beta^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2)v^2]}{2h^2 M \text{sen.}\beta^2} \times N$. Il che era &c.

12. Cor. I. Se si vuol conoscere la pressione nel primo principio del moto bisogna fare $v = 0$, ed allora abbiamo $p = A - b + x + \frac{Nb}{M}$; cioè $= x + \frac{N}{M} b - b$, qualora si supponga che l' acqua si scagli dall' orificio nel vuoto, dove $A = 0$. Ora l' origine e la costituzione de' due integrali N, ed M mostra chiaramente, che $\frac{N}{M}$ è una vera frazione < 1. Dunque $p = x + \left(\frac{N}{M} - 1\right) b < x$; donde si trae il seguente

TEOREMA I.

13. La pressione, che soffre un punto qualunque d' un vaso o tubo dall' acqua che per entro vi scorre, è minore, anche nel primo istante del moto, del peso d' una colonna d' acqua elevata dal dato punto sino alla sezione suprema, e conseguentemente minore della pressione dell' acqua nello stato di piena quiete o d' equilibrio.

14. Cor. II. Se tutte le sezioni MN sono perpendicolari alla linea centrale, sicchè $\alpha = \varphi = \beta = 90.°$, il valore di p diventa $= A - b + x + \frac{(z^2 - f^2)v^2}{2z^2} + \frac{[2h^2 b - (h^2 - f^2)v^2]N}{2h^2 M} =$ $A + x + \left(\frac{N}{M} - 1\right) b + \frac{v^2(z^2 - f^2)}{2z^2} - \frac{(h^2 - f^2)v^2 N}{2h^2 M}$.

15. Cor. III. Quando il moto dell' acqua non più si accelera sensibilmente, il che succede prestissimo, allora fatto $\frac{vdv}{dw} = 0$, l' equazione primitiva diviene $p = A - b + x + \frac{(z^2 \text{sen.}\varphi^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2)v^2}{2z^2 \text{sen.}\varphi^2}$; e perchè da questa ipotesi, essendo $\frac{\int vdv \,\text{sen.}\alpha}{dw} = 0$, ne deriva $v^2 = \frac{2h^2 b \,\text{sen.}\beta^2}{h^2 \text{sen.}\beta^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2}$; perciò nasce $p = A - b + x + \frac{h^2 b \,\text{sen.}\beta^2 (z^2 \text{sen.}\varphi^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2)}{(h^2 \text{sen.}\beta^2 - f^2 \text{sen.}\alpha^2) z^2 \text{sen.}\varphi^2}$; e supposte le sezioni normali alla linea centrale, comparisce $p = A - b + x + \frac{h^2 b (z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2) z^2}$.

Altro non avvertendosi, supporremo in appresso le falde dell'acqua normali alla linea centrale, cioè $\alpha = \beta = \varphi = 90.°$; ed innoltre ommetteremo la pressione A dell' atmosfera come se l' acqua dall' apertura del tubo si slanciasse nel vuoto.

PROBLEMA VIII.

16. Uscendo l' acqua dal vaso FMNG (Fig. 4.^{a}) per l' apertura orizzontale BE, e supponendosi, che mediante l' afflusso di altr' acqua sia mantenuto costantemente pieno sino in FG; si cerca la pressione totale, con cui l' acqua durante il suo moto spinge il vaso verticalmente all' ingiù.

SOL.

E' noto che ciascun elemento Hh dell' interna superficie del vaso soffre una pressione $= p \cdot Hh$ in direzione perpendicolare ad esso elemento. Se questa pressione si risolve in due una verticale, l' altra orizzontale, e si chiama dP la pressione verticale, z al solito la sezione indeterminata PH, abbiamo l' analogia $Hh : dz :: p \cdot Hh : dP$, e quindi $dP = pdz$.

Dunque integrando sarà la somma di tutte le pressioni verticali $P = \int p dz$, cosicchè attaccato il vaso al braccio d' una bilancia vi vorrà nell' altro braccio un peso $= \int p dz$ per equilibrarsi colla pressione verticale dell' acqua del vaso. Siccome pertanto abbiamo già ritrovato $p = x - b + \frac{(z^2 - f^2)v^2}{2z^2} + \frac{[2h^2 b - (h^2 - f^2)v^2]N}{2h^2 M}$ ne verrà $p dz = x dz - b dz + \frac{(z^2 - f^2)v^2 dz}{2z^2} + \frac{[2h^2 b - (h^2 - f^2)v^2]N dz}{2h^2 M}$. Osservisi ora che essendo quì $f = x$, l' integrale $N = \int \frac{ds}{z}$ diventa $\int \frac{dx}{z}$, dove x sarà espresso per z, giacchè è data la figura del vaso. Nell' integrazione poi della precedente equazione debb' essere riguardata v come una grandezza costante, perchè si cerca la pressione per una velocità data. Laonde l' integrazione somministra $\int p dz = \int x dz - bz + \frac{1}{2} v^2 z + \frac{f^2 v^2}{2z} + \frac{[2h^2 b - (h^2 - f^2)v^2]}{2h^2 M} \times \int N dz$ + Cost. Per determinare la Cost. convien por mente, che la pressione è nulla quando $z = FG = h$, ed $x = 0$: perciò presi gli integrali $\int x dz$, $\int N dz$ in modo, che spariscano allorchè $x = 0$, e $z = h$, apparisce Cost. $= bh - \frac{1}{2} v^2 h - \frac{f^2 v^2}{2h}$; donde si ricava $\int p dz = b(h - z) + \frac{1}{2} v^2 (z - h) + f^2 v^2 \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{2z}\right) + \int x dz + \frac{[2h^2 b - (h^2 - f^2)v^2]\int N dz}{2h^2 M}$.

Dunque per avere la pressione totale per tutto il vaso basterà fare $z = f$, $x = b$, e risulterà la detta pressione, $= b(h - f) - \frac{1}{2} \frac{v^2 (h - f)^2}{h} + \int x dz, + \frac{[2h^2 b - (h^2 - f^2)v^2]\int N dz}{2h^2 M}$ dove gli integrali $\int x dz$, $\int N dz$ hanno a pigliarsi in tal maniera, che si annullino quando $x = 0$, e diventino completi quando $x = b$. Il che era ec.

17. Un' osservazione di estrema importanza, che non dee quì trascurarsi in nessun conto, riguarda l' ipotesi, a cui è appoggiata l' analisi di questo Problema, vale a dire, che le sezioni z del vaso variar debbano insieme colle x secondo la legge di continuità. Che però qualora il vaso abbia un fondo piano orizzontale MN, ed in esso un' apertura BE, converrà usare una gran precauzione nell' applicazione della predetta formola per non urtare in risultati falsi. Se per $x = 0$ si piglia $z = FG$, e per $x = b$ si prende $z = MN$, cioè al fondo; egli è evidente, che non può la formola rappresentare se non la somma di tutte le pressioni verticali contro le pareti del vaso esclusa la pressione contro il fondo, qualora per $x = 0$, e $z = h = FG$ si pigli $\int p\,dz = 0$. Quindi è che alla pressione rappresentata dalla formola dee in questi casi aggiugnersi la pressione contro il fondo per ottenere la pressione intera, a cui è esposto il vaso. A tal effetto servirà il

PROBLEMA IX.°

18. Il vaso FMNG (Fig.^{e} 4.^{a}, e 5.^{a}) ha un fondo piano e orizzontale MN con un' apertura BE, per cui l' acqua scaturisce, la quale viene costantemente rimessa per di sopra in FG: si dimanda la pressione dell' acqua corrente contro il fondo.

Sol.

Ricorrendo al *gurgite Bernoulliano* (a) egli è mestieri in luogo di FMNG immaginarsi il vaso FCBEDHG, e considerare i confini CBED del gurgite come una parte dei confini del vaso, dentro i quali tutta l' acqua è in moto. Se pertanto fosse nota la figura del gurgite, e QO fosse tutta la sua altezza si potrebbe applicare allo stesso, considerato come una parte del vaso, la soluzione del Problema antecedente. Per tal disegno basta intendere per z le sezioni del gurgite, e non del vaso quando i valori di x sono maggiori di RO, e pigliare talmente gli integrali $\int x dz$, $\int N dz$, che si annullino allorchè $x = RO$, $z = CD$, e ricevano il loro compimento quando $x = b = RQ$, e $z = f = BE$. In cotal modo si otterrà l' intera pressione che viene dall' acqua esercitata contro i confini CBED del gurgite, la qual pressione non pare dover essere diversa da quella che si esercita contro il fondo. Rigorosamente parlando dovrebbe aggiugnersi ad essa il peso dell' acqua stazionaria negli angoli CMB, DEN; ma siccome debbe assumersi picciolissima l' altezza del gurgite in confronto dell' altezza del vaso, si può riguardare come insensibile quel peso. Dunque (essendo quì dz negativa, perchè le sezioni del gurgite impiccioliscono a misura che si accostano all' apertnra BE) la pressione ricercata sarà $= -\int x\,dz + bz - \frac{1}{2} v^2 z - \frac{f^2 v^2}{2z} \; \frac{(2h^2 b - (h^2 - f^2) v^2)}{2 h^2 M} \times \int N\,dz$ + Cost. La Cost. si determina con osservare che la pressione si annulla quando $x = RO$, $z = CD = m$; donde nasce Cost. $= - bm + \frac{1}{2} v^2 m + \frac{f^2 v^2}{2m}$. Laonde la pressione contro una parte indefinita de' confini del gurgite sarà $= b(z - m) + \frac{1}{2} v^2 (m - z) + f^2 v^2 \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{2z} \right) - \int x\,dz$

(a) La nota *legge della continuità*, a cui sembrano appoggiate le formole fondamentali del moto nella Meccanica, non consente che la velocità dell' acqua, che scorre per un tubo o vaso possa in un istante cangiare di una quantità finita; ma poichè chiamata v la velocità dell' acqua nell' orifizio del tubo, f l'area dell' orifizio, h la sezione infima del tubo contigua al detto orifizio, e supposto $h > f$, la velocità in quella sezione sarebbe $\frac{fv}{h}$; cioè minore che nell' orifizio nel rapporto di $f:h$, perciò Giovanni Bernoulli nella sua Idraulica affine di attenersi a detta legge spiega la cosa così. In vicinanza del lume BE incomincia l' acqua a formare un canale infondibuliforme, ovvero a foggia d' imbuto per modo che l' acqua che trovasi negli angoli CMB, DNE, rimane in quiete,

$- (2h^2 b$

---

mentre l' altra vi passa fra mezzo, e con velocità *continuamente* crescente si affaccia all' apertura, e ne sorte. Siffatto canale ed imbuto piacque a Bernoulli denominarlo colla parola di *gurgite*.

$-\frac{(2h^2 b-(h^2-f^2)v^2)}{2h^2 M}\int N\,dz$. Dunque per ultimo fatta $z=f$, la pressione contro tutto il gurgite si trova $= - b(m-f)+\frac{(m-f)^2 v^2}{2m}-\int x\,dz-\frac{(2h^2 b-(h^2-f^2)v^2)}{2h^2 M}\int N\,dz$, pigliando i due integrali $\int x\,dz$, $\int N\,dz$ nel modo quì prescritto. Se ora l' ascissa inferiore QK, corrispondente alla sezione indeterminata $ST=z$ del gurgite, si pone $=\omega$, sicchè sia $x=b-\omega$; nasce $\int x\,dz=bz-\int\omega\,dz+\text{Cost.}$, e questo integrale dovendo annullarsi quando $x=RO$, ovvero $z=m$, e ricevere il suo compimento quando $x=b$, ovvero $z=f$; si deduce $\int x\,dz=bf-bm-\int\omega\,dz$, prendendo l' integrale $\int\omega\,dz$ in maniera, che sparisca allorchè $x=RO$, ovvero $\omega=QO$, e $z=m$, si renda completo con fare $x=b$, ossia $\omega=o$, e $z=f$. Perlocchè dimandata p la pressione che si cerca, la predetta equazione si riduce a quest'altra più semplice, $p=\frac{(m-f)^2 v^2}{2m}+\int\omega\,dz-\frac{(2h^2 b-(h^2-f^2)v^2)\int N\,dz}{2h^2 M}$.

Si consideri innoltre, che la quantità N, ovvero l' integrale $\int\frac{df}{z}$, oppure in questo caso $\int\frac{dx}{z}$, posto $x=b-\omega$, diventa $-\int\frac{d\omega}{z}$ preso talmente, che si annulli allorchè $x=b$, oppure $\omega=o$; e che l'espressione variabile, cioè data per ω, risultante da questa integrazione dee moltiplicarsi per dz, e poscia nuovamente integrarsi, onde risulti $\int\left(-dz\int\frac{d\omega}{z}\right)$, ovvero $-\int.dz\int\frac{d\omega}{z}$; e questo nuovo integrale dee talmente determinarsi che sparisca facendo $\omega=QO$, $z=CD=m$, e diventi completo con prendere $\omega=o$, $z=BE=f$. Dunque si ottiene finalmente l'equazione $p=\frac{(m-f)^2 v^2}{2m}+\int\omega\,dz+\frac{(2h^2 b-(h^2-f^2)v^2)}{2h^2 M}\int.dz\int\frac{d\omega}{z}$. Il che era &c.

19. Cor. I. Siccome ci è interamente ignota la vera figura del gurgite, non è possibile esattamente calcolare gli integrali $\int \omega dz$, $\int dz \int \frac{d\omega}{z}$, essendo perfino ignota, ne' vasi, che hanno le sezioni variabili come nella Fig. 4.ª, la grandezza di m, cioè di CD. Essendo però picciolissima l' altezza QO del gurgite, si può senza errore notabile assumere m, cioè CD uguale al fondo MN, e per la stessa ragione ponno disprezzarsi come estremamente piccioli gli integrali $\int \omega dz$, $\int . dz \int \frac{d\omega}{z}$; e conseguentemente la pressione contro il fondo piano e orizzontale può essere a un dipresso rappresentata da $\frac{v^2 (m-f)^2}{2m}$. Di quì si deduce il

TEOREMA II.°

20. La pressione, che soffre il fondo piano e orizzontale d' un vaso dall' acqua posta in movimento nell' ipotesi, che la linea centrale sia una retta verticale, è uguale al peso d' una colonna d' acqua, che ha per base $m-f$, cioè la differenza tra il fondo e la luce, e per altezza una quarta proporzionale ad m, $m-f$, $\frac{1}{2} v^2$, vale a dire a tutto il fondo, alla differenza tra la luce e il fondo, e all'altezza dovuta alla velocità dell' uscita.

21. Cor. II.° Se il vaso è un prisma o cilindro retto (Fig. 5.ª) allora $m = \text{CD} = \text{MN} = h$, e la pressione cercata $= \frac{v^2 (h-f)^2}{2h}$, la quale non differisce punto dalla pressione totale che spinge il vaso verticalmente all' ingiù; giacchè le pressioni contro le pareti verticali del vaso essendo orizzontali, non possono produrre alcuna spinta verticale nel vaso ed anzi si equilibrano insieme.

PRO-

PROBLEMA X.°

22. Al vaso ACFB (Fig. 6.ª) in cui le sezioni o falde d' acqua riescono perpendicolari alla linea centrale, è annesso lateralmente per di sotto il tubo orizzontale FH, dentro il quale scorre l'acqua del vaso, ed esce per l'apertura PQ: si dimanda la pressione dell' acqua contro un dato luogo M del tubo nel supposto, che il vaso si conservi costantemente pieno.

Sol.

Si è trovato nel Cor. II.° del Probl. VII.° $p = \mathrm{A} + x - b + \frac{v^2(z^2 - f^2)}{2z} + \frac{(2h^2b - (h^2 - f^2)v^2)\mathrm{N}}{2h^2\mathrm{M}}$; e quando la velocità si è ridotta allo stato permanente si è ottenuto nel Cor. III. $p = \mathrm{A} - b + x + \frac{h^2b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}$. Stando ora a questa seconda formola, ed ommettendo, come sopra la pressione A dell' atmosfera si scorge subito, che $x = b$, perchè x dinota quì la distanza della sezione suprema AB dal centro della sezione data MN, la quale distanza non differisce da quella della stessa suprema sezione dal centro della sezione infima PQ, che si è sempre espressa per b. Nasce adunque la pressione domandata

$$p = \frac{h^2b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}.$$ Il che era &c.

23. Cor. I.° Se la suprema sezione h del vaso è grandissima in paragone della luce f del tubo orizzontale, diviene $p = \frac{b(z^2 - f^2)}{z^2}$. Da ciò si deduce il

TEOREMA III.°

24. In un tubo orizzontale annesso inferiormente ad un va-

vaso che viene mantenuto costantemente pieno d' acqua, la pressione esercitata contro un dato luogo del tubo dall'acqua, che vi scorre dal vaso, e che sorte dal tubo per una data apertura, equivale al peso d' una colonna d' acqua, che ha per altezza la quarta proporzionale al quadrato della sezione del tubo in quel luogo, alla differenza di tal quadrato dell' apertura, e all' altezza della suprema sezione del vaso sopra il centro dell' apertura.

25. Cor. II.° Qualora il tubo orizzontale sia cilindrico, allora essendo z costante, la pressione è la medesima in tutti i luoghi del tubo.

26. Cor. III.° In quel luogo del tubo, dove la sua sezione è uguale all' apertura, la pressione è nulla; e perciò un tubo cilindrico o prismatico tutto aperto all' estremità non soffre pressione alcuna: in fatti essendo in questo caso uguali tutte le sezioni verticali del tubo, l' acqua che passa dall' una nell' altra scansa l' acqua inseguente colla medesima velocità, con cui questa la insegue; ond' è che nessun urto o niuna pressione può risultarne.

27. Cor. IV.° Stando all' ipotesi della sezione suprema del vaso grandissima in confronto dell' orifizio del tubo, poichè si ha $p = b - \frac{bf^2}{z^2}$, e la velocità per la sezione z è $= \frac{fv}{z}$, e l' altezza dovuta a tal velocità è $= \frac{f^2v^2}{2z^2}$, ed altronde è noto, che $\frac{1}{2}v^2$ è prossimamente $= b$; perciò $\frac{bf^2}{z^2}$, che nomineremo α sarà l' altezza dovuta alla velocità per la sezione z. Laonde $p = b - \alpha$, vale a dire *l' altezza della colonna d' acqua equivalente alla pressione contro un dato luogo del tubo, alla qual altezza salirebbe l' acqua in virtù di tal pressione, è uguale alla differenza fra l' altezza dovuta alla velocità dell' acqua nel foro, e l' altezza dovuta alla velocità nella sezione del dato luogo.*

Esem-

Esempio .

28. Il Sig. Daniello Bernoulli (a) ha illustrato con elette sperienze questa teoria della pressione dell' acqua in moto. Egli adattava ad un ampio recipiente un tubo orizzontale di 7 linee di diametro, mantenendo l'acqua del recipiente all' altezza di 115 linee sopra il centro del tubo. All' esteriore apertura del tubo applicava de' coperchj differentemente forati; e verso il mezzo della lunghezza del tubo per un picciol pertugio inseriva un cannello verticale di vetro alto oltre 115 linee, dove osservava di quanto l'acqua si abbassava sotto il livello del recipiente allorchè pel foro del coperchio sprizzava dal tubo, fatto però sempre il diffalco di quanto era dovuto alla *virtù capillare* del cannello di vetro, la quale da Bernoulli fu prima ritrovata di cinque linee, come egli si esprime, cioè atta a sollevar l' acqua cinque linee sopra il suo livello.

Esper. I. Preso il coperchio, che aveva il foro circolare di $2 \frac{1}{5}$ linee di diametro, l' acqua si abbassò nel cannello un tantino più d' una linea. Ora un tal abbassamento debb' essere per la teoria $= \frac{bf^2}{z^2} = 115 . \left(\frac{11}{35}\right)^4$, giacchè $\frac{f}{z} = \left(\frac{11}{7 . 5}\right)^2$. Perciò

log. 11	1, 0413927
log. 35	1, 5440680
log. $\frac{11}{35}$	9, 4973247

(a) Experimenta coram Societate instituta in confirmationem theoriæ pressionum, quas latera canalis ab aqua transfluente sustinet. Comm. Petrop. T. IV.

$4 \log. \frac{11}{35}$ 7, 9892988

$\log. 115$ 2, 0606978

$\log. 115 . \left(\frac{11}{35}\right)^4$ 0, 0499966,

al qual logaritmo corrisponde il numero 1, 122, che è per l' appunto un tantino maggiore dell' unità, come l' esperienza richiede.

Esper. II. Con un altro coperchio di $3\,\frac{2}{5}$ linee di diametro nel foro, l'acqua discese nel cannello sei linee e due terzi. Quì abbiamo $\frac{bf^2}{z^2} = 115 . \left(\frac{17}{35}\right)^4$. Dunque

$\log. 17$ 1, 2304489
$\log. 35$ 1, 5440680

$\log. \frac{17}{35}$ 9, 6863809

$\log. \left(\frac{17}{35}\right)^4$ 8, 7455236

$\log. 115$ 2, 0606978

$\log. 115 . \left(\frac{17}{35}\right)^4$ . . . . 0, 8062214.

A questo logaritmo corrisponde il numero 6, 4, che pochissimo, e fisicamente parlando niente differisce dall' esperienza.

Esper. III. Applicato all' esterior apertura del tubo orizzontale un terzo coperchio avente una luce di 5 linee di diametro, o un tantin meno, l' acqua discese di 28 linee nel cannello. Quì si ha $\frac{bf^2}{z_1^2} = 115 \left(\frac{5}{7}\right)^4$. Quindi

$\log. 5$ 0, 6989700
$\log. 7$ 0, 8450980

$\log. \frac{5}{7}$ 9, 8538720

log.

$\log. \left(\frac{5}{7}\right)^4$	9, 4154880
log. 115	2, 0606978
$\log. 115 . \left(\frac{5}{7}\right)^4$	1, 4761858.

Il numero che corrisponde a questo logaritmo sta fra 29 , e 30 ; ma come avverte il Sig. Bernoulli è da prendersi per numero teoretico il 29 , poichè il foro del coperchio non pareva avere pienamente cinque linee di diametro . La differenza adunque fra la teoria e l' esperienza è di una sola linea in 28 ; differenza certamente assai picciola , e da attribuirsi agli impedimenti , che incontra l' acqua lungo il tubo orizzontale .

Esper. IV. Tolto il coperchio , e lasciata uscir l' acqua liberamente pel pieno orifizio del tubo, discese tosto l'acqua pressocchè tutta nel cannello , così che detratte cinque linee dovute alla virtù capillare del cannello , ve ne rimasero tre sole da attribuirsi ancor queste agli ostacoli è ritardi del moto lungo il tubo, giacchè la teoria esige quì una total discesa per essere $p = b - \frac{bf^2}{z^2} = b - b = 0$.

29. Cor. V. Quanto è più grande z in confronto di f, tanto è maggiore la pressione del tubo in quella sezione , e viceversa . E se il tubo fosse un cono troncato unito al vaso colla sua base minore , e tramandasse l' acqua dalla maggiore tutta aperta ; allora per essere $z < f$, si fa p negativo , e vi presenta un curioso fenomeno , che or ora esamineremo .

PROBLEMA XI.°

30. Sia il tubo ANPFB (Fig.^{a} 2.^{a}) di qualunque forma e conservato costantemente pieno d' acqua , di cui ciascuno strato si muove in direzione della linea centrale , e sorte per la luce PF : si vuol sapere la pressione dell' acqua contro qualunque dato luogo del tubo quando il suo moto è diventato uniforme .

Sol.

Sol.

L' equazione ritrovata al Cor. III.° del Prob'. VII.°, cioè $p = x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2) z^2} = x - \frac{f^2 b(h^2 - z^2)}{(h^2 - f^2) z^2}$ soddisfa al quesito. Quindi supposta picciolissima la luce PF in paragone della suprema sezione AB, risulta $p = x - \frac{bf^2}{z^2} + \frac{bf^2}{h^2} = x - \frac{bf^2}{z^2}$, che è la differenza fra l' altezza dell' acqua sopra la sezione premuta NT, e l' altezza dovuta alla velocità per la stessa sezione NT. Il che era &c.

31. Cor. I.° Se si pone $x = \frac{bf^2}{z^2}$, il tubo non sente più pressione di sorte alcuna; il che dimostra che i tubi, le cui larghezze o sezioni seguitano la legge di questa equazione non soggiacciono a veruna pressione dell' acqua, che dentro vi scorre e si scaglia da un picciolissimo foro.

32. Cor. II.° Dall' equazione $x = \frac{bf^2}{z^2}$ si ricava $z = f\sqrt{\frac{b}{x}}$. Dunque affinchè i tubi non soggiacciano alla pressione dell' acqua che portano, aver debbono le sezioni reciprocamente proporzionali alle radici delle altezze dell' acqua sopra di se, ed innoltre una qualunque sezione $= f\sqrt{\frac{b}{x}}$. Una tal figura, che aver debbono i tubi non soggetti a pressione dee parimente esser quella, in cui si conforma la vena d' acqua tramandata da un orifizio fatto nel fondo orizzontale d' un vaso. Ed è una verità di fatto, che la vena si va restringendo a misura che si scosta dall' orifizio; e la legge di tal restrizione viene rappresentata dalla detta equazione fino a che però la vena resta unita e raccolta, giacchè quando incomincia a sparpagliarsi e dispergersi, cessa ogni regolarità ed ogni legge.

33. Cor. III.° Se fosse $z = f\sqrt{\frac{b}{x-a}}$, nascerebbe $p = x - \frac{bf^2}{z^2} = a$, cosicchè qualora sia a una quantità costante, starebbe la medesima la pressione contro tutte le sezioni del tubo; e sarebbe dovunque la pressione dell' acqua corrente alla pressione dell'acqua stagnante, come sta l'altezza costante arbitraria a all' altezza x dell' acqua sopra il dato luogo.

34. Cor. IV.° A parlare però più rigorosamente, siccome p non indica se non l' altezza della colonna d' acqua, il di cui peso equivale alla pressione, la pressione contro il perimetro della sezione nascerà dal moltiplicare il detto perimetro per p. E però supposta circolare la sezione z, il suo semidiametro y, e il rapporto del diametro alla periferia $1 : \pi$, la pressione contro un tal perimetro sarà $= 2\pi y p$, cioè proporzionale al prodotto yp, ovvero $p\sqrt{z}$, oppure finalmente ad $\left(x - \frac{bf^2}{z^2}\right)\sqrt{z}$. E di quì si raccoglie, che se $\left(x - \frac{bf^2}{z^2}\right)\sqrt{z}$ sarà uguale ad una grandezza costante c, il pericolo, che il tubo si schianti per lo sforzo dell' acqua che dentro vi corre, è il medesimo per tutta la lunghezza del tubo. L'equazione poi $\left(x - \frac{bf^2}{z^2}\right)\sqrt{z} = c$, ovvero $x^2 z^4 - 2bf^2 x z^2 + b^2 f^4 - c^2 z^3 = 0$, oppure supposte le sezioni circolari coi semidiametri y, l' equazione $\pi^4 x^2 y^8 - 2bf^2 \pi^2 x y^4 - \pi^3 c^2 y^6 + b^2 f^4 = 0$ manifesta la legge, che seguir debbono le sezioni del tubo per soggiacere lungo tutta la di lui estensione alla stessa pressione.

35. Cor. V. Qualunque sia la forma del tubo, l' Equazione $p = x - \frac{bf^2}{z^2}$ ci appalesa i seguenti risultati: 1.° Che la pressione è positiva fintanto che $x > \frac{bf^2}{z^2}$, ovvero

$z > f\sqrt{\frac{b}{x}}$. 2.° Che è nulla quando $x = \frac{bf^2}{z^2}$, ovvero $z = f\sqrt{\frac{b}{x}}$, e nulla parimente nel foro, dove $z = f$, ed $x = b$. 3.° Che è negativa quando $x < \frac{bf^2}{z^2}$, oppure $z < f\sqrt{\frac{b}{x}}$. 4.° Che è negativa quando il tubo è cilindrico e tutto aperto, come EHGF nella Fig.ª 7.ª, dove MN = HG $= z = f$, RM $= x$, RH $= b$, e però $x < b$. 5.° Che è maggiormente negativa quando il tubo è conico, e inferiormente divergente, essendo allora $z < f$. 6.° Che se il tubo è conico ma converge inferiormente, la pressione è positiva tutte le volte che $z > f\sqrt{\frac{b}{x}}$; nulla tutte le volte che $z = f\sqrt{\frac{b}{x}}$; finalmente negativa anche in questo caso, qualora sia $z < f\sqrt{\frac{b}{x}}$. Per dilucidare pienamente questo fenomeno singolare è necessario stabilire le seguenti

Riflessioni intorno alla pressione negativa.

36. Ogni sezione MN allora solamente soffre una pressione propriamente detta, quando lo strato d' acqua che immediatamente precede si avanza con minore velocità che lo strato contiguo seguente, talmente che quello viene accelerato da questo, e questo ritardato da quello. Che se entrambi si muovono di passo uguale, e nulla vi ha che tenda ad imprimere maggior velocità allo strato posteriore che all' anteriore, non può l' uno agire nell' altro, e non può quindi nascere pressione di sorte alcuna. Ma se finalmente per l'opposto lo strato anteriore più velocemente si avanza che il posteriore, allora non solo non ne risulta alcuna pressione, ma

i due strati, qualora fossero insieme uniti come due corpi solidi, verrebbero l' uno dall' altro separati e respinti con una certa forza proporzionata alla differenza delle velocità. La colonna d' acqua del tubo non rimarrebbe più allora unita e continua, se, parte la picciola forza di coerenza delle particelle d' acqua fra loro, parte un' altra causa, che toccheremo or ora, non la tenesse unita fino a tanto che la forza che tende a disunirla, non giugne a superare quella che la mantiene congiunta, nel qual caso succede effettivamente la separazione della colonna in più parti.

Ne' calcoli precedenti dal Problema VIII.° sino a questo paragrafo è stato supposto, che il vaso si trovi nel vuoto, e si è voluto prescindere affatto dalla pressione dell' atmosfera. Ora inerendo a questo supposto in tutti que' casi, ne' quali la pressione diviene negativa, l' acqua che corre pel tubo EHGF, non riempirebbe più tutta la capacità interna del tubo: e in conseguenza le formole appoggiate alle precedenti teorie non avrebbero più applicazione nè uso. Per applicare adunque anche a questi casi, che hanno luogo in natura, i nostri calcoli, sarà mestieri considerar l' acqua soggetta sempre alla pressione dell' atmosfera o dell' aria. E però chiamata al solito A l' altezza d' una colonna d' acqua, il cui peso uguaglia la pressione dell' atmosfera, si avrà dal Cor. III.° del Probl. VII.° per la pressione dell' acqua $p = \mathrm{A} - b + x + \frac{h^2 b (z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2) z^2}$, e supposta come sopra picciolissima la f in confronto di h, sicchè sia $\frac{h^2}{h^2 - f^2} = 1$, risulterà $p = \mathrm{A} + x - \frac{b f^2}{z^2}$, cioè fatto $x - \frac{b f^2}{z^2} = p'$, sarà $p = \mathrm{A} + p'$, dove p' esprimerà la pressione dell' acqua nel vuoto. Ora se all' aria libera l' acqua preme contro il perimetro del tubo dal di dentro al di fuori colla forza $p = \mathrm{A} + p'$; vice versa l' aria ambiente preme questo perimetro dal di fuori al di dentro verso l' asse con uno sforzo $= \mathrm{A}$;

e da ciò ne deriva che anche nell' aria libera il circuito del tubo non soffre se non la pressione $p = A + p' - A = p'$, che soffre nel vuoto. Che se p' diventa negativa, la circonferenza del tubo viene allora premuta all' indentro colla forza $= p'$: imperciocchè l' atmosfera preme dal di fuori al di dentro colla forza A, l'acqua preme dal di dentro al di fuori colla forza $A - p'$; dunque la pressione dal di fuori al di dentro è $= A - (A - p') = p'$.

37. E' poi manifesto, che in questo caso della pressione negativa la pressione interna dell' acqua contro il tubo svanisce allorchè $p' = A$. Per rendere tutto questo sensibile coll'esperienza, si saldi lateralmente al tubo cilindrico EFHG (Fig.ª 8.ª) un altro tubo MSO, che ripiegandosi in S all' ingiù arriva colla sua apertura inferiore O quasi al fondo d' un vaso L I. Si immagini pel foro M dove questo tubo s' inserisce nel primo una sezione NM del primo; si cerchi la pressione corrispondente a tal sezione, ovvero il valore di $p' = x - \frac{bf^2}{z^2}$; e si prenda di tal lunghezza il tubo MSO, che l' altezza di M sopra O sia $= p'$. Chiudasi ora l' orifizio GH, e si empia d' acqua il vaso ACEGHFDB, la quale discenderà pel tubo MSO nel vaso RQ. Quando l' acqua nel vaso RQ si sarà alzata sopra l' orifizio O, aperto allora GH, non solamente esce per GH l' acqua del vaso superiore CB, ma sale nel tempo istesso quella del vaso inferiore RQ pel tubo OSM, e qualora venga supplito con nuov'acqua, il dispendio di AD sorte per GH insieme coll' altr' acqua, che ascende per OM, e ciò dura fino a tanto che il fondo O si trova sott' acqua (a). La cagione di tal fenomeno è la seguente: l' acqua del vaso ACEGHFDB preme contro il picciolo foro M, con una forza $= A - p'$. Se pertanto il tubo MSO è pieno d'acqua, e il vaso RQ o manca, o è vuoto;

(a) Dan. Bernoulli Hydrod. Sect. XII. Exper. 6.

to; l' aria esterna preme contro O colla forza $= A$; ma l' acqua del tubo MSO preme contro O dal di dentro, cioè in direzione opposta 1.° colla forza $= p'$, perchè si è fatta $= p'$ l' altezza di M sopra O; 2.° colla forza $= A - p'$, perchè tanto appunto preme contro M l' acqua del tubo EH. Dunque l' orifizio O sostiene dal di dentro una pressione $= p' + A - p' = A$, cioè $=$ alla pressione, che sostiene dal di fuori; e perciò l' acqua del tubo MSO vi resta sospesa. Ma se il vaso LI è pieno d' acqua sino a P; allora il foro O è premuto dal di fuori con una forza $= A + PO$, e dal di dentro con una forza $= A$; e da queste due forze risulta una pressione dal di fuori al di dentro $= A + PO - A = PO$. Per la qual cosa l' acqua verrà spinta per O dentro il tubo, e salirà in esso per indi scaricarsi per l' apertura GH, e ciò seguiterà finchè O si troverà sott' acqua. Ciò si dimostra eziandio dal ragguaglio delle quantità d' acqua, che passano nel medesimo tempo per le due sezioni MN, e GH; imperciocchè quella che passa per NM non basta a supplire il dispendio, e a riempire il vuoto lasciato da quella che sorte per l'apertura GH. In fatti siccome si piglia larghissimo il vaso AD in confronto delle due aperture EF, GH, la velocità dell' acqua in ciascun luogo del tubo EH sarà dovuta all' altezza di tutta l' acqua sopra lo stesso luogo; e però chiamata h l' altezza dell' acqua sopra il luogo M, ovvero sopra la sezione MN, ed $h + k$ l' altezza sopra l'apertura GH, sarà la velocità nel primo luogo $= \sqrt{2h}$, e la velocità nel secondo $= \sqrt{(2h + 2k)}$. Se ora si fa $NM = \varphi$, $GH = f$, passerà nel tempicciuolo dt per l'apertura GH una quantità d acqua $= f\,dt\sqrt{(2h + 2k)}$, e per la sezione NM una quantità $= \varphi\,dt\sqrt{2h}$: la prima quantità è visibilmente maggiore della seconda tutte le volte che f è o maggiore, o uguale a φ. Dunque in questi due casi di $f > \varphi$, ed $f = \varphi$, non passerà per MN tant' acqua quant' è necessaria a riempire il luogo lasciato da quella che esce per GH; ond' è che formasi un vuoto fra NM, e GH, per cui l' aria esterna che preme sul vaso RQ non essendo più contrabbilanciata, sforza l'acqua a salire pel tubo OSM, e gettarsi per M in quel vuoto. Quindi è, che se tutto questo apparato si portasse sotto il recipiente della macchina pneumatica, e dopo averne estratta l' aria si lasciasse uscir l' acqua per l'apertura GH, non salirebbe più pel tubo OM quella che è contenuta nel vaso RQ.

Se nella parete d' un Camino si fanno delle aperture, il fumo che internamente s' innalza non solo non esce punto per quelle, ma l' aria esterna all' opposto vi entra con forza a motivo della rarefazione prodotta dal calore nell' aria interna. Il lodato Sig. Bernoulli intorno a questo fenomeno si esprime così: *Sunt porro alia naturae phaenomena, quorum vera explicatio ab ista theoria hydraulico-statica pendet: veluti quod fumus per caminum ascendens aerem per foramen in camino factum magno post se trahat impetu: quod ventus ex loco angustiori in apertiorem flans aliquid de sua elasticitate perdat, prouti id colligitur ex eo, quod fenestrae apertae ab aere, e camera egressum ob majorem suam elasticitatem tentante, claudantur; et hujusmodi alia quae examinare singula non licet* (*a*). Potrebbe quì parere che il Sig. Bernoulli riguardasse il fumo come un fluido, che di sua natura tende all' alto secondo l' opinione degli antichi, e si trae dietro l' aria esteriore per le aperture fatte alla tromba; ma la teoria da lui quivi adottata mostra il vero senso da darsi alle sue parole; ed altronde tutti convengono, che il fumo, messo anche da parte l' urto che riceve dai gas sviluppati nella combustione, viene spinto in alto dall' aria a quel modo che il legno dall' acqua.

38. Dalle cose fin quì esposte si scorge in qual senso possa dirsi, che qualora il valore della pressione ritrovato colle precedenti regole diventa negativo, essa si cangia in un

---

(*a*) Dan. Bernoulli Hydrod. Sect. XII. §. 17.

un succhiamento (*a*). Il Sig. D' Alembert non sembra soddisfatto di questa spiegazione. Crede egli, che il valor negativo della pressione indichi soltanto, che lo strato NT (Fig.ª 2.ª), il quale veniva prima premuto nella direzione del moto da C verso *c*, sia ora premuto in direzione opposta da *c* verso C. Egli aggiugne, che ciò non ostante l' acqua contenuta nello strato N*nt*T seguita a premere come prima le pareti del tubo, essendo indifferente che lo strato sia premuto in avanti, o all' indietro (*b*). Ma i principj da noi quì premessi e dimostrati fanno abbastanza conoscere, che la spiegazione del Sig. D'Alembert non può essere legittima. Convien per altro osservare che il Sig. D' Alembert pone affatto in non cale la pressione dell' aria, ed allora non può certamente immaginarsi alcun succhiamento: e quindi è, che lo sperimento Bernoulliano non riuscirebbe nel vuoto. Ma le osservazioni che lo stesso Sig. D' Alembert (*c*) fa sopra i casi, ne' quali la massa fluida dee disunirsi, avrebbero di leggieri potuto convincerlo, che questi sono appunto que' casi, in cui la pressione si cangia in negativa, e che allora in uno spazio vuoto le pareti del tubo non possono in alcun modo essere premute dal di dentro verso l' infuori. Certo è che più chiaramente si sarebbe espresso il Sig. Bernoulli nel luogo citato della sua Idrodinamica, se alle parole *pressio in suchionem mutatur, idest latera canalis introrsum premuntur*, avesse aggiunto *ab aere ambiente*. Ciò è avvertito dal Sig. D' Alembert ne' suoi Opuscoli Matematici (*d*), dove egli ritratta in parte quel tanto che nel citato luogo del Trattato de' fluidi aveva col Sig. Bernoulli obbiettato. Non pare però che voglia ritrattar tutto, tenendo egli anzi per giusta la sua spiegazione tutte le volte che la pressione dell' atmosfera

---

(*a*) Ved. Dan. Bernoulli Hydrod. Sect XII. §. 11. Joh. Bernoulli Hydraul. P. II. § XIV. Op. T. IV.

(*b*) D'Alembert Traité de l'Equilibre et du Mouvement des Fluides §. 149.

(*c*) L. c. §. 99.

(*d*) T. I. Memoire IV. §. XVIII.

ra non viene computata. Ma se è vero che l' acqua nel tubo OSM (Fig.ª 8.ª) non salirebbe se la pressione dell' atmosfera mancasse; è altresì vero, che l' acqua nel tubo FG non premerebbe contro le sue pareti.

39. Dal fin quì detto si deducono le seguenti massime. L' acqua che scorre nel canale APFB (Fig.ª 2.ª) formerà un corpo unito e continuo fintantochè l' equazione ritrovata per p darà un valore positivo. Ma allorchè in un luogo NT del canale questo valore incomincia a diventar negativo, l' acqua che precede incomincia in questo luogo a separarsi da quella che segue. Può bene la coerenza delle particelle d' acqua fra loro, e l' adesione alle pareti del tubo far sì, che il valore negativo di p debba acquistare una qualche grandezza prima che effettivamente succeda la divisione dell' acqua. Ma è tanto picciola questa forza di coerenza e adesione, che può senza scrupolo trascurarsi. Per la qual cosa supponendo il canale esposto alla pressione dell' aria, l' acqua che dentro vi corre, incomincierà a dividersi in quel luogo dove p' (supposta negativa) diviene $>$ A. Perlocchè se al vaso AD (Fig.ª 7.ª) sarà unito nel fondo il tubo verticale cilindrico EHGF, non potrà questo esser più lungo di 32 piedi, perchè l'acqua vi si mantenga nello stato di continuità. Che se il tubo supera una tal lunghezza, presso l' inserzione EF l' acqua che corre in avanti si separa da quella che le vien dietro, e lascia in quel luogo uno spazio vuoto. Diffatti nel presente supposto la pressione in EF è $p = \mathrm{A} + x - \frac{bf^2}{z^2} = \mathrm{A} + x - b$, ossia $= \mathrm{A} - (b - x)$, dove $b - x = p' = \mathrm{RH} - \mathrm{RE} = \mathrm{EH}$ indica la lunghezza del tubo: Nella parte poi inferiore del tubo dee rimanere sospesa una colonna d' acqua alta 32 piedi sostenuta dalla pressione dell' atmosfera; e non uscirebbe punto d' acqua per l' apertura HG, se quella che corre per EF non accrescesse l'altezza della predetta colonna, e non la rendesse preponderante all'atmosfera: e di quì apparisce quanto grande sarebbe l' er-

rore di chi calcolasse in questo caso la velocità dell'acqua nell' uscita da HG come dovuta all' altezza della superior superficie AB sopra l' apertura HG. Tutto ciò si applica egualmente ai tubi cilindrici obbliqui all' orizzonte, ne' quali l' inferior' apertura HG è più di 32 piedi al di sotto della superiore EF.

Se il tubo EHGF è un tubo conico, che si va allargando al basso, la separazione dell' acqua succede in EF tutte le volte che $\frac{bf^2}{z^2} - x$ diventa maggiore di 32 piedi: e perciò se HG è due volte così largo come EF, la separazione accade allorchè $4b - x$ è maggiore di 32 piedi; dal che si scorge non dover essere $b - x$, cioè l' altezza del tubo maggiore di 8 piedi, perchè essendo $b > x$, sarebbe $4b - x$ molto maggiore di 32 piedi.

41. Le precedenti dottrine intorno alla forza premente dell' acqua contro le pareti de' canali sono tanto più interessanti, in quanto elle ritrovano un' acconcia applicazione allorchè si dee formar giudizio della fermezza da darsi ai canali per non essere rotti e schiantati dalla forza dell' acqua. Qualora i tubi sieno cilindrici, o almeno tutte le sezioni NT (Fig.ª 2.ª) perpendicolari alla linea centrale sieno circolari, il Calcolo Integrale ci dà il modo di ritrovare l' intera pressione, a cui soggiace il canale. Rappresenti il circolo ACBD (Fig.ª 9.ª) una cotal sezione d' un tubo; e condotti a squadra i due diametri AB, CD, si prenda ad arbitrio sulla circonferenza un punto F. Questo punto viene premuto dall' acqua nella direzione Ff del semidiametro EF prolungato, e ciò vale di qualunque altro punto della periferia. La forza premente rappresentata da Ff si risolva in due altre FG, FN parallele ad AB, DC; ed è manifesto che tutte le forze FG nella semicirconferenza CAD tendono a distaccare in C, e D questa semicirconferenza dall' altra CBD. Così preso in quest' altra il punto M, e risoluta la forza premente Mm dell' acqua contro di essa nelle due Mg, Mu parallele ad

AB, DC, la somma delle forze FG sarà in equilibrio colla somma delle forze Mg, e parimente la somma delle forze FN, Mn che tendono a disgiugnere in A, e B la semicirconferenza ACB dall' altra ADB sarà in equilibrio colla somma delle forze, che in quest'altra semicirconferenza ADB agiscono in direzione opposta alle prime. La media direzione di tutte le forze FG passa per A, come passa per B la direzione media di tutte le Mg. Pigliando Aa uguale alla risultante di quelle, Bb di queste, si équilibreranno Aa, e Bb, e ciascuno de' due punti C, o D soffrirà uno sforzo $= \frac{1}{2}$ Aa $= \frac{1}{2}$ Bb. Da ciò è agevole il passo al

PROBLEMA XII.

42. Al di sotto del vaso o della conserva ACFB (Fig.ª 6.ª) havvi un tubo cilindrico orizzontale FGHE, ma chiuso alla sua imboccatura HG. L' acqua riempie il tubo, e il vaso sino ad AB: si domanda con quanta forza l' acqua stagnante preme il tubo FGHE per farlo crepare.

SOL.

Essendo IL la profondità dell' asse del tubo sotto il pian di livello AB, ciascun elemento dell' interna superficie del tubo soffre una pressione equivalente al peso d' una colonna d'acqua, che ha questo elemento per base, ed IL per altezza, giacchè si suppone picciolissimo il semidiametro del tubo in confronto di IL. Se ora fatto IL $= b$, si prende (Fig.ª 9.ª) il cerchio ACBD per rappresentare una sezione del tubo; e si concepisce, che contro ciascun elemento Fe della periferia prema una forza che vaglia il peso d' una colonna d' acqua di base $=$ Fe, e di altezza $= b$; e si fa il resto come nel §. antecedente; indi si guida FR normale a CD, e si fa

$FR = y$, $ER = x$, il raggio $CE = r$, l'arco $DAF = u$; ne verrà in conseguenza la forza $Ff = bdu$: e perchè sta $Ff : FG :: EF : FR$, sarà $FG = \frac{bydu}{r} = dp$, nominando p la somma di tutte le forze FG. Innoltre siccome $u = DAC - CF = r\left(\pi - \text{Arc.cos.}\frac{x}{r}\right)$, e però

$$du = -d\,.\,r\,\text{Arc. cos.}\,\frac{x}{r} = \frac{dx}{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)}} = \frac{rdx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = \frac{rdx}{y};$$

quindi $dp = bdx$. L'integrazione di questa formola offre $p = bx + \text{Cost.}$ E poichè p è $= 0$ in D, dove $x = -r$; ne viene Cost. $= br$; conseguentemente $p = b(r + x)$: facendo ora $x = r$, sarà la somma delle forze FG per tutta la semiperiferia $= p = 2br = Aa$, e perciò ciascuno dei due punti C, D soffrirà lo sforzo $\frac{1}{2}Aa = br$. Sia pertanto $MNnm$ (Fig.ª 6ª) un elemento della superficie del tubo, e si assuma $HM = s$; sarà lo sforzo contro la zona elementare $MNnm$ tendente a spezzarla $= brds$, e contro la superficie indeterminata HMNG sarà un tale sforzo $= brs$, e per ultimo (chiamata l la lunghezza del tubo) la spinta dell'acqua contro tutto il tubo in quanto è diretta a farlo crepare si trova $= lbr$. Il che era &c.

43. Nella soluzione di questo Problema non abbiamo tenuto conto della grossezza del tubo, e lo abbiamo considerato come puramente superficiale, perchè quando un canale di competente larghezza ha solamente poche linee di grossezza, come si costuma ne' condotti di rame, i quali per la grande fermezza di questo metallo malgrado la loro sottigliezza fanno una sufficiente resistenza, si può senza errore lasciar da parte la grossezza del tubo, e considerare tutto il contorno solido del medesimo come una geometrica superficie cilindrica. Quando però si vorrà procedere con rigore, in ve-

vece del semidiametro r dell' interna larghezza del canale converrà prendere un medio proporzionale aritmetico fra il semidiametro r, e il semidiametro della larghezza esteriore, perciocchè tutta la forza di coerenza dee supporsi concentrata nel mezzo della grossezza del tubo, come appunto nella Statica si suppone questa forza unita nel centro della fermezza.

44. Cor. Se la superficie cilindrica del tubo EG si spianasse e distendesse sopra un piano, il peso d' una colonna d' acqua innalzata sopra di lei all' elevazione $IL = b$ equivarrebbe all' intera pressione perpendicolare, con cui l' acqua spinge l' interna superficie del tubo. Questa pressione sarebbe adunque $= 2\pi rbl$. E perchè $2\pi rbl : rbl :: 2\pi : 1$, sta in conseguenza *la pressione intera perpendicolare contro la superficie interna del tubo alla forza che tende a spaccarlo, come sta la circonferenza al semidiametro.*

PROBLEMA XIII.

45. Supponendo lo stesso tubo EG chiuso con un coperchio HG, che ha nel mezzo una picciola apertura PQ, per cui l'acqua esce mentre il vaso AF è mantenuto costantemente pieno; si cerca la forza dell' acqua tendente a far crepare il tubo.

SOL.

Pel Cor. I.° del Probl. X.° il tubo soggiace ad una pressione come se l' acqua nel vaso si sollevasse ad un' altezza $= b - \frac{bf^2}{z^2}$, e quivi rimanesse stagnante e tranquilla. Dunque pel Probl. antecedente moltiplicando quest' altezza pel semidiametro, e per la lunghezza del tubo, il prodotto $\left(1 - \frac{f^2}{z^2}\right) brl$ darà lo sforzo che tende a fendere il tubo. Il che era &c.

Di quì si ricava il seguente

TEOREMA.

46. Nel tubo cilindrico orizzontale EG per cui scorre l'acqua dal vaso AF, e sorte pel picciol foro PQ, sta la forza fenditrice dell'acqua stagnante a quella dell'acqua corrente, come il quadrato della larghezza del tubo alla differenza de' quadrati della stessa larghezza, e dell'orifizio.

PROBLEMA XIV.

47. Al fondo del vaso IHEL (fig.ª 10.ª) è unito il tubo cilindrico ERBA inclinato all'orizzonte, e chiuso nell'imboccatura AB, sicchè l'acqua, che riempie il tubo e il vaso sino in IL vi resti stagnante: cercasi la forza, con cui l'acqua tende a far crepar il tubo.

SOL.

Si faccia l'angolo d'inclinazione del tubo all'orizzonte, cioè EMG $=$ EAF $= \varphi$, il semidiametro delle sue interne sezioni $= r$, la sua lunghezza $= l$, l'altezza IF dell'acqua sopra l'inferiore imboccatura del tubo $= a$. Se ora si piglia una sezione indeterminata MN, e si pone EM $= x$, diventa HG $= x \,\text{sen.}\varphi$, HF $= l \,\text{sen.}\varphi$, e però GF $= (l - x)\,\text{sen}\,\varphi$, e IG $= a - (l - x)\,\text{sen.}\varphi$. Laonde soffre il tubo nell'elemento M$mn$N della sua superficie dall'acqua premente una forza fenditrice $= [a - (l - x)\,\text{sen.}\varphi]\,rdx$, per ciò che si è dimostrato nella soluzione del Probl. XII.° Integrando pertanto questa espressione, il suo integrale $r(a - l\,\text{sen.}\varphi)\,x + \frac{1}{2}\,r x^2\,\text{sen.}\varphi$ dà la forza fenditrice per la porzione indeterminata EMNR del tubo, nè vi ha quì costante da aggiungere all'integrale, perchè si annulla la forza insieme con

x,

x. Quindi posto $x = l$, risulta la forza ricercata per tutto il tubo $= (a - \frac{1}{2} l \operatorname{sen.} \varphi) rl$. Il che era &c.

48. Cor. I.° quando $\varphi = 0$, cioè il tubo è orizzontale, la forza fendente diviene *ral* come nel Probl. XII.° : e se il tubo è verticale, cioè $\varphi = 90.°$ la forza diventa $(a - \frac{1}{2} l) r l$.

49. Cor. II.° Se il solo tubo è pieno d' acqua; allora è $a = l \operatorname{sen.} \varphi$, e la forza $= \frac{1}{2} r l^2 \operatorname{sen.} \varphi = \frac{1}{2} r l^2$ nel tubo verticale: dal che si scorge, che nel tubo verticale questa forza è la metà di quella del medesimo tubo orizzontale premuto da una colonna d' acqua di altezza uguale alla sua lunghezza, e nel tubo obliquo è la metà di quella stessa forza moltiplicata pel seno d' inclinazione.

50. Cor. III.° In generale lo sforzo che tende a spaccare il tubo inclinato è tanto grande, quanto se il tubo fosse orizzontale, e venisse premuto dall' acqua nell' altezza $a - \frac{1}{2} l \operatorname{sen.} \varphi$.

51. Cor. IV.° Ne' tubi verticali, e inclinati questo sforzo non è uniformemente distribuito per tutta la loro lunghezza, come lo è negli orizzontali. In quelli va sempre crescendo verso l' imboccatura, dove si fa tanto grande quanto in un tubo orizzontale che viene premuto dall' acqua elevata all' altezza di quelli. Quindi è, che i tubi verticali e inclinati debbono verso il basso formarsi ugualmente resistenti che gli orizzontali. In un tubo verticale di 100 piedi di lunghezza la sua estremità inferiore della lunghezza di un piede soggiace ad una forza fenditrice $= (a - \frac{1}{2} l) r l = (100 - \frac{1}{2}) r$, che è tanto grande quanto se questa porzione d' un piede stasse orizzontalmente sott' acqua alla profondità

di $99\frac{1}{2}$ piedi. Di quì si scorge qual inutile dispendio sarebbe il formare siffatti tubi di ugual grossezza nella parte superiore che nella inferiore.

PROBLEMA XV.

52. Se l'acqua nel tubo predetto EB non è più stagnante, ma esce per l'orifizio PQ, ed in tanto ne viene sempre restituita altrettanta nel vaso HL; si cerca lo sforzo esercitato da quest'acqua corrente per far crepare il canale.

SOL.

Dal Problema XI.° si ha la pressione dell'acqua in un punto qualunque M del tubo $= \mathrm{IG} - \frac{\mathrm{IF}\,.\,\mathrm{PQ}^2}{\mathrm{MN}^2} = a - (l - x)\,\mathrm{sen}.\varphi - \frac{af^2}{m^2}$, facendo la luce $\mathrm{PQ} = f$, e la sezione $\mathrm{MN} = m$. Perlocchè ragionando come nella soluzione del Problema antecedente sarà la forza fendente nell' elemento superficiale $\mathrm{M}mn\mathrm{N} = [a - (l - x)\,\mathrm{sen}.\varphi]\,r\,dx - \frac{af^2 rdx}{m^2}$, il cui integrale $[a - (l - \frac{1}{2}x)\,\mathrm{sen}.\varphi]rx - \frac{af^2\,rx}{m^2}$ dà una tal forza per la porzione indeterminata EN del tubo. Laonde preso $x = l$, la forza fendente per tutto il tubo si trova $= \left(a - \frac{1}{2}\,l\,\mathrm{sen}.\varphi - \frac{af^2}{m^2}\right)rl$. Il che era ec.

PROBLEMA XVI.

53. Supposte circolari tutte le sezioni NT (Fig.ª 2.ª) del tubo ANPFB, da cui l'acqua esce per l'apertura PF, ve-

venendo sempre superiormente restituita: ritrovare lo sforzo che fa l'acqua per spaccare il tubo nell'ipotesi che il di lei moto sia già ridotto uniforme.

SOL.

Sia NTtn una zona evanescente dell' interna superficie del tubo, ed r il semidiametro della sezione circolare NT, il qual semidiametro sarà variabile, se tale sarà la larghezza del tubo. Preso pertanto Nn = Cc = dy, trovasi la detta zona = $2\pi r dy$: e poichè qualunque suo punto N soggiace pel Cor. III.° del Probl. VII.° alla pressione $x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}$, dove $x = \mathrm{IL}$, $z = \mathrm{NT}$, $h = \mathrm{AB}$, $f = \mathrm{PF}$, $b = \mathrm{IG}$; perciò la pressione della zona sarà $2\pi\left(x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}\right) r dy$. Ma la pressione sta alla forza che tende a far crepare la zona come sta la circonferenza del cerchio al semidiametro: Dunque la forza fenditrice della zona sarà $= \left(x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}\right) r dy$. Perlocchè essendo r, z, y date per funzioni di x, l' integrazione di questa formola differenziale farà conoscere la forza schiantante per tutto il canale APFB. Il che era &c.

54. Se un tubo cilindrico retto viene segato con un piano che passa pel suo asse, la sezione fatta nel contorno solido del tubo è un rettangolo, di cui un lato è la lunghezza del tubo, l'altro lato è la sua grossezza: e questo rettangolo appunto è il piano o *la sezione di rottura* quando la forza dell' acqua fa crepare il canale. A tali rettangoli sono perciò proporzionali le saldezze o resistenze de' canali composti della stessa materia. Se ora tale suppongasi la saldezza della materia del tubo, che fatto un prisma di questa materia, il quale abbia ss per la sezione di rottura, il massimo peso che esso può sostenere senza schiantarsi sia = P: e se innoltre un tubo orizzontale di lunghezza l, di semidia-

metro r, e di grossezza c viene premuto dall' acqua stagnante all' altezza a, e la sua saldezza s' agguaglia ad un peso F; si troverà F per l' analogia $ss : cl :: P : F$, che dà $F = \frac{clP}{ss}$. Ora chiamando γ il peso d' un piede cubico d' acqua, si è già dimostrato nel Probl. XII.° che lo sforzo dell' acqua tendente a far crepare il tubo è $= \gamma l a r$; sarà dunque $\frac{clP}{ss} = F = \gamma l a r$. Per la qual cosa sostituendo pel caso della zona elementare N$nt$T la lunghezza infinitesima dy in luogo di l, e l' espressione $x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}$ in vece di a, cioè dell' altezza rappresentatrice della pressione contro la zona, nascerà $\gamma\left(x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}\right) r dy = \frac{cPdy}{ss}$, vale a dire $\gamma\left(x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}\right) r = \frac{cP}{ss}$.

54. Cor. I.° Da questa formola si ha la grossezza del canale $c = \frac{\gamma r ss}{P}\left(x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}\right)$; ed essendo $z = \pi r^2$, e però $r = \sqrt{\frac{z}{\pi}}$, risulta $c = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}}\left(x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}\right)\frac{ss\sqrt{z}}{P}$. Dunque la grossezza del tubo per resistere alla forza spaccante dell' acqua debb' essere proporzionale al prodotto $\left(x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}\right)\sqrt{z}$, cioè (supposto f picciolissimo in confronto di h) proporzionale al prodotto $\left(x - \frac{bf^2}{z^2}\right)\sqrt{z}$. Da ciò si raccoglie, che se questo prodotto è costante il tubo potrà avere da per tutto la stessa grossezza, e il pericolo di fendersi sarà da per tutto lo stesso.

55. Cor. II.° Se si fa $\left(x - b + \frac{h^2 b(z^2 - f^2)}{(h^2 - f^2)z^2}\right)\sqrt{z} =$ ad una grandezza costante ω, onde risulti
$[(x - b)(h^2 - f^2)z^2 + h^2 b(z^2 - f^2)]\sqrt{z} - (h^2 - f^2)z^2\omega$,
ovvero $[(x-b)(h^2 - f^2)z^2 + h^2 b(z^2 - f^2)]^2 - (h^2 - f^2)^2 z^3 \omega^2 = 0$;
questa equazione farà conoscere qual relazione aver debba z ad x, affinchè il canale resista da per tutto ugualmente alla forza fendente dell' acqua. Se il lume è picciolissimo, l' equazione si cangia in $(xz^2 - bf^2)^2 - \omega^2 z^3 = 0$.

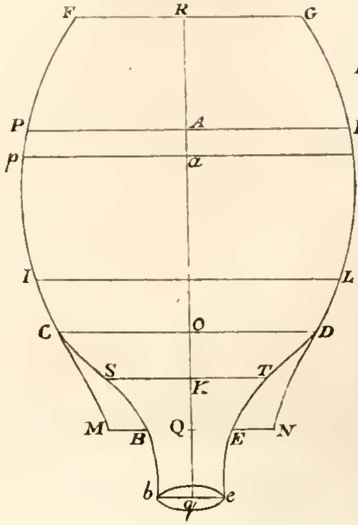
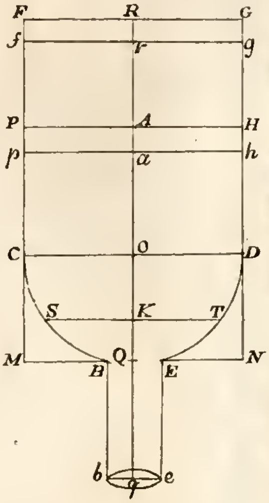

F
R
G
P
A
H
p
a
h
I
L
C
O
D
S
K
T
M
Q
N
B
E
b
q
e

Fig. 4.

Fig. 5.


F
R
G
f
r
g
P
A
H
p
a
h
C
O
D
S
K
T
M
Q
N
B
E
b
q
e

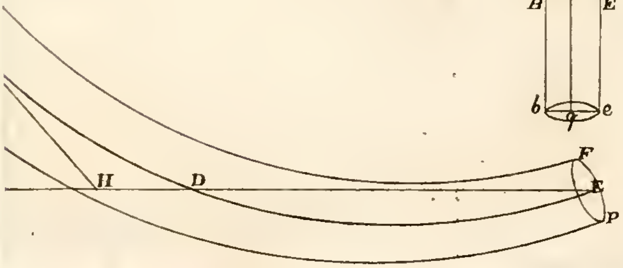


Fig. 3.

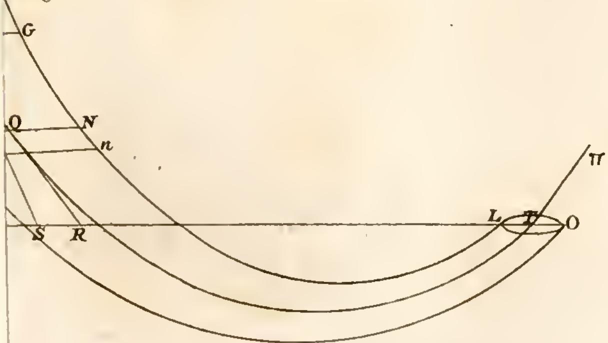

G
Q
N
n
π
L
T
O
S
R

Fig. 1

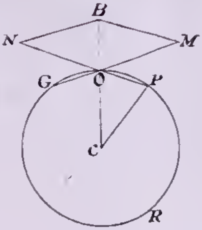


Fig. 4.

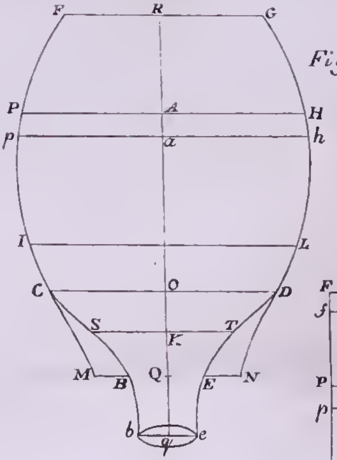

F
R
G
P
A
H
p
a
h
I
L
C
O
D
S
K
T
M
B
Q
E
N
b
q
e

Fig. 5.

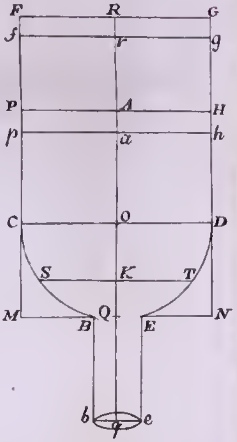

F
R
G
f
r
g
P
A
H
p
a
h
C
O
D
S
K
T
M
B
Q
E
N
b
q
e

Fig. 2.

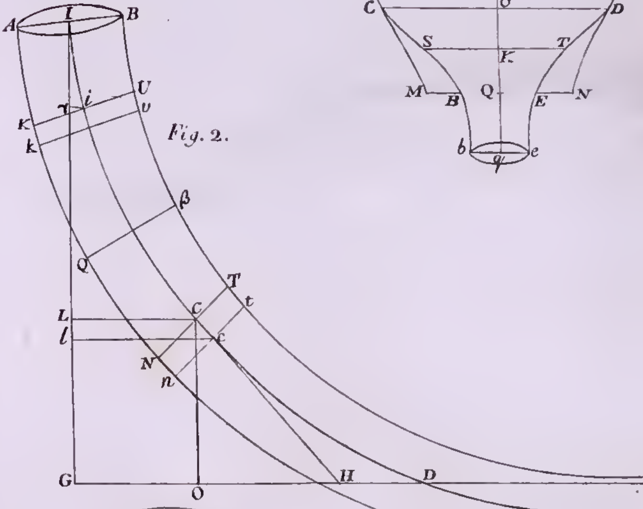

A
I
B
U
i
γ
v
K
k
β
Q
T
t
L
C
l
c
N
n
G
O
H
D
F
E
P

Fig. 3.

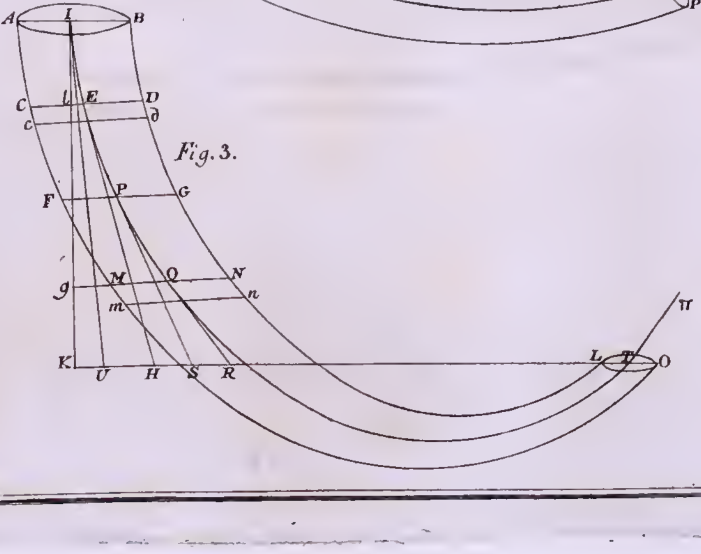

A
I
B
C
l
E
D
c
∂
F
P
G
g
M
Q
N
m
n
K
U
H
S
R
L
T
O
π

Fig. 6.

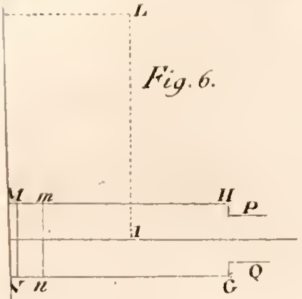

L
M
m
H
P
I
N
n
G
Q

Fig. 7.

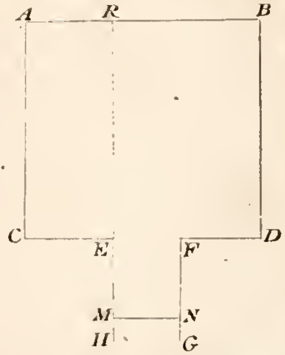
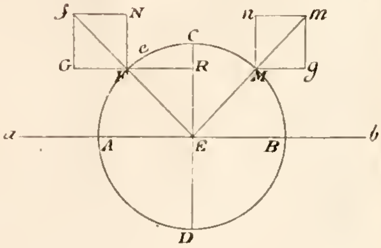
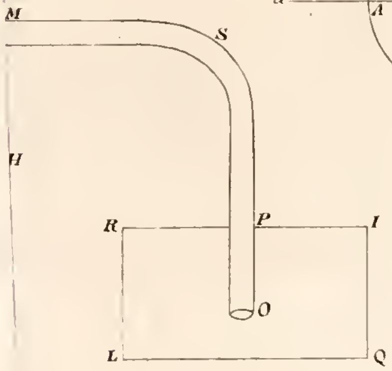
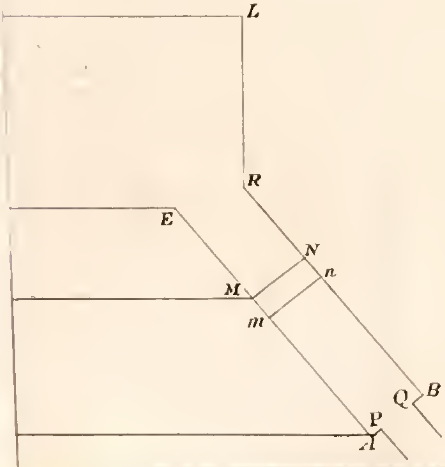

A
R
B
C
D
E
F
M
N
H
G

Fig. 9.


S
N
n
m
c
C
G
F
R
M
g
a
A
E
B
b
D




L
R
E
N
n
M
m
Q
B
P
A

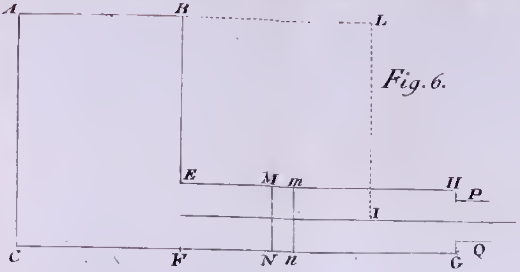


Fig. 6.

A
B
L
E
M
m
H
P
I
C
F
N
n
G
Q

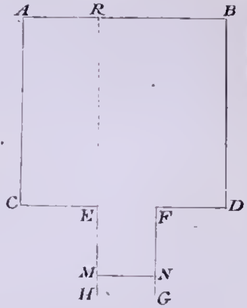


Fig. 7.

A
R
B
C
E
F
D
M
N
H
G

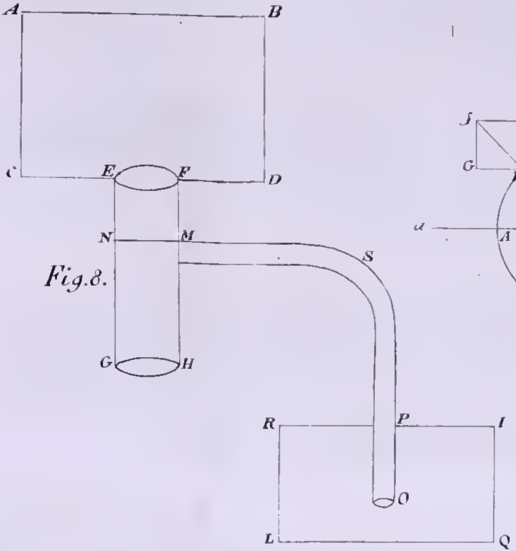


Fig. 8.

A
B
C
E
F
D
N
M
S
G
H
R
P
I
O
L
Q

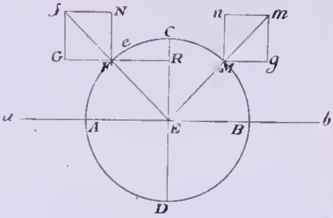


Fig. 9.

S
N
n
m
C
e
G
R
g
F
M
a
A
E
B
b
D

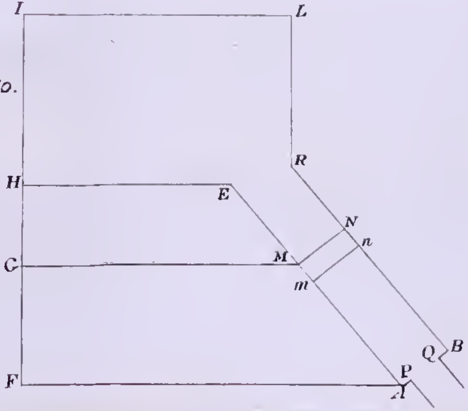


Fig. 10.

I
L
R
H
E
N
n
G
M
m
Q
B
F
P
A

LETTERA

DI GIOVANNI MAIRONI DA PONTE

Al Chiarissimo Socio

PIETRO MOSCATI.

Ricevuta li 9. *Aprile* 1802.

Concedete alla vostra celebrità, che io cerchi appoggio nella medesima ad una breve osservazione geologica da me fatta sul suolo di Lione nel corto mio soggiorno in quella Città, lo scorso Gennajo (1).

Essa, a dir vero, è così luminosa ed interessante la Storia Naturale, che il divolgarla vie maggiormente in Italia non fia cosa vana, ancorchè sfuggita non fosse all' occhio dell' immortale Buffon, e di tanti altri genj, che vanta anche in questo ramo di scienza la gloriosa Nazione.

La collina amenissima, che costeggia la città a ponente, e che interrotta dal passaggio della Sonna, concorre a render la situazione di Lione delle più belle e deliziose della Francia; è quella, che diè soggetto al mio litologico trattenimento.

Diretta essa dal *nordest* al *sudovest*, conformata di varie piegature e sinuosità lungo il corso del Rodano, non molto elevata, e quasi dello stesso livello dappertutto, è rivestita doviziosamente di terra vegetabile, frammista di arena, di ghiaja, e di ciottoli, specialmente *selciosi*, *schisto-mica-*

---

(1) L' autore vi fu come membro rappresentante la Società Italiana delle Scienze alla Consulta di Lione.

cacei e della classe delle altre primitive, o quasi primitive sostanze.

Di questi stessi ciottoli, massimamente *quarzosi*, è formato tutto il selciato della Città, e ne ridonda il letto di ambidue i fiumi.

Ha inoltre questa Collina superiormente a Lione alcune grandi brecce nella pendice all' est, aperte nel suo tessuto superficiale, alcune evidentemente dalla Natura, ed alcune progressivamente dall' arte: ridondanti sì le une che le altre di una sabbia *calcareo-silicea-argillosa*, concreta, tendente ad indurirsi, e che forma la base di una specie di tufo, atto fors' anche a molti usi nella umana economia.

La disposizione di questo colle, i componenti del suo tessuto, e le altre osservazioni, che sono per riportare, lo possono far considerare una pertinenza della grande catena montuosa, che separa la Francia dall' Italia, e che, formato il gran contorno al Lago di Ginevra, prosiegue il suo andamento verso il *nord*, sebbene da esso sia disgiunto per non picciolo tratto di pianura.

Sembra che in origine la collina fosse senza interruzione in questo luogo, e che soltanto in progresso sia stata tagliata dal passaggio della Sonna, apertovi probabilmente da qualcuno de' mezzi violenti e straordinarj, di cui non dovette scarseggiare la Natura ne' primitivi tempi della conformazione del Globo: o per opera della impercettibile fisica rivoluzione generale sofferta dal Pianeta, delineataci dalla più antica cronaca (la S. Scrittura), e così evidentemente impressa anche per sentimento del celebre Pallas sopra tutto il resto della Terra (2).

Siffatto passaggio poi per equilibrio era necessario alla Sonna, na, onde unirsi al Rodano medesimo, che quindi rigoglioso di nuove acque s' incammina direttamente al Mare.

---

(2) Veggasi la Nota (2) al recente impareggiabile Trattato di Mineralogia del rinomatissimo Havy pag. 425. tomo IV. dove a questo proposito vien citato esso Pallas.

Il luogo appunto di siffatto intersecamento della collina presenta una rarità, che può veramente fissare la osservazione di chi ama d' investigare la Natura nella Storia sua maravigliosa ed antichissima.

Il letto della Sonna a questo punto sembra scavato equabilmente in relazione al resto, da non potersi dire che quivi il fiume acceleri o ritardi la sua velocità. Avrei però amato che la rigidezza della stagione, che in questa invernata fu straordinaria in Lione (3), non avesse per tutto il tempo del breve mio soggiorno tenute sì duramente agghiacciate le acque del fiume, superiormente al Ponte S. Vincenzo, da rendermi assolutamente impraticabile qualunque scandaglio sul fondo al punto summentovato.

Questo intersecamento della collina su di un fianco e sull'altro è estesamente corredato dalla nuda pendente di una roccia quasi scarpellata, la quale alla vista offre delle punte acute a guisa di scoglio, e delle ineguaglianze stranamente configurate.

Elleno mostrano chiaramente non poter essere altro, che sommità di montagne interrate e sepolte sotto i materiali conglomerati e confusi, che strascinati dalle acque unitamente alla terra vegetabile vestirono il piano e soverchiarono que' promontorj.

Siffatte rocce veggonsi corrispondere perfettamente su ambidue i lati del Fiume, sicchè potrebbe dirsi che un dì fossero realmente congiunte, ed appartenere effettivamente ad un nucleo di pietra, che formi l' anima di tutta la collina.

---

(3) Il freddo sul termometro all' aria aperta il dì 17. Gennaio fu osservato ai 17 gradi e $\frac{3}{4}$ sotto il zero. E il dì 30 dello stesso mese, in cui io partii da Lione, le acque della Sonna erano ancormò agghiacciate.

La mia conghiettura, a dir vero, potrebbe sembrare un poco ardita a chi non voglia riflettere che quasi tutte le grandi pianure d' Europa, circonvallate da catene montuose o circoscritte dal mare, riconoscono una simile origine.

Il piano, per esempio, della nostra Lombardia, comecchè vestito generalmente e doviziosamente di terren vegetabile, non trovasi egli essere, poche braccia sotto la superficie, un tessuto di sabbie, ghiaje, ciottoli, e d' altre materie gregarie d' ogni genere, ora strateggiate, ed alternate, ed ora ammucchiate e stranamente confuse? Io conservo nel picciolo mio Gabinetto alcuni resti di pesce marino, e di conchiglie di varie specie trovate alla profondità di oltre quaranta braccia, nello scavarsi un pozzo non molto lungi dal Po.

Non perchè la erudizion vostra, Celebratissimo Socio, su questo punto Filosofico abbisogni dell' altrui autorità; ma per dare sempre maggior peso alla mia conghiettura in riguardo a chi non ne abbondasse quanto voi, io riporterò quì ciò, che a questo proposito dice il celebre Havy nel prelodato suo Trattato di Mineralogia „ L' opinione più generale fra i Geologi „ è che il Globo primitivamente fosse per lo meno sino ad „ una certa profondità in uno stato di liquidità acquosa e che „ le differenti sostanze, le quali hanno formati i primi continenti, sono il prodotto della cristallizzazione, che si „ è operata nel seno delle acque (T. IV. pag 400).

Il sistema del soggiorno del Mare ne' primitivi tempi sul nostro Continente è antichissimo. E anche la maggior parte de' Geologi moderni precessori di Havy lo hanno portato ad una evidenza, che non lascia più luogo alla dubitazione (4).

Ammessa dunque generalmente la opinione che i *Graniti*, di cui trovasi formata la prima ossatura del nostro Pianeta, siano un prodotto della cristallizzazione simultanea dei differenti elementi disciolti nel medesimo fluido, il nucleo della Collina di Lione, che appunto è di siffatta pietra, deve avere la medesima genesi, ed appartenere effettivamente alla stessa primitiva mondiale ossatura.

---

(4) Veggasi la Memoria di Bourguel in seguito delle lettere filosofiche sulla formazione de' Sali, e de' Cristalli. Amsterdam 1729 pag. 214. n.° 17., le Lettere di De Luc sulla Storia Fisica della Terra pag. 81. ec. ed i Viaggi di Saussure nelle Alpi n.° 136. 600. e susseguenti.

La sostanza diffatti, di cui sono formate le rocce anzidette, è un *Granito* di minuta e scabra grana. Il suo colore è per lo più bianco-rossiccio e grigio. Il *Quarzo*, il *Feldspato*, e la *Mica* ne sono gli ingredienti principali. Ve n' ha qualche tratto, il cui colorito tende piuttosto al verdognolo; e siffatta tinta deriva dalla *Steatite* che in esso evidentemente si ravvisa. Io inclinerei a classificare questo *Granito* fra le *Rocce Feldspatiche* riportate dall'Havy al gen. I. ord. I., e dal Wallerio alla pag. 424. (d. Tomo I. della sua Minerologia).

Si trova che alla superficie questo stesso *Granito* si altera di sembianza per la scomposizione, che vi subiscono i suoi componenti esposti all' azione lenta bensì, ma sempre intensa ed efficace delle meteore.

Il *Quarzo* vi è Cristallino simile al Cristallo di Rocca, informe e minùtissimo. Il *Feldspato* è ora bianco, ora rossiccio, e sempre in frammenti cristallini irregolari. La *Mica* vi campeggia quando *argentea*, e quando *ferruginosa*, sempre pur essa minutissima ed in iscarsa dose. La *Steatite* medesima vi si rinviene in un eguale stato di frattura e di combinazione.

Non è a strati questa pietra, ma a massi sterminati e irregolari, mostrando però delle grandi fenditure, le quali col loro parallelismo apparente potrebbero forse eccitare l'idea di una qualche stratificazione, massimamente vedute da lontano; osservate però con attenzione, specialmente di fianco, danno a vedere che da tutt' altra ragione dipende una tale loro configurazione: non avendo nè il parallelismo di più piani; nè di non picciola estensione, siccome dovrebbero; nè alcuna di quelle analogie di figura colle grandi deposizioni fluviatili, e coi sedimenti marini, le quali si riscontrano nelle calcaree stratificazioni.

Anzi negli stessi pezzi di *Granito*, che veggonsi diroccati dalle cime di queste rocce, ve n' ho trovati molti a foggia di cuneo con varia modificazione, da potersi dire che anche quivi si verifichi ciò, che su questo proposito osservò, rispetto al Monte San Gottardo, il rinomatissimo nostro Padre Pini (5).

Tali fessure dunque non possono considerarsi che interruzioni forzate della pietra, prodotte in queste stesse sterminate solidissime moli dagli incalcolabili spaventosi scuotimenti sofferti dal Pianeta nella sua longevità, e nella primitiva sua configurazione, sortito dalla onnipossente Mano del Dio Creatore.

In alcune di queste stesse fenditure le più profonde ed ampie, dirette indistintamente per ogni verso, si trova talora disposta una specie di arenaria molto scabra, che sembra come un cemento, indurito poco meno del Granito stesso, e che riempie e pareggia l' ampiezza loro.

Gli ingredienti di questo cemento, il quale qualche volta scintilla battuto negli angoli dall' acciajo, se vengano assoggettati a processi chimici, si danno a conoscere in gran parte *calcarj*, ma frammisti anche di principj silicei, e di *Quarzo* segnatamente, il quale con una buona Lente vi si vede in quello stesso stato di frattura, che si osserva nel *Granito*; sicchè questi ultimi ingredienti ragion vuole che si credano appartenere alla stessa sostanza *granitosa* disciolta nelle acque primitive, o in quelle del grande diluvio, se da questo terribile avvenimento si ami piuttosto di ripetere siffatta dissoluzione. Deposto quindi e compresso questo nuovo cemento in quelle cavità, si sarà esso rappigliato ed indudurito, tosto che potè e sentire il beneficio del tempo, e non più provare la forza della perturbazione e del conflitto causato dalle impercettibili burrasche, alle quali avrà soggiaciuto l' immenso pelago.

---

(5) Opuscoli scelti *sulle Scienze* e *sulle Arti* stampati in Milano Tomo IV. part. 4. pag. 289.

A dar poi forza maggiore alla mia conghiettura concorre la singolarità, che quivi ho ammirata. Questo cemento è tutto sparso e pieno di conchiglie marine di varia specie, conglomerate e compresse insieme, il cui tessuto è ancora molto ben conservato.

È fatto senza contraddizione, che il *Granito* della specie surriferita, e del quale consta la prima ossatura del Globo, è sostanza non mai derivativa dal Regno animale, e che in tali *Graniti* non si rinvengono giammai immedesimati corpi organici di qualsivoglia genere.

Questi non vi possono esistere che co' mezzi di filtrazione, o di deposizione successiva e posteriore. E non altrimenti che così noi possiamo conghietturare rispetto a quelle, che si trovano nel mentovato *Granito*. Dice l' anzilodato Havy (al citato luogo). ,, Scorrendo il nostro Globo, si ,, osserva delle masse enormi compatte di diverse sostanze, ,, quali sono il *Feldspato*, la *Mica*, la *Tormalina* ec., che ,, non contengono alcun vestigio di corpo organizzato e che ,, perciò diconsi di prima formazione . . . . E si è conchiu- ,, so (da queste e da altre molte osservazioni) che quando ,, le primitive montagne si sono formate, non esistevano ,, ancora gli animali ed i vegetabili ,, ; sicchè la comparsa delle tante altre fissili-argillose, e calcaree, che veggiamo sul nostro Pianeta, isolate, o sovrapposte ed aderenti alle primogenite, deve considerarsi poco meno che coetanea alla creazione sì degli uni, che degli altri.

Non prima dunque di quest' epoca secondaria può essere successa la filtrazione o deposizione delle conchiglie marine unitamente al detto arenario *calcareo-quarzoso* cemento nelle grandi spaccature del *Granito* primitivo, di cui constano le rocce, delle quali parliamo.

E questo aggregato *conchigliaceo*, sebbene di origine in parte primitiva, per conto almeno di alcuni de' suoi principj, dee chiamarsi nullameno assolutamente di un ordine secondario, e di conformazione meno rimota nella longevità del Globo; tale in somma quale sembrano esigere e il di lui sorgimento da deposizioni acquee, e la di lui compacità dal disseccamento e dal tempo.

Le epoche della Natura non sono limitate dalla nostra misura del tempo. Vanno computate con calcoli incomparabilmente più estesi. E allora non fia mai maraviglia, se nella ossificazione, per dir così, del nostro Pianeta, e nella successiva sua conformazione troviamo, che i tempi primitivi sono assai più lunghi di quelli, che sa calcolare oggidì la nostra immaginazione.

Quanto si è detto rispetto al succennato conchigliaceo cemento, si debbe dire ancora de' *Marmi ostreaciti* delle *Marne* e di una gran parte di *Schisti* ec., per ciò che riguarda l' epoca della loro comparsa sul Globo.

Gli impietrimenti singolarmente conchigliacei sono molto comuni al suolo della Francia, almeno pel poco tratto, che io ne conosco. Gli edificj pubblici, e le case particolari sono ben poche in Lione, le quali nelle loro muraglie, nelle gradinate, e ne' loro selciati terranei non abbiano pezzi frequenti di pietra e di marmo, pieni zeppi di queste conchiglie. Io ne ho veduti de' gruppi che potrebbero far onore ad un Gabinetto di Storia Naturale: tanto erano vaghi, e le conchiglie evidenti, ben distribuite e meglio conservate.

Io ho indagato se i due Marmi *Conchigliacei*, che vengono adoperati in Lione, uno di color giallognolo e biancastro, l' altro grigio-azzurro, fossero di quei contorni; ma mi fu risposto che nò, cavandosi il primo a 17 leghe in Borgogna, a Trurnu (se non erro) e l' altro a Villebois a 12 Leghe di distanza. Sono ec.

Bergamo 6 Aprile 1802.

LET-

LETTERA

DI VINCENZO CHIMINELLO

AD ANTONIO CAGNOLI.

Padova 14 Maggio 1802.

Riccvuta il dì 9 Giugno dell' anno stesso.

La opposizione di Ceres, secondo il calcolo del Sig. Baron de Zach Astronomo di Gotha, successe ai 17 Marzo di questo anno a 4^h 18' 0" tempo medio al meridiano di Seeberg, o sia Gotha, ed avea 5^s 26° 21' 26", 5 di long., latitudine geoc. 17° 8' 9", elioc. 10° 34' 54", 8; in questi giorni l'ho incontrato ancor io, e lo videro più volte gli Astronomi di Milano; ma fu scoperto un altro Pianeta (se pur non è Cometa) poco distante, e questo ancora non lo vidi. Fu il primo a vederlo il Sig. d' Olbers Astronomo a Bremen, poi lo vide il Sig. Zach a Gotha, il quale mi mandò tre osservazioni d' Olbers, e due sue, e sono:

D'Olbers 1802.	28 Marzo	A. R.	184°	57'.		Decl. Bor.	11°	33'	
	29		184	46			11	53	
	30		184	36			12	13	
di Zach	4 Aprile		183	44	6, 6		13	54	52, 0
	5		183	34	23, 7		14	13	22, 9

Da queste io ricavai le Longitudini, e Latitudini Geocentriche seguenti:

28 Marzo	5^s	29°	52'	18", 1	Lat.	12°	33'	7", 6	Bor.
29		29	33	52, 8		12	47	1, 3	
30		29	16	21, 5		13	1	18, 1	
4 Aprile		27	46	3, 6		14	13	37, 2	
5		27	29	21, 0		14	26	38, 2	

e la opposizione, come si può, in questo modo:

Ai 28 Marzo il Sole aveva all' istante del passaggio del Pianeta per il meridiano, che fu a 11^h 51' 55", 7 tempo

vero a Parigi, aveva, dico, 0^s 7° 35′ 5″, 0
il Pianeta 5 29 52 18, 1

Onde la distanza dalla passata opposizione 7° 42′ 46″, 9,
il moto orario del Sole in que' giorni era 2′ 26″, 2
quello retrogrado del Pianeta 46, 2
onde viene il moto composto 3 12, 4
e quindi si conclude l' opposizione seguita ai 22 Marzo a 11^h 32′ 48″, 7 t. vero a Parigi, nel qual istante la longitudine del Sole era 0^s 1° 38′ 24″, 1
e così dunque del Pian. 6 1 38 24, 1, e la sua latitudine geocentrica 11 9 45, 4.

Ma il punto era di ritrovare la latitudine eliocentrica, non avendosi la distanza del Pianeta. Io la cercai con metodo di falsa posizione; supposi prima, che i movimenti retrogradi dei Pianeti superiori tra se vicini, intorno le opposizioni siano in ragione inversa delle distanze, per avere una qualche distanza, e un moto diretto qualunque del Pianeta; essendo dunque il moto retrogrado di Marte in 5 giorni 1° 55′ circa, e quello del nuovo Pianeta in tanto tempo 1° 28′ 25″, mi venne la distanza 1, 98181, una rivoluzione siderea di giorni 1022 $\frac{1}{2}$, e quindi un moto diurno diretto 21′ 8″, 1.

Ora le distanze essendo piuttosto in ragione inversa delle parallassi, composi queste parallassi per sei giorni (tanto essendo il tempo trascorso dalla opposizione ai 28 Marzo), quella di Marte 5° 25′, quella del nuovo Pianeta 3° 53′ 18″, e risultò una nuova distanza di Pallade (che così lo vogliono chiamare) 2, 12258, una rivoluzione siderea di giorni 1129, 56, un moto diretto per sei giorni 1° 54′ 44″, 4, e la nuova parallassi 3° 40′ 50″, 4. Con questa nuova parallassi, nello stesso modo, trovai finalmente la distanza 2, 24234, la rivoluzione siderea di giorni 1226, 50, e il moto diurno diretto 17′ 36″, 66, e questa terza distanza che suppongo molto prossima alla vera al tempo della opposizione mi diede la latitudine eliocentrica 6° 14′ 21″. Dopo volli esplorare, se si può conoscere il luogo del nodo, e la inclinazione dell'orbita. Col moto adunque diretto diurno fatta la longitudine eliocentrica per li 5 Aprile 6ˢ 5° 44' 46",2, e per la nota canonica analogia dei seni di commutazione, elongazione, e delle tangenti, conclusa la latitudine 8° 0' 39",4 per quel giorno, per mezzo della mia Formula (vol. 3.° *Saggi Scientifici*, ec. dell'Accad. di Padova) Tang. $z = \dfrac{\text{R. Sen.}a \text{ Tang.}b}{\text{Cos.}a \text{ Tang.}b - \text{R. Tang.}c}$ trovai la distanza del nodo ascendente dalla latitudine 5 Aprile 17° 59' 6", 6, e quindi la longitudine del nodo 5ˢ 17° 45' 39",6;

l'inclinazione dell'orbita per la latitudine 5 Aprile 24° 30' 11",33
per la latitudine dell' opposizione — — — 24 30 7, 27
media — — — — — — — — — — — 24 30 9, 30

N. B. Nella formula $a =$ differ. long., $b =$ latit. maggiore, $c =$ latitud. minore, $z =$ distanza del nodo dalla latitudine maggiore, R = raggio.

Veramente la osservazione dei 28 Marzo è troppo lontana dalla opposizione, ma non sarà tanto lontana credo la opposizione conclusa dalla vera. Bisogna anche supporre un' orbita circolare per ora, non avendosi che queste poche osservazioni.

Ma riflettendo alla diurna diminuzione non piccola del moto retrogrado di questo Astro, si comprende, che le sue distanze dal Sole crescono rapidamente, e che perciò l' arco descritto dai 22 di Marzo ai 5 di Aprile può essere un arco di Parabola piuttosto che di Ellisse poco eccentrica. In fatti crescono le distanze da' 22 Marzo a' 28, come 224234 a 229047 circa
da 28 a 29-30 come 229047 a 234914
da 29-30 Marzo a 4-5 Aprile, come 234914 a 240466;
e se prendasi la distanza minore come perielia (la vera perielia probabilmente non potendo differire che di poco in questa ipotesi), supposto un moto diretto diurno, o uniforme o decrescente come si voglia, per le osservazioni dei 28, 29 Marzo, e quelle dei 4, 5 Aprile risultano due abscisse 231273, 237040, circa, e le due corrispondenti ordinate 228938, 240011, delle quali i quadrati ànno a un di presso la stessa ragione. Pare dunque, che l' Astro Olbersiano sia piuttosto Cometa, che Pianeta. Mi rinnovo ec.

IN-

INDICE

DELLE COSE CONTENUTE IN QUESTO TOMO.

Annali della Società Italiana delle Scienze, (I).

Catalogo de' Socj (XXII).

Tavola degli Errori, e delle Correzioni pag. (XXVII.)

Elogio di MICHELE GIRARDI, scritto da LUIGI BRAMIERI. I

Elogio di LAZARO SPALLANZANI, scritto da ANGELO FABRONI. XXI

Elogio di GIORDANO RICCATI, scritto dal Canonico ANTONIO PELLIZZARI. XLIX

Elogio di Giovambattista da S. Martino, scritto da IPPOLITO PINDEMONTE. LXXI

Elogio di GIUSEPPE OLIVI, scritto da POMPILIO POZZETTI delle Scuole Pie. LXXXXI

Statuto della Società Italiana delle Scienze. CVII

Saggio sopra la *Prosopalgìa* e della sua analogìa colla *Pedionálgìa*, di GIANNANTONIO MARINO. pag. 1

Formule per correggere le deviazioni di un istromento de' transiti, di ANTONIO CAGNOLI. 30

Memoria sopra una Macchina per facilitare il movimento dello scopo delle Aste nelle livellazioni, di ANTONIO LOMBARDI. 44

De' Mostri umani, de' caratteri fondamentali su cui se ne potrebbe stabilire la classificazione e delle indicazioni che presentano nel parto, Lezioni accademiche di VINCENZO MALACARNE. 49

Nuova dimostrazione di un teorema importante nella dottrina dei numeri, di PIETRO PAOLI. 85

Sul problema degli Appoggi, del MEDESIMO. 92

Os-

Osservazioni di Mercurio e di Venere, di VINCENZO CHIMINELLO. 99

Esempj della *Dimetria-Dihysteria*, della *Pseudhermaphroditia-Pseudaeschia* e della *Genometabole*, di VINCENZO MALACARNE. 104

Viaggio geologico per diverse parti meridionali dell' Italia, di ERMENEGILDO PINI. 118

Sulla misteriosa Alembertiana Equazione $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$; Lettera di PIETRO COSSALI. 231

Sopra due Idropici fortunatamente guariti per una caduta dall' alto, Memoria di GIANVERARDO ZEVIANI. 274

Saggio analitico principalmente diretto ad ampliare gli usi di quella Formola chiamata il *Binomio* di *Newton*, di PIETRO FERRONI. 291

Spiegazione popolare della maniera colla quale si regola l' anno sestile o intercalare ed il cominciamento dell' anno repubblicano, del fu LORENZO MASCHERONI. 321

Sopra una Terra vulcanica scoperta nella Provincia Bergamasca, Memoria di GIOVANNI MAIRONI DAPONTE. 335

Memoria sopra alcune nuove specie di piante, di GAETANO SAVI. 349

Memoria circa la deviazione meridionale de' Gravi liberamente cadenti, di GIROLAMO SALADINI. 352

Esame di alcune Storie spettanti alla gravidanza delle Mule, di LEOPOLDO M. A. CALDANI. 370

Ricerche intorno alcune riproduzioni che si operano negli Animali così detti a sangue freddo, di GIUSEPPE BARONIO. 385

Sopra le Aurore boreali locali, Memoria di PIETRO ANTONIO BONDIOLI. 422

Appendice alle osservazioni Elettrico-Atmosferiche

che e Barometriche comparate, di GIUSEPPE MARIA GIOVENE. 438

Della soluzione delle Equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al quarto, Memoria di PAOLO RUFFINI. 444

Riflessioni intorno alla rettificazione ed alla quadratura del circolo, del MEDESIMO. 527

Della impossibilità della quadratura del cerchiò, Memoria di TOMMASO VALPERGA CALUSO. 558

Della resistenza e dell'urto dei fluidi, Memoria di VITTORIO FOSSOMBRONI. 585

Sull' applicazione della Matematica alla Musica, Memoria di GIAMBATISTA DALL' OLIO. 609

Nuova soluzione di un problema statico Euleriano, di GREGORIO FONTANA. 626

Della fermezza o resistenza de' canali contro lo sforzo dell' acqua, di GREGORIO FONTANA. 632

Della pressione dell' acqua in moto contro i vasi e tubi pe' quali scorre, del MEDESIMO. 656

Lettera a PIETRO MOSCATI, di GIOVANNI MAIRONI DAPONTE. 699

Lettera ad ANTONIO CAGNOLI, di VINCENZO CHIMINELLO. 707

IL FINE.

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY